Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

1

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

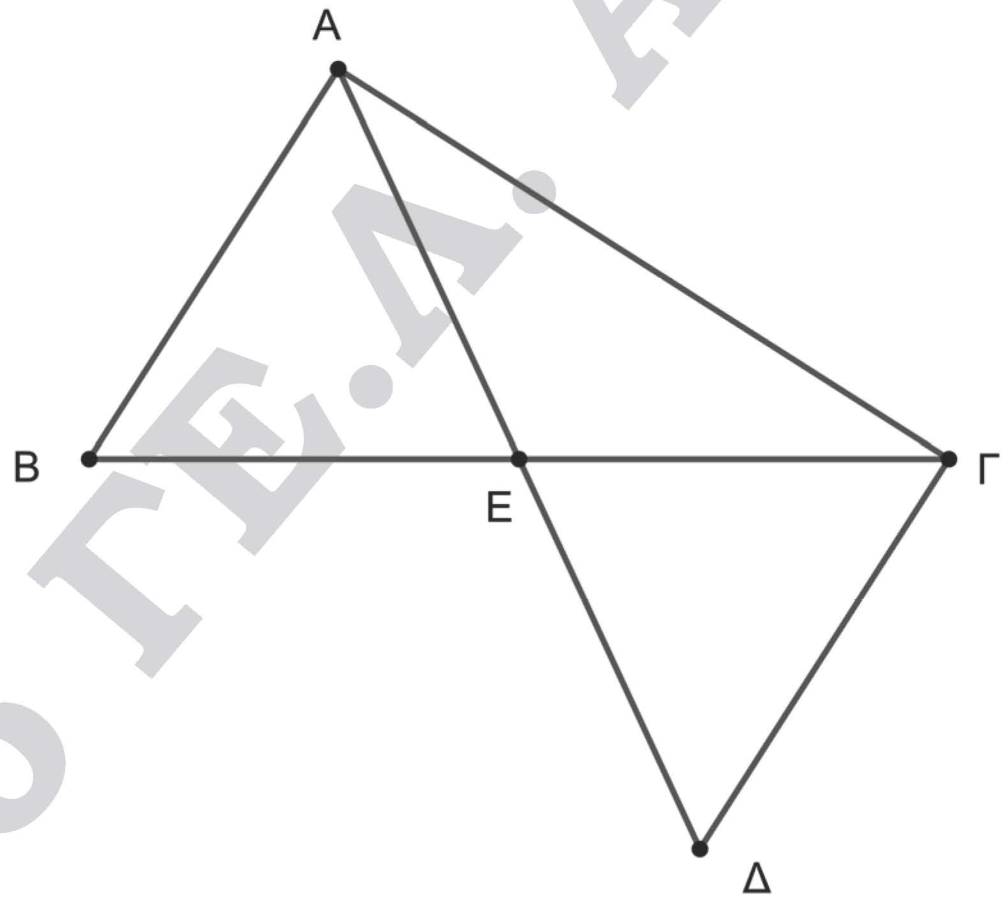
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ. (Μονάδες 5)

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)

iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ. (Μονάδες 7)

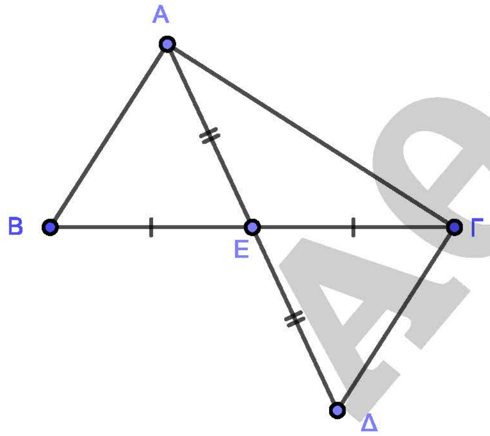


1 Α
ΛΥΣΗ

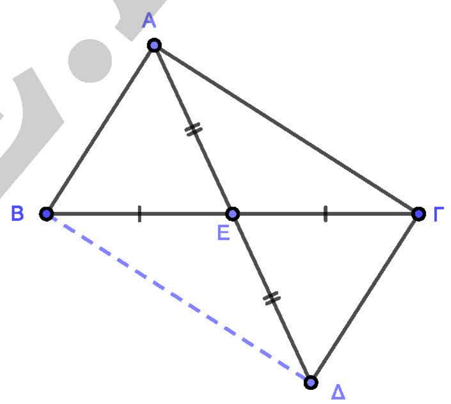
α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ έχουν:

- ΕΒ = ΕΓ, από υπόθεση
- ΕΑ = ΕΔ, από υπόθεση,
- $A\hat{E}B = \Delta\hat{E}\Gamma$ ως κατακορυφήν.

Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες, οπότε και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{E}B$ και $\Delta\hat{E}\Gamma$ είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΓΔ.



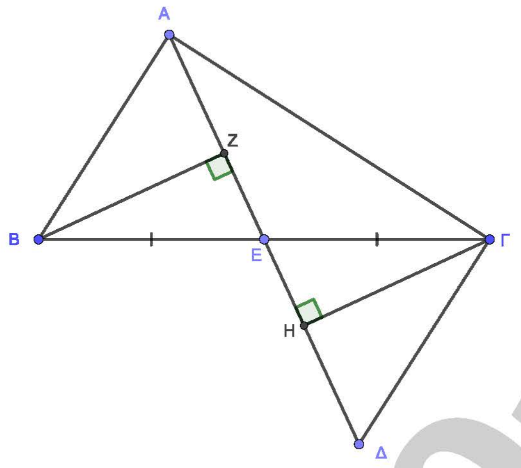
ii. Επειδή ΕΒ = ΕΓ και ΕΑ = ΕΔ, δηλαδή οι διαγώνιοι του ΑΒΔΓ διχοτομούνται, συμπεραίνουμε ότι το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΑΒ//ΓΔ. Άρα αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ προεκταθούν, αποκλείεται να συναντηθούν.



iii. Φέρουμε ΒΖ $\perp$ ΑΔ και ΓΗ $\perp$ ΑΔ. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΕΗ και ΒΕΖ έχουν:

- ΕΓ = ΕΒ, από υπόθεση
- $B\hat{E}Z = \Gamma\hat{E}H$, ως κατακορυφήν

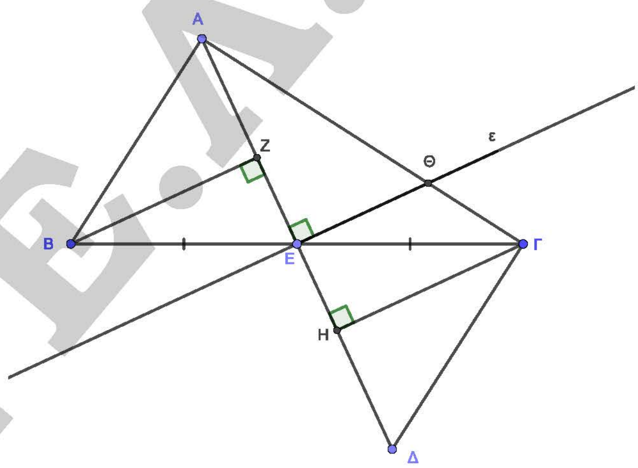
Άρα είναι ίσα γιατί έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, οπότε ισχύει $BZ = \Gamma H$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\hat{E}Z$ και $\Gamma\hat{E}H$ αντίστοιχα, δηλαδή τα Β και Γ ισαπέχουν από την ΑΔ.



β) Για να ισαπέχει κάποιο σημείο από τα Α και Δ, θα πρέπει να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ. Εφόσον θέλουμε το σημείο αυτό να ανήκει στο δρόμο ΑΓ, θα είναι το σημείο τομής της της ΑΓ με τη μεσοκάθετο του ΑΔ.

Φέρουμε τη μεσοκάθετη ε του ΑΔ και ονομάζουμε Θ το σημείο τομής της με την ΑΓ.

Επειδή κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ε ισαπέχει από τα άκρα Α, Δ του ΑΔ συμπεραίνουμε ότι και το σημείο Θ ισαπέχει από τα Α, Δ.



