Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

5

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ φέρουμε δυο διαμέτρους του ΑΒ και ΓΔ.

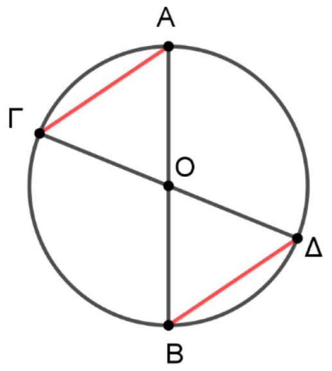
Να αποδείξετε ότι:

α) οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες, (Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Γ, Β και Δ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

5Α
ΛΥΣΗ

Έστω κύκλος (Ο, ρ) και οι διάμετροί του ΑΓ και ΒΔ.



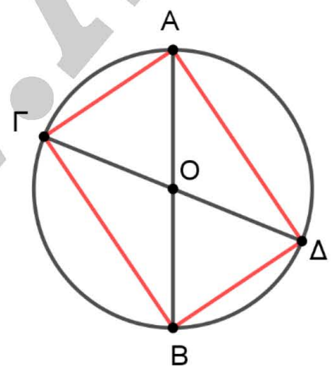
α) Φέρνουμε τις χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου.

Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν:

- ΟΑ = ΟΒ = ρ
- ΟΓ= ΟΔ= