Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

1

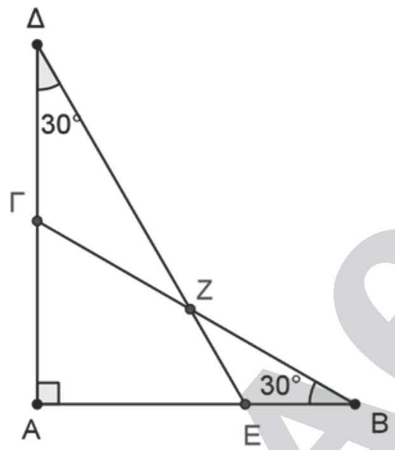
ΘΕΜΑ 2

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει

$\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$ και Ζ το σημείο τομής των πλευρών τους ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΕΖΓ. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)



1 A

ΛΥΣΗ

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \text{ ή } 90^o + 30^o + \widehat{\Gamma} = 180^o \text{ ή } \widehat{\Gamma} = 60^o$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ, είναι:

$$\widehat{A} + \widehat{\Delta} + A\widehat{E}\Delta = 180^o \text{ ή } 90^o + 30^o + A\widehat{E}\Delta = 180^o \text{ ή } A\widehat{E}\Delta = 60^o$$

Η γωνία $A\widehat{E}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΖΒ, οπότε ισχύει:

$$A\widehat{E}\Delta = E\widehat{Z}B + \widehat{B} \text{ ή } 60^o = E\widehat{Z}B + 30^o \text{ ή } E\widehat{Z}B = 30^o$$

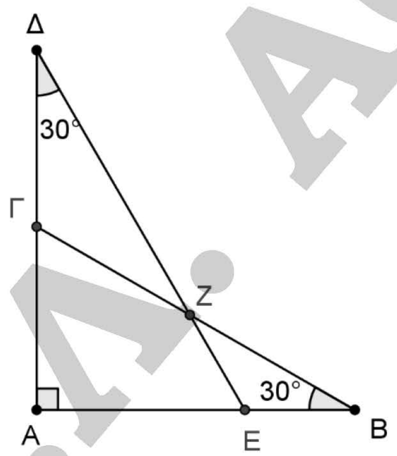
Οι γωνίες $\Gamma\widehat{Z}E$ και $E\widehat{Z}B$ είναι παραπληρωματικές οπότε ισχύει:

$$\Gamma\widehat{Z}E + E\widehat{Z}B = 180^o \text{ ή } \Gamma\widehat{Z}E + 30^o = 180^o \text{ ή } \Gamma\widehat{Z}E = 150^o.$$

β) Επειδή είναι $E\widehat{Z}B = \widehat{B} = 30^o$, το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ισοσκελές.

Επειδή οι γωνίες $E\widehat{Z}B$ και $\Gamma\widehat{Z}\Delta$ είναι κατακορυφήν, ισχύει ότι $\Gamma\widehat{Z}\Delta = E\widehat{Z}B = 30^o$.

Άρα $\Gamma\widehat{Z}\Delta = \widehat{\Delta}$, οπότε το τρίγωνο ΓΖΔ είναι ισοσκελές.



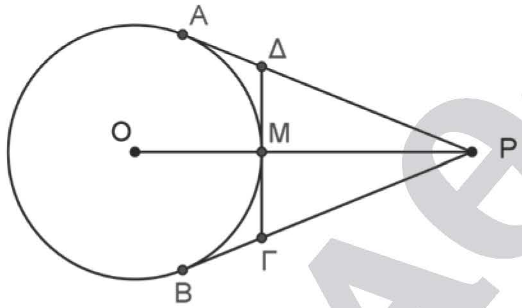
2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ένα εξωτερικό του σημείο Ρ, από το οποίο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου ΡΑ και ΡΒ. Έστω ότι το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $A\hat{P}B$ είναι 40^0 να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{O}B$. (Μονάδες 12)

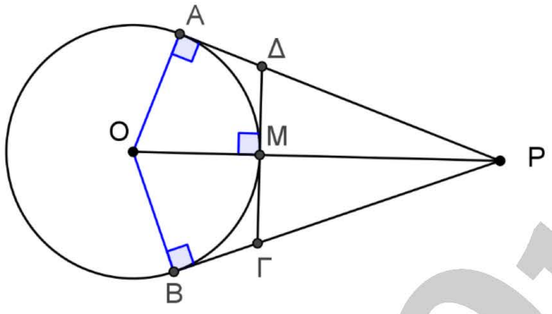


2 Α

ΛΥΣΗ

α) Η ακτίνα ΟΜ έχει άκρο το σημείο επαφής Μ άρα είναι κάθετη στην εφαπτομένη ΔΓ.

Η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων ΡΑ και ΡΒ, δηλαδή την $\text{Α}\hat{\text{Ρ}}\text{Β}$. Οπότε στο τρίγωνο ΡΓΔ το ΡΜ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



β) Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου ΟΑΡΒ είναι 360^0. Οπότε:

$$\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Β} + \hat{\text{Α}} + \hat{\text{Β}} + \hat{\text{Ρ}} = 360^0 \text{ ή } \text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Β} + 90^0 + 90^0 + 40^0 = 360^0 \text{ ή } \text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Β} = 140^0$$

4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και διάμετρός του ΑΒ. Έστω Γ το μέσο ενός ημικυκλίου του, Δ τυχαίο σημείο του άλλου ημικυκλίου του και $A\widehat{\Gamma}B = A\widehat{\Delta}B = 90^0$. Στην προέκταση της ΔΒ προς το μέρος του Β θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΒΕ = ΑΔ.

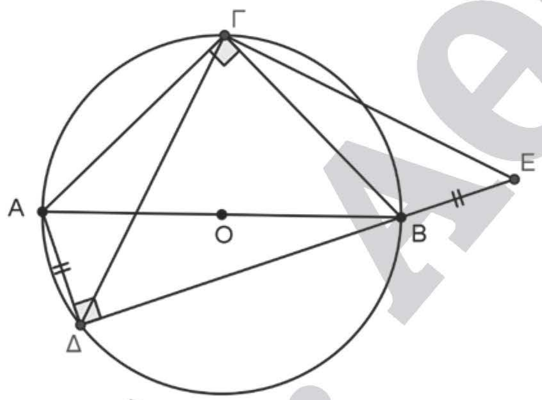
α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι γωνίες $\Gamma\widehat{A}\Delta$ και $\Gamma\widehat{B}E$ είναι ίσες, (Μονάδες 6)

ii. τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα, (Μονάδες 7)

iii. η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ. (Μονάδες 6)

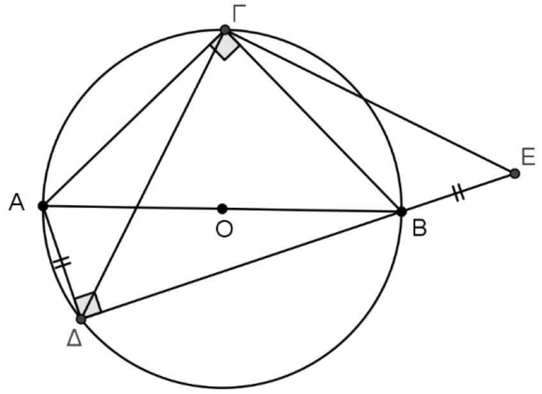
β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου. (Μονάδες 6)



4 Α

ΛΥΣΗ

α)



i) Για τις γωνίες του τετραπλεύρου ΓΑΔΒ ισχύει ότι:

$\Gamma\widehat{A}\Delta + A\widehat{\Delta}B + \Delta\widehat{B}\Gamma + A\widehat{\Gamma}B = 360^0$ και αφού $A\widehat{\Gamma}B = A\widehat{\Delta}B = 90^0$ τότε $\Gamma\widehat{A}\Delta + \Delta\widehat{B}\Gamma = 180^0$,

οπότε $\Gamma\widehat{A}\Delta = 180^0 - \Delta\widehat{B}\Gamma$ (1) .

Η $\Gamma\widehat{B}E$ είναι παραπληρωματική γωνία της $\Delta\widehat{B}\Gamma$, οπότε $\Gamma\widehat{B}E = 180^0 - \Delta\widehat{B}\Gamma$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Gamma\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{B}E$.

i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

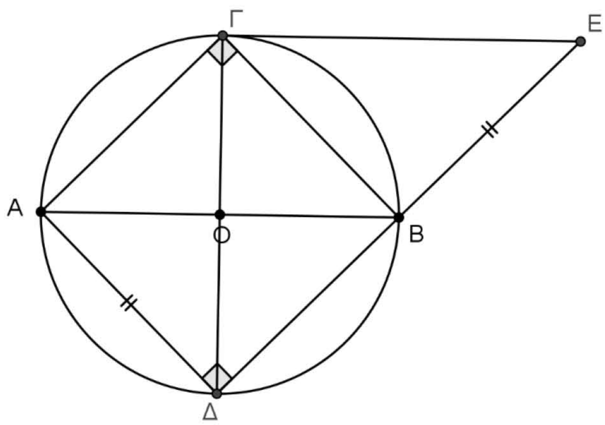
- ΑΔ = ΒΕ, από υπόθεση
- ΑΓ = ΓΒ ως ίσες χορδές των ίσων τόξων ΑΓ και ΓΒ αφού το Γ είναι μέσο του τόξου ΑΒ.
- $\Gamma\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{B}E$ από α) ερώτημα

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).

ii) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα, προκύπτει ότι $A\widehat{\Gamma}\Delta = B\widehat{\Gamma}E$ γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΕ αντίστοιχα.