4

ΘΕΜΑ 4

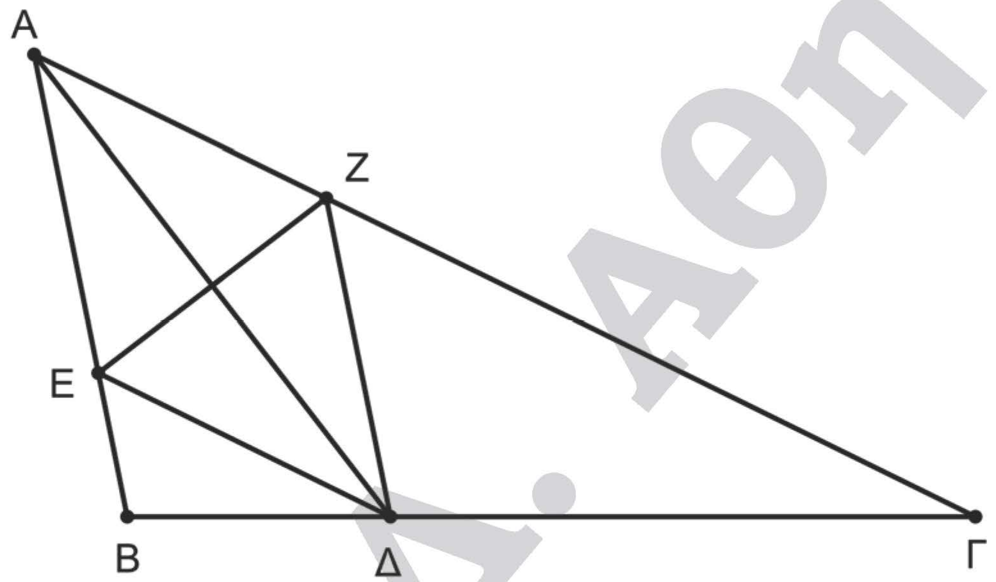
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει ΑΔ = ΔΓ. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\widehat{Δ}Β$ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)

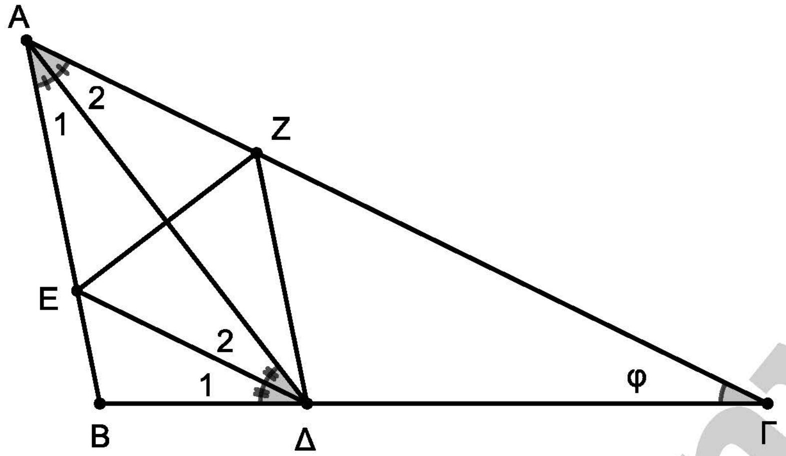
β) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)



4 Α

ΛΥΣΗ



α) Επειδή ΑΔ = ΔΓ, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα $\widehat{A}_2 = \widehat{\Gamma} = \widehat{\varphi}$

Η γωνία $B\widehat{\Delta}A$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα

$B\widehat{\Delta}A = \widehat{A}_2 + \widehat{\Gamma} = 2\,\widehat{\varphi}$.

Είναι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = \frac{B\widehat{\Delta}A}{2} = \frac{2\widehat{\varphi}}{2} = \widehat{\varphi}$

Είναι $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{A}_2$. Δηλαδή δύο εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται από τις ΔΕ, ΑΓ και την ΑΔ, είναι ίσες. Άρα ΔΕ // ΑΓ.

β) Είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{A}_2$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ.

γ) Επειδή ΔΖ // ΑΒ και ΔΕ // ΑΖ, το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο. Τα ΑΔ και ΕΖ είναι διαγώνιες παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται.

8

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΜΑ. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

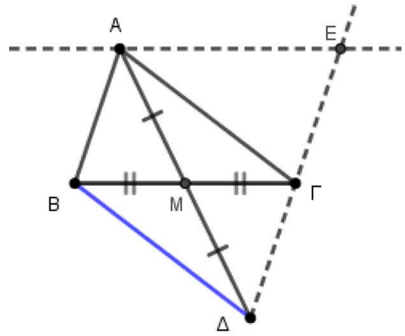
α) το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)

β) $\mathrm{BM} = \frac{\mathrm{AE}}{2}$. (Μονάδες 13)

8 Α

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, Μ μέσο της ΒΓ, Δ σημείο στην προέκταση της ΑΜ προς το Μ τέτοιο ώστε ΜΔ=ΜΑ, Ε το σημείο τομής της ΔΓ με ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στη ΒΓ.



