

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

1

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και $B\Gamma$ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$.

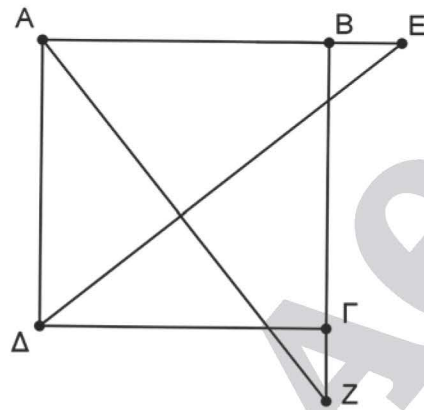
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ABZ και $AE\Delta$ είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $\widehat{E\Delta\Gamma}$ και $\widehat{AZB}$ είναι ίσες.

(Μονάδες 13)



1 Α

ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και AED έχουν:

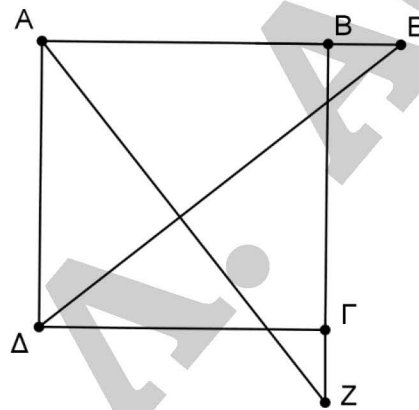
- $AD = AB$, ως πλευρές του τετραγώνου
- $AE = BZ$, διότι $AB = BG$ (πλευρές τετραγώνου) και $BE = GZ$ οπότε $AB + BE = BG + GZ$ ή $AE = BZ$.

Άρα τα τρίγωνα ABZ και AED είναι ίσα αφού έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

β) Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $\widehat{AED} = \widehat{AZB}$ (1) επειδή είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές AD και AB .

Ισχύει επίσης ότι $\widehat{AED} = \widehat{EDG}$ (2), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB, GD που τέμνονται από την DE .

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\widehat{AZB} = \widehat{EDG}$.



2

ΘΕΜΑ 2

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και GA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $AD=AB$ και $AE=AG$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

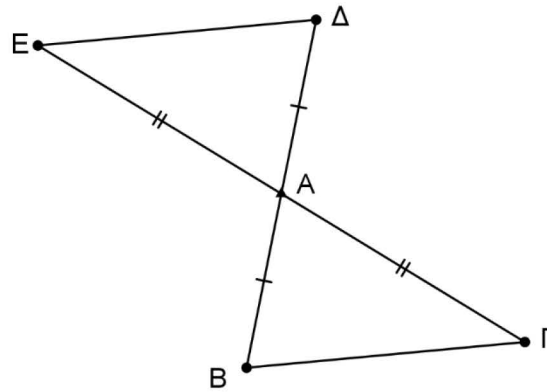
β) $ED//BG$.

(Μονάδες 13)

2 Α

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τμήματα $AD = AB$, $AE = AG$ στις προεκτάσεις προς το A των πλευρών BA , GA αντίστοιχα.



α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE έχουν:

- $AD = AB$ από υπόθεση,
- $AE = AG$ από υπόθεση,
- $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{D\hat{A}E}$, ως κατακορυφήν γωνίες.

Οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).

β) Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και ADE προκύπτει ότι και οι γωνίες $\hat{E}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες ως αντίστοιχες των ίσων πλευρών τους AD και AB , δηλαδή $\hat{E} = \hat{\Gamma}$.

Οι ίσες γωνίες $\hat{E}$, $\hat{\Gamma}$ είναι γωνίες εντός εναλλάξ των DE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την EG , άρα οι DE , $B\Gamma$ είναι παράλληλες.

5

ΘΕΜΑ 2

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

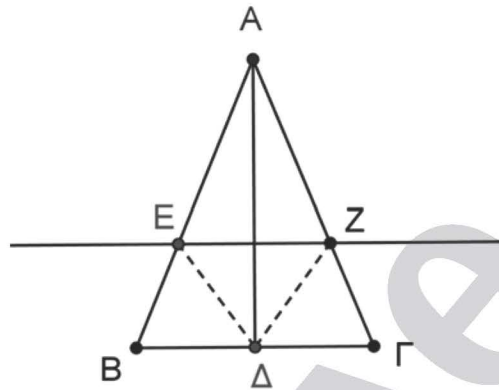
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 12)

β) τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)



5 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\widehat{A\hat{E}Z} = \widehat{B}$ (1) ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων EZ και BΓ που τις τέμνει η AB.

Επίσης είναι $\widehat{A\hat{Z}E} = \widehat{\Gamma}$ (2) ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων EZ και BΓ που τις τέμνει η AΓ.

