

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

3

ΘΕΜΑ 2

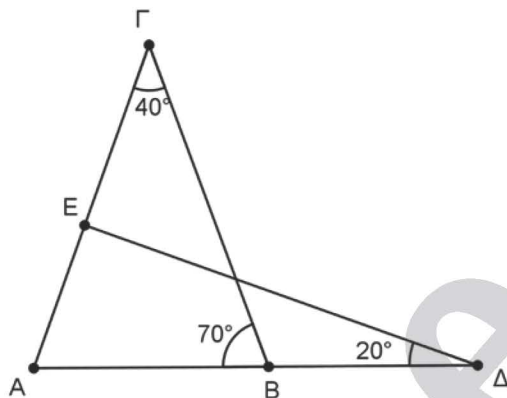
Στο παρακάτω σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 12)

β) η γωνία $AE\Delta$ είναι ορθή.

(Μονάδες 13)



3 Α

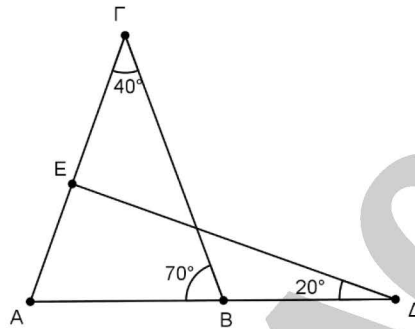
ΛΥΣΗ

α) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (1) και αφού $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$ τότε από τη σχέση (1) βρίσκουμε ότι $\hat{A} = 70^\circ$.

Επειδή είναι $\hat{A} = 70^\circ = \hat{B}$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΓΑ και ΓΒ.

β) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΔ έχουμε:

$\hat{AED} + \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ (2) και αφού $\hat{D} = 20^\circ$ ως δεδομένο και $\hat{A} = 70^\circ$ από α) ερώτημα, τότε από τη σχέση (2) βρίσκουμε ότι $\hat{AED} = 90^\circ$.



4

ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$).

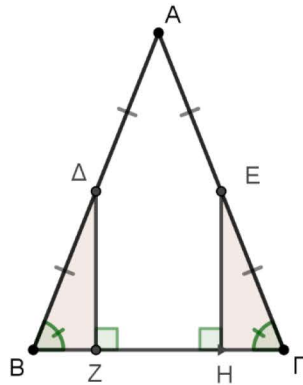
α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$. (Μονάδες 13)

β) Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 12)

4 Α

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.



α) Έστω Δ , E τα μέσα των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και ΔZ , $E\Gamma$ οι αποστάσεις των E , Z από τη βάση $B\Gamma$.

Τα τρίγωνα ΔZB και $E\Gamma H$ έχουν:

- $\widehat{B\Delta Z} = \widehat{G\Gamma E} = 90^\circ$ αφού ΔZ και $E\Gamma$ ως αποστάσεις, από την υπόθεση, είναι κάθετες στη $B\Gamma$.
- $\Delta B = E\Gamma$ ως μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ως προσκείμενες γωνίες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$

Άρα τα τρίγωνα ΔZB και $E\Gamma H$ είναι ορθογώνια που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.

Οπότε έχουν και $\Delta Z = E\Gamma$ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Δηλαδή, τα σημεία Δ και E ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.

β) Για τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 75^\circ + \widehat{B} + \widehat{B} = 180^\circ \text{ ή } 3\widehat{B} = 105^\circ, \text{ άρα } \widehat{B} = 35^\circ.$$

$$\text{Οπότε } \widehat{A} = 75^\circ + 35^\circ = 110^\circ.$$

5

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

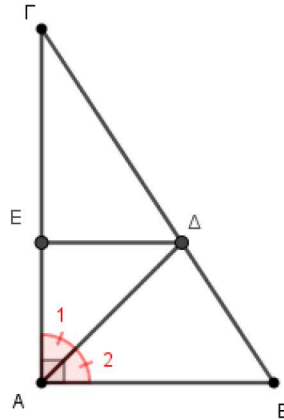
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 7)

5 A

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, AD διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και DE παράλληλη στην AB .



α) Η ED είναι παράλληλη στην AB και η AG είναι κάθετη στην AB , αφού είναι $\hat{A} = 90^\circ$. Οπότε η AG θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της ED .

Άρα, το τρίγωνο $ED\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{E}\hat{\Gamma}\Delta$.

β) Επειδή AD διχοτόμος της ορθής γωνίας $\hat{A}$, ισχύει ότι;

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2} = 45^\circ$$

Αφού είναι $\hat{A}_2 = 45^\circ$ τότε θα είναι και $\hat{ADE} = 45^\circ$, ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ED και AB με τέμνουσα την AD .

γ) Έστω ότι η $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη της $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^\circ$ (1)

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ (2)

Οπότε, λόγω της σχέσης (1), η σχέση (2) γίνεται:

$$\hat{\Gamma} + 20^\circ + \hat{\Gamma} = 90^\circ \text{ ή } 2\hat{\Gamma} = 70^\circ \text{ ή } \hat{\Gamma} = 35^\circ.$$

Τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^\circ = 55^\circ$.

Οι $\hat{E}\hat{\Delta}\Gamma$ και $\hat{B}$ είναι ίσες, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων DE , AB με τέμνουσα την $B\Gamma$. Άρα, $\hat{E}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} = 55^\circ$.

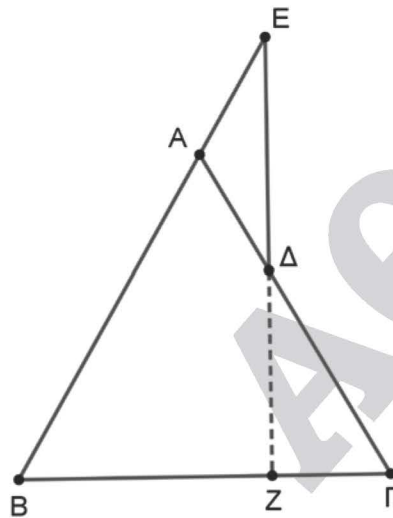
6

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $AE = AD$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ADE . (Μονάδες 10)

β) Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της $E\Delta$ (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην $B\Gamma$. (Μονάδες 15)



6 A

ΛΥΣΗ

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, είναι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, τότε:

$$\Delta\hat{A}E = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $\Delta\hat{A}E = \hat{E}$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

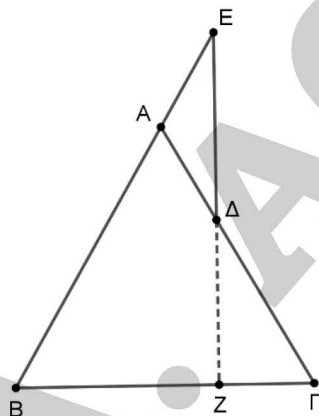
$$\Delta\hat{A}E + \hat{E} + \Delta\hat{A}E = 180^\circ \quad \text{ή} \quad 2\Delta\hat{A}E + 120^\circ = 180^\circ \quad \text{ή} \quad 2\Delta\hat{A}E = 60^\circ, \quad \text{άρα} \quad \Delta\hat{A}E = 30^\circ \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\Delta\hat{A}E = \hat{E} = 30^\circ$.

β) Είναι $\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{Z}\Gamma = 30^\circ$ ως κατακορυφήν γωνίες και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΖΓ προκύπτει ότι:

$$\Delta\hat{Z}\Gamma + \Delta\hat{Z}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^\circ \quad \text{ή} \quad 30^\circ + \Delta\hat{Z}\Gamma + 60^\circ = 180^\circ \quad \text{ή} \quad \Delta\hat{Z}\Gamma = 90^\circ, \quad \text{άρα} \quad EZ \perp B\Gamma$$



7

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$ τέτοια ώστε $\widehat{B\Delta A} = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

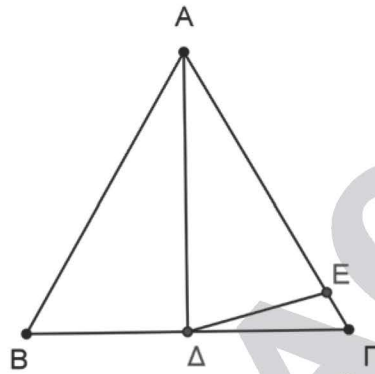
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{E\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 8)



7 Α

ΛΥΣΗ

α) Επειδή είναι $AB = AG$, το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές, άρα η διάμεσος AD είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου.