α) Φέρνουμε το τμήμα ΒΔ. Επειδή έχουμε ΜΓ = ΒΜ αφού το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και ΜΑ = ΜΔ από την υπόθεση, τότε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του ΑΔ και ΒΓ διχοτομούνται.

β) Έχουμε ότι η ευθεία ΑΕ είναι παράλληλη στην ΒΓ, οπότε και τα τμήματα ΑΕ και ΒΓ είναι παράλληλα.

Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Άρα και τα τμήματα ΑΒ και ΓΕ είναι παράλληλα.

Συνεπώς, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες.

Επειδή ΑΕ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ, ισχύει ότι

ΒΜ = $\frac{ΒΓ}{2} = \frac{ΑΕ}{2}$.

9

ΘΕΜΑ 2

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΝ = ΚΓ.

Να αποδείξετε ότι:

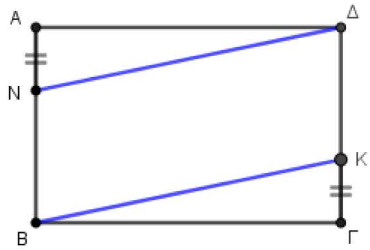
α) τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα , (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

9 Α

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημεία Ν και Κ πάνω στις ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΝ = ΓΚ.



α) Τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ έχουν:

- $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 90^0$,αφού το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
- ΑΝ = ΚΓ, από υπόθεση
- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ

Άρα, τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

β) Ισχύει ΑΒ = ΔΓ (1) γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και επίσης είναι ΑΝ = ΚΓ (2) από υπόθεση.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις ισότητας (1) και (2) βρίσκουμε:

ΑΒ – ΑΝ = ΔΓ – ΚΓ, δηλαδή ΒΝ = ΚΔ (3)

Είναι ΔΝ=ΒΚ (4) ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων ΑΝΔ και ΒΓΚ (ερώτημα αi).

Από (3) και (4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

10

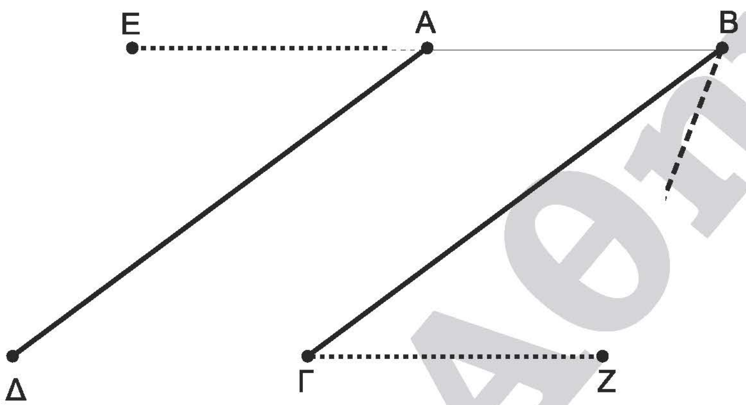
ΘΕΜΑ 2

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα ΑΕ = ΑΒ και ΓΖ = ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα, (Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



10 Α

ΛΥΣΗ

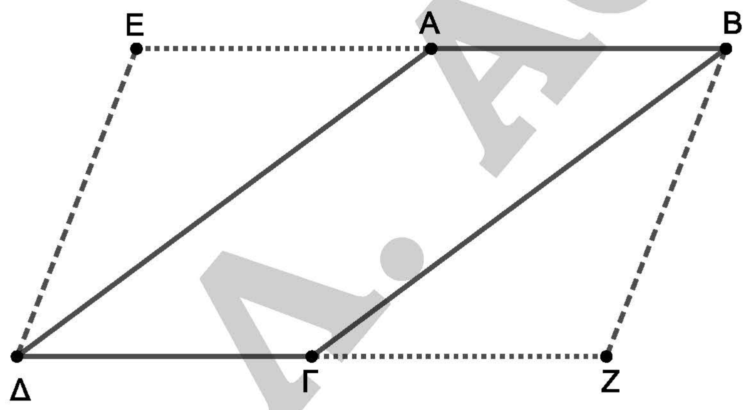
α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου
- ΑΕ = ΓΖ, επειδή είναι ΑΕ =ΑΒ και ΓΖ = ΔΓ από την υπόθεση με ΑΒ = ΔΓ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ της υπόθεσης
- $E\hat{A}\Delta = B\hat{\Gamma}Z$, διότι είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{A}$, $\hat{\Gamma}$.