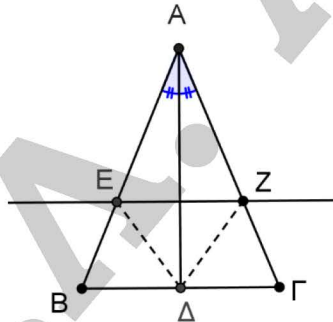
Όμως είναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (3) ως γωνίες της βάσης BΓ στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ.

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\widehat{A\hat{E}Z} = \widehat{A\hat{Z}E}$, οπότε το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές με βάση την EZ.

β) Τα τρίγωνα AED και AZΔ έχουν:

- AΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{E\hat{A}D} = \widehat{Z\hat{A}D}$, διότι η AΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.
- $AE = AZ$, διότι AEZ ισοσκελές τρίγωνο από το α) ερώτημα.

Άρα τα τρίγωνα AED και AZΔ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).



14

ΘΕΜΑ 4

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) φέρουμε τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE . Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ=GH$.

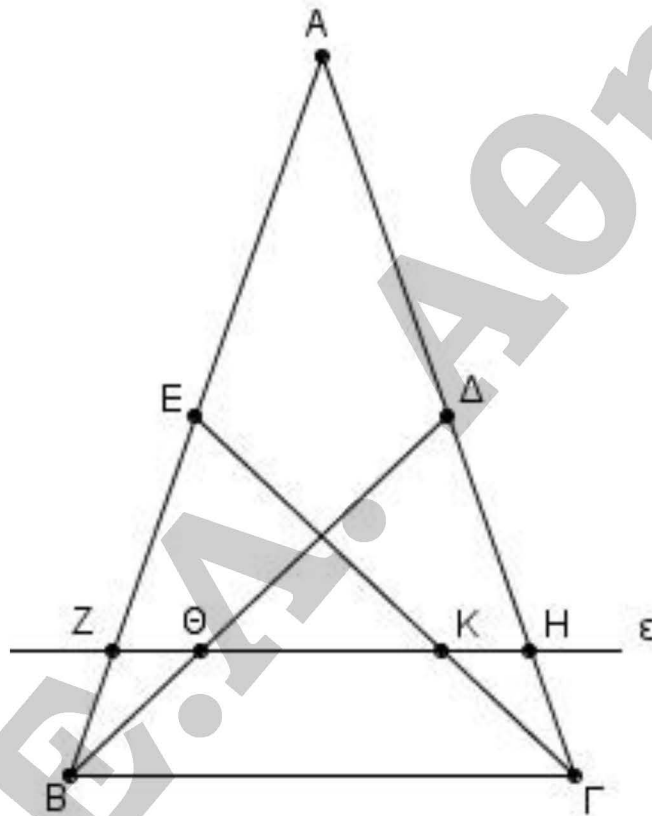
(Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

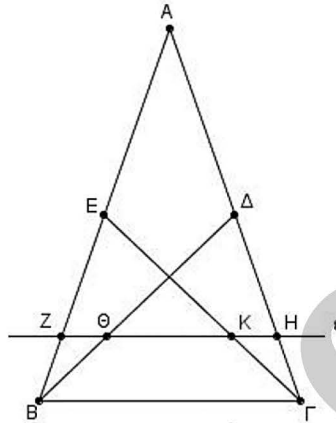
γ) $ZK=H\Theta$.

(Μονάδες 8)



14 A

α) Είναι $\widehat{AZH} = \widehat{AB\Gamma}$ (1), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ϵ , $B\Gamma$ που τέμνονται από την AB . Όμοια $\widehat{AHZ} = \widehat{A\Gamma B}$ (2). Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ισχύει ότι $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{AB\Gamma}$ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\widehat{AZH} = \widehat{AHZ}$ οπότε και το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές. Επομένως $AZ = AH$. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $AZ = AH$, αφαιρούμε κατά μέλη και βρίσκουμε $AB - AZ = A\Gamma - AH \Leftrightarrow BZ = \Gamma H$.



β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$, διότι $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο
- $A\Delta = AE$, ως μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$
- $\widehat{A}$ κοινή γωνία

Από το κριτήριο ΠΓΠ, τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα οπότε και οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές $A\Delta = AE$, θα είναι ίσες, άρα ισχύει $\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Gamma E}$ (4).

Τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $H\Gamma K$ έχουν:

- $BZ = \Gamma H$, όπως αποδείξαμε στο ερώτημα (α)
- $\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Gamma E}$, λόγω της (4)
- $\widehat{B\hat{Z}\Theta} = \widehat{K\hat{H}\Gamma}$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{AHZ}$ και $\widehat{AZH}$.

Από το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $H\Gamma K$ είναι ίσα.

γ) Από το (β), επειδή τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $H\Gamma K$ είναι ίσα, θα έχουν και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και $Z\Theta = HK$.

Οπότε θα είναι και $Z\Theta + \Theta K = HK + \Theta K$, δηλαδή $ZK = H\Theta$.