Επειδή η AD είναι διχοτόμος του τριγώνου ABG θα είναι $\widehat{DAG} = \widehat{BAD} = 30^\circ$, οπότε $\widehat{A} = 60^\circ$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ABG ισχύει ότι:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{G} = 180^\circ \text{ ή } 60^\circ + \widehat{B} + \widehat{B} = 180^\circ \text{ ή } 2\widehat{B} = 120^\circ \text{ ή } \widehat{B} = 60^\circ$$

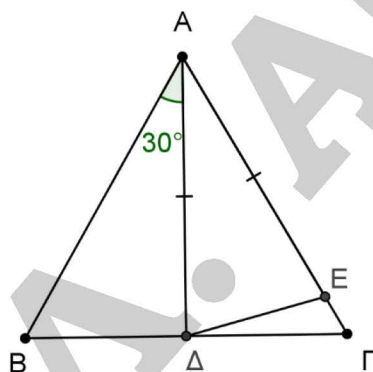
Για το τρίγωνο ABG ισχύει $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{G} = 60^\circ$, άρα είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή είναι $AD = AE$ το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ADE ισχύει ότι:

$$\widehat{DAG} + \widehat{ADE} + \widehat{AED} = 180^\circ \text{ ή } 30^\circ + 2\widehat{ADE} = 180^\circ \text{ ή } \widehat{ADE} = 75^\circ = \widehat{AED}$$

γ) $\widehat{EDG} = \widehat{ADG} - \widehat{ADE} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$



8

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα.

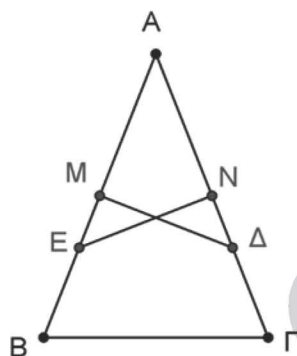
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι $M\Delta = NE$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) Αν είναι $AB = A\Gamma$, τότε $M\Delta = NE$.

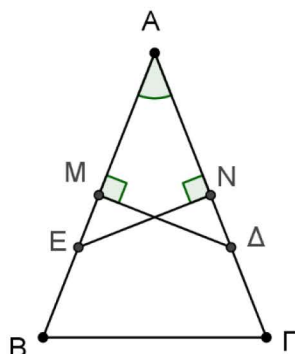
(Μονάδες 13)



8 Α

ΛΥΣΗ

Τα τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΑΝΕ$ είναι ορθογώνια, επειδή οι $ΜΔ$, $ΝΕ$ είναι κάθετες στις πλευρές $ΑΒ$, $ΑΓ$ αντίστοιχα ως μεσοκάθετοί τους (από τα δεδομένα).



α) Στα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΑΝΕ$ οι οξείες γωνίες τους είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $\hat{A} + \hat{A}\hat{D}M = 90^\circ$ και $\hat{A} + \hat{A}\hat{E}N = 90^\circ$, άρα $\hat{A}\hat{D}M = \hat{A}\hat{E}N$ (1).

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΑΝΕ$ έχουν:

- $ΜΔ = ΝΕ$ από την υπόθεση
- $\hat{A}\hat{D}M = \hat{A}\hat{E}N$ από τη σχέση (1)

Οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΑΝΕ$ είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

Αφού τα τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΑΝΕ$ είναι ίσα θα ισχύει $ΑΜ = ΑΝ$, ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}\hat{D}M$ και $\hat{A}\hat{E}N$ αντίστοιχα.