Τότε: $\Delta\widehat{\Gamma}E = \Delta\widehat{\Gamma}B + B\widehat{\Gamma}E = \Delta\widehat{\Gamma}B + A\widehat{\Gamma}\Delta = A\widehat{\Gamma}B = 90^o$, άρα $\Gamma\Delta \perp \Gamma E$.

β)



Όταν το Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ, τότε από το **α)iii.** ερώτημα είδαμε ότι ΓΔ⊥ΓΕ ή ΟΓ⊥ΓΕ αφού ΓΔ διάμετρος και ΟΓ ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή για την ακτίνα ΟΓ ισχύει ότι είναι κάθετη στο τμήμα ΓΕ, οπότε η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

5

ΘΕΜΑ 2

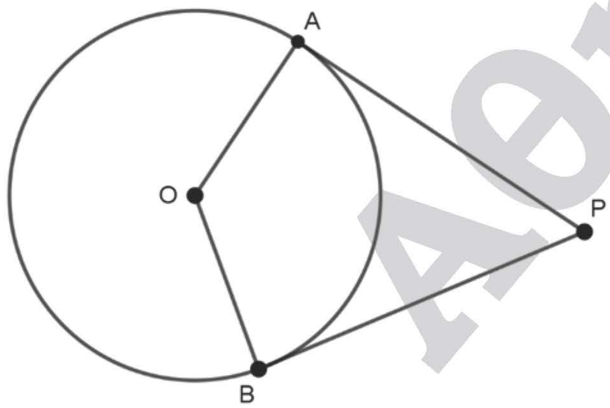
Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας 4 cm και εξωτερικό του σημείο Ρ. Έστω ΡΑ, ΡΒ τα εφαπτόμενα τμήματα που φέρονται από το Ρ, τα σημεία επαφής τους Α, Β με τον κύκλο αντίστοιχα και τέτοια ώστε η γωνία $A\hat{P}B$ να ισούται με 60^0.

α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο της γωνίας $A\hat{O}B$ είναι ίσο με 120^0. (Μονάδες 7)

β) Αν ΡΟ η διακεντρική ευθεία του σημείου Ρ, τότε να υπολογίσετε:

i. το μέτρο της γωνίας $A\hat{P}O$, (Μονάδες 9)

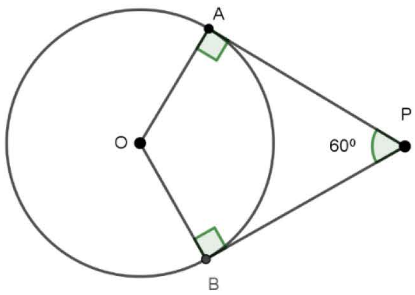
ii. το μήκος του τμήματος ΟΡ. (Μονάδες 9)



5 A

ΛΥΣΗ

α) Τα σημεία Α και Β είναι σημεία επαφής των εφαπτόμενων τμημάτων ΡΑ και ΡΒ με τον κύκλο αντίστοιχα και ΟΑ, ΟΒ ακτίνες του κύκλου που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής.



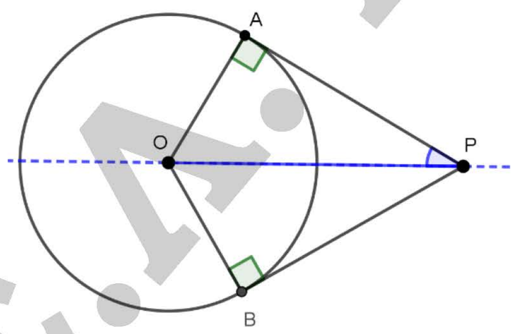
Γνωρίζουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου είναι κάθετα στις ακτίνες που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής, οπότε θα είναι $O\hat{A}P = 90^0$ και $O\hat{B}P = 90^0$.

Για τις γωνίες του τετράπλευρου ΡΑΟΒ ισχύει ότι:

$$A\hat{P}B + O\hat{B}P + A\hat{O}B + O\hat{A}P = 360^0 \text{ ή } 60^0 + 90^0 + A\hat{O}B + 90^0 = 360^0$$

$$\text{ή } A\hat{O}B = 360^0 - 240^0 \text{ ή } A\hat{O}B = 120^0$$

β) Φέρνουμε την διακεντρική ευθεία ΡΟ.



i. Γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{P}B$ των εφαπτόμενων τμημάτων ΡΑ και ΡΒ, άρα $A\hat{P}O = \frac{A\hat{P}B}{2} = \frac{60^0}{2} = 30^0$.

ii. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $O\hat{A}P = 90^o$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΡ είναι ορθογώνιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΡ η γωνία $A\hat{P}O$, λόγω του βi) ερωτήματος, ισούται με 30^0, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΟ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΡΟ, δηλαδή $OA = \frac{OP}{2}$ ή $OP = 2 \cdot OA = 2 \cdot 4 = 8$ cm.