Οπότε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ), άρα είναι ίσα.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΒΓΖ ισχύει ότι ΕΔ = ΒΖ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $E\hat{A}\Delta$ και $B\hat{\Gamma}Z$.

Ισχύει ότι ΒΖ = ΕΔ και ΕΒ = 2ΑΒ = 2ΓΔ=ΔΖ. Οπότε το τετράπλευρο ΕΒΖΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



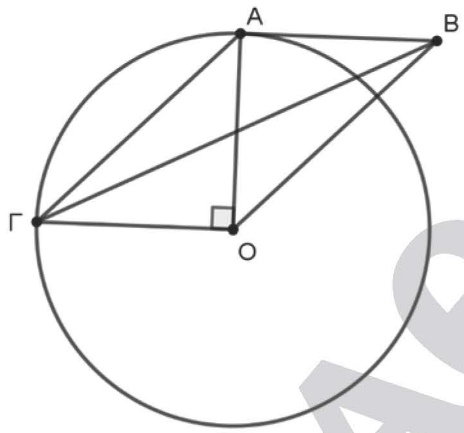
11

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ , ΟΓ και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΒ = ΟΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 15)



11 Α
ΛΥΣΗ

α) Η ΟΑ είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την εφαπτομένη ΑΒ, οπότε ΟΑ $\perp$ ΑΒ. Επίσης ΟΑ $\perp$ ΟΓ από υπόθεση, άρα ΑΒ // ΟΓ ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΟΑ.

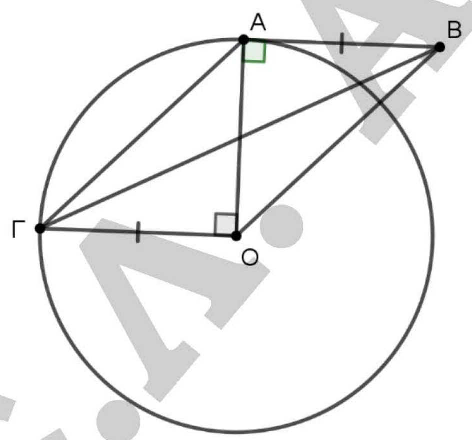
Επειδή είναι ΑΒ // ΟΓ και ΑΒ = ΟΓ, τότε το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.

Οι ΑΟ και ΒΓ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται.

β) Το ΑΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα και ΟΑ η ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής Α, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με ΟΑ = ΑΒ = ρ, αφού ΑΒ = ΟΓ από δεδομένα και ΟΓ = ΟΒ = ρ, άρα το τρίγωνο είναι τελικά ορθογώνιο και ισοσκελές με βάση ΟΒ.

Τότε $Α\widehat{Β}Ο = Β\widehat{Ο}Α = 45^\circ$ και $Α\widehat{Β}Ο = Ο\widehat{Γ}Α = 45^\circ$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Είναι $Β\widehat{Ο}Γ = Β\widehat{Ο}Α + Α\widehat{Ο}Γ = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ και $Γ\widehat{Α}Β = Β\widehat{Ο}Γ = 135^\circ$ διότι είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.



12

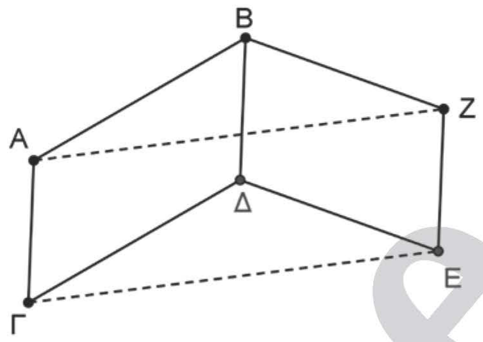
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 13)

β) $\hat{ΑΒΖ} = \hat{ΓΔΕ}$. (Μονάδες 12)