Όμως είναι $ΑΜ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΑΝ = \frac{ΑΓ}{2}$, αφού $Μ, Ν$ μέσα των $ΑΒ, ΑΓ$ αντίστοιχα, και επειδή είναι

$ΑΜ = ΑΝ$, τότε θα είναι και $\frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2}$ οπότε $ΑΒ = ΑΓ$.

Άρα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΑΝΕ$ έχουν:

- $ΑΜ = ΑΝ$, ως μισά των ίσων πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$
- $\hat{A}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια και έχουν μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία ίσες μία προς μία, οπότε έχουν $ΜΔ = ΝΕ$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από την κοινή τους γωνία $\hat{A}$.

9

ΘΕΜΑ 2

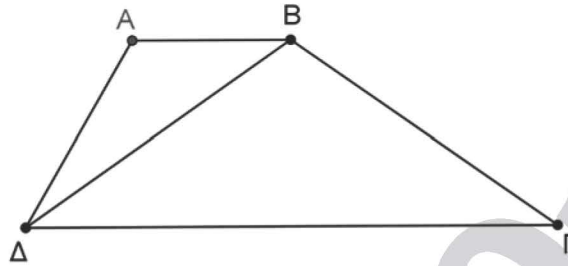
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν $\widehat{B\Gamma\Delta} = 110^\circ$ και $\widehat{A\Delta B} = 25^\circ$ να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $\widehat{\Gamma}$,

(Μονάδες 11)

β) τη γωνία $\widehat{A}$.

(Μονάδες 14)



9 Α

ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με $B\Delta = B\Gamma$, άρα $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{\Gamma}$ (1) ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του $\Delta\Gamma$.

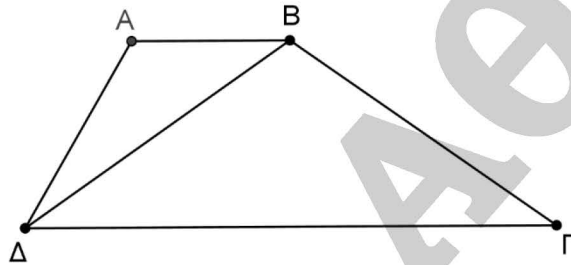
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $B\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\widehat{B\Delta\Gamma} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta B\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 2\widehat{\Gamma} + 110^\circ = 180^\circ \text{ ή } 2\widehat{\Gamma} = 70^\circ, \text{ άρα } \widehat{\Gamma} = 35^\circ.$$

β) Από τη σχέση (1) και το α) ερώτημα έχουμε ότι $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{\Gamma} = 35^\circ$. Οπότε $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{A\Delta B} + \widehat{B\Delta\Gamma} = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$ αφού είναι $\widehat{A\Delta B} = 25^\circ$ από την υπόθεση.

Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{A\Delta\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την AD οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή;

$$\widehat{A} + \widehat{A\Delta\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } \widehat{A} + 60^\circ = 180^\circ, \text{ άρα } \widehat{A} = 120^\circ$$



10

ΘΕΜΑ 2

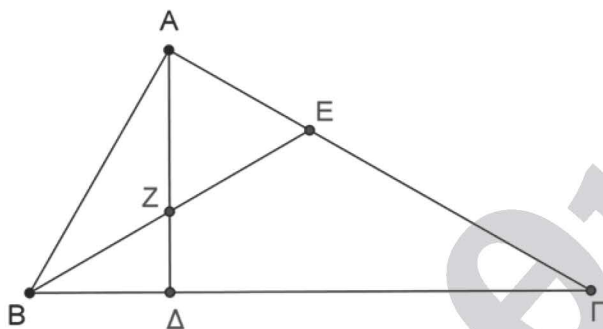
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία B είναι 60° .

(Μονάδες 10)

β) Αν το ύψος του $A\Delta$ και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 15)



10 Α

ΛΥΣΗ

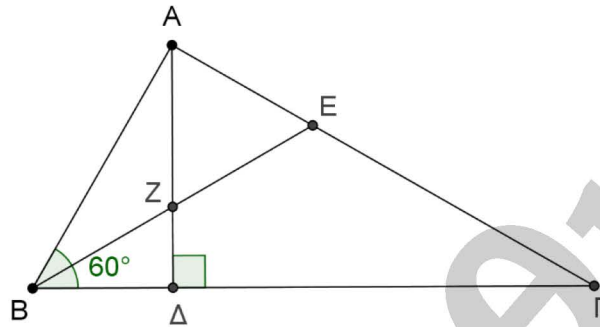
α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } \hat{B} + 2\hat{B} = 180^\circ \text{ ή } 3\hat{B} = 180^\circ \text{ οπότε } \hat{B} = 60^\circ \text{ (1)}$$

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 3\hat{\Gamma} + 60^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 4\hat{\Gamma} = 120^\circ, \text{ οπότε } \hat{\Gamma} = 30^\circ \text{ (2)}$$

Είναι $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ από την υπόθεση, οπότε $\hat{A} + 30^\circ = 2 \cdot 60^\circ$, άρα $\hat{A} = 90^\circ$ (3).



Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΕ έχουμε:

$\hat{A} + \hat{ABE} + \hat{AEB} = 180^\circ$ με $\hat{A} = 90^\circ$ (σχέση 3) και $\hat{ABE} = \frac{\hat{B}}{2}$ επειδή η ΒΕ είναι διχοτόμος (από υπόθεση) όπου $\hat{B} = 60^\circ$ (σχέση 1), οπότε:

$$90^\circ + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{AEB} = 180^\circ \text{ ή } \frac{60^\circ}{2} + \hat{AEB} = 90^\circ \text{ ή } 30^\circ + \hat{AEB} = 90^\circ, \text{ άρα } \hat{AEB} = 60^\circ \text{ (4)}$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου ΑΔΓ έχουμε:

$\hat{\Gamma\hat{A}\Delta} + \hat{\Delta} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ με $\hat{\Delta} = 90^\circ$ επειδή η ΑΔ είναι ύψος και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ (σχέση 2), οπότε:

$$\hat{\Gamma\hat{A}\Delta} + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ \text{ ή } \hat{\Gamma\hat{A}\Delta} + 120^\circ = 180^\circ, \text{ άρα } \hat{\Gamma\hat{A}\Delta} = 60^\circ \text{ (5)}$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ έχουμε:

$\hat{Z\hat{A}E} + \hat{A\hat{Z}E} + \hat{A\hat{E}Z} = 180^\circ$ με $\hat{Z\hat{A}E} = \hat{\Gamma\hat{A}\Delta} = 60^\circ$ (σχέση 5) και $\hat{A\hat{E}Z} = \hat{A\hat{E}B} = 60^\circ$ (σχέση 4), οπότε:

$$60^\circ + \hat{A\hat{Z}E} + 60^\circ = 180^\circ \text{ ή } 120^\circ + \hat{A\hat{Z}E} = 180^\circ, \text{ άρα } \hat{A\hat{Z}E} = 60^\circ.$$

Το τρίγωνο ΑΖΕ έχει όλες τις γωνίες του ίσες οπότε είναι ισόπλευρο.

Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον $AD=BG$ και $AG=BE$.

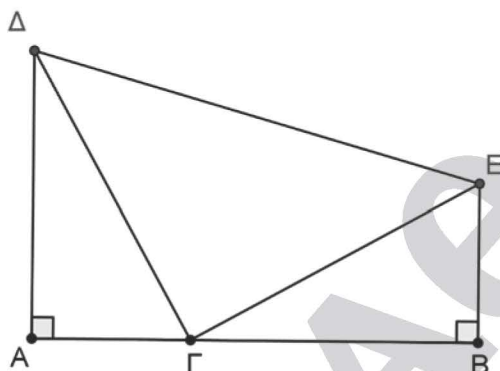
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AGD και BGE είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $\angle EGB = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο DGE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 12)



11 Α

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ορθογώνια και έχουν:

- $AD = BG$, από υπόθεση
- $AG = BE$, από υπόθεση

Οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα αφού έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΕ προκύπτει ότι $\Delta\Gamma = \Gamma E$, οπότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ισοσκελές. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΓΕ είναι:

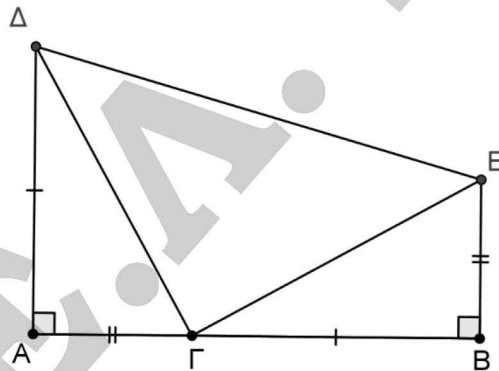
$$\widehat{E\Gamma B} + \widehat{B} + \widehat{B\hat{E}\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 40^\circ + 90^\circ + \widehat{B\hat{E}\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } \widehat{B\hat{E}\Gamma} = 50^\circ$$

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΕ προκύπτει ότι $\Delta\hat{\Gamma}A = \widehat{B\hat{E}\Gamma}$ ως απέναντι γωνίες των ίσων πλευρών ΑΔ και ΒΓ. Άρα $\Delta\hat{\Gamma}A = \widehat{B\hat{E}\Gamma} = 50^\circ$.

Ισχύει ότι:

$$\Delta\hat{\Gamma}A + \Delta\hat{\Gamma}E + \widehat{E\Gamma B} = 180^\circ \text{ ή } 50^\circ + \Delta\hat{\Gamma}E + 40^\circ = 180^\circ \text{ ή } \Delta\hat{\Gamma}E = 90^\circ$$

Άρα το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



12

ΘΕΜΑ 2

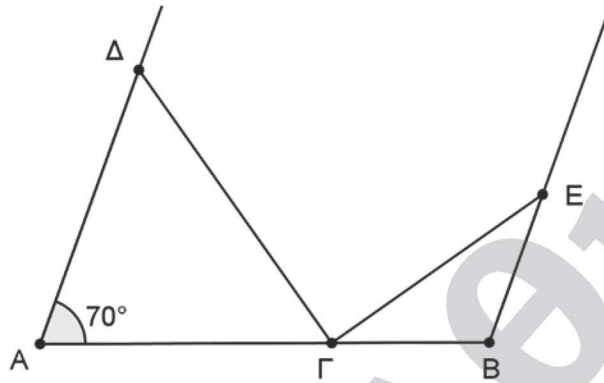
Στο παρακάτω σχήμα, οι AD και BE είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $AD=AG$, $BE=BG$ και $\hat{A} = 70^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ADG και BGE .

(Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{\Gamma}E = 90^\circ$.

(Μονάδες 9)



12 A

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $AD = AG$, το τρίγωνο ADG είναι ισοσκελές οπότε $\hat{D} = \hat{G}A$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ADG , και τη σχέση (1) έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{D} + \hat{G}A = 180^\circ \text{ ή } 70^\circ + 2\hat{D} = 180^\circ \text{ ή } 2\hat{D} = 110^\circ \text{ ή } \hat{D} = 55^\circ$$

Οπότε $\hat{G}A = \hat{D} = 55^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AD , BE που τέμνονται από την AB , οπότε είναι παραπληρωματικές. Άρα:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \text{ ή } 70^\circ + \hat{B} = 180^\circ \text{ ή } \hat{B} = 110^\circ$$

Επειδή, $BE = BG$, το τρίγωνο BEG είναι ισοσκελές, άρα $\hat{E}GB = \hat{E}$ (2).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου BEG έχουμε:

$$\hat{B} + \hat{E} + \hat{E}GB = 180^\circ \text{ ή } 110^\circ + 2\hat{E} = 180^\circ, \text{ αφού } \hat{E}GB = \hat{E} \text{ από (2), οπότε } 2\hat{E} = 70^\circ \text{ ή } \hat{E} = 35^\circ.$$

Οπότε $\hat{E}GB = \hat{E} = 35^\circ$.

β) Ισχύει ότι $\hat{DGE} = 180^\circ - \hat{G}A - \hat{E}GB = 180^\circ - 55^\circ - 35^\circ = 90^\circ$.