12 A

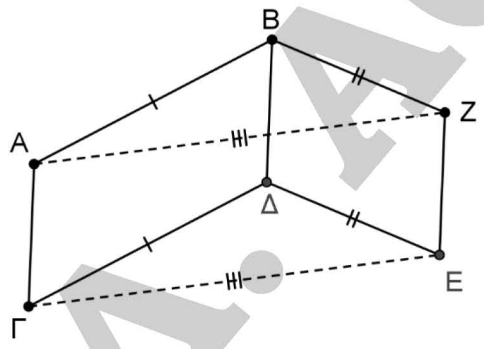
ΛΥΣΗ

α) Το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές του ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες και παράλληλες. Επίσης, το ΒΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι απέναντι πλευρές του ΒΔ και ΖΕ είναι ίσες και παράλληλες. Άρα οι ΑΓ και ΖΕ είναι ίσες και παράλληλες, συνεπώς και το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΓΔΕ έχουν:

- ΑΒ = ΓΔ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ
- ΒΖ = ΔΕ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΒΖΕΔ
- ΑΖ = ΓΕ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΖΕΓ

Οπότε τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΓΔΕ έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε θα έχουν και $\mathrm{A\hat{B}Z} = \mathrm{\Gamma\hat{\Delta}E}$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΓΕ αντίστοιχα.



36

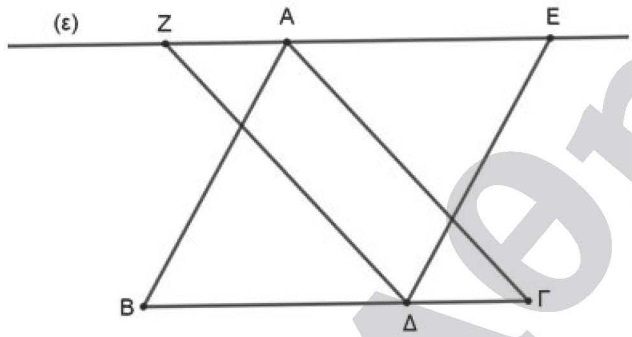
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τις παράλληλες προς την ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τετράπλευρα ΖΑΓΔ και ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



36 A

ΛΥΣΗ

α) Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη ΒΓ, προκύπτει ΖΑ // ΔΓ.

Από την υπόθεση έχουμε ΖΔ // ΑΓ.

Άρα το τετράπλευρο ΖΑΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη ΒΓ, προκύπτει ΑΕ // ΒΔ.

Από την υπόθεση έχουμε ΔΕ // ΒΑ.

Άρα το τετράπλευρο ΑΒΔΕ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

- ΑΒ = ΔΕ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΔΕ
- ΑΓ = ΔΖ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΖΑΓΔ
- ΒΓ = ΖΕ, διότι ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ και ΖΕ = ΖΑ + ΑΕ και ΒΔ = ΑΕ, ΔΓ =ΖΑ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων ΖΑΓΔ, ΑΒΔΕ αντίστοιχα.

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

46

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας $\hat{A}$. Από την κορυφή Α διέρχεται ημιευθεία Αx // ΒΓ στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ). Στην ημιευθεία Αx θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

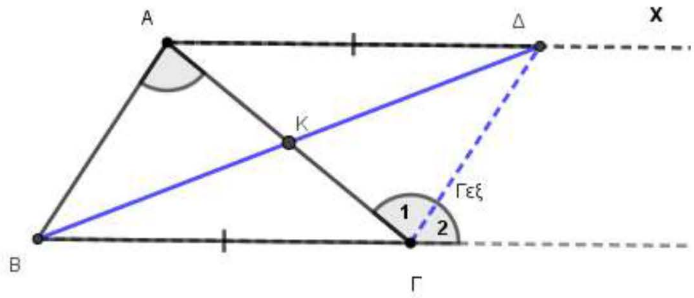
α) Η ΒΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 7)

β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

46 Α

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε η $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\widehat{A}$, ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ και σημείο της Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΒΓ.



α) Αφού τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι ίσα και παράλληλα, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται έστω στο σημείο Κ. Άρα η ΒΔ διέρχεται από το μέσο Κ του τμήματος ΑΓ.

β) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες.

Είναι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A}$ (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τις τέμνει η ΑΓ.

Όμως είναι $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2$ οπότε θα είναι $2\widehat{A} = \widehat{A} + \widehat{\Gamma}_2$. Άρα $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}_2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$, οπότε η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι δυο εσωτερικών γωνιών του, άρα $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \widehat{A} + \widehat{B}$. Με δεδομένο ότι $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\widehat{A}$ θα είναι $2\widehat{A} = \widehat{A} + \widehat{B}$ άρα $\widehat{A} = \widehat{B}$. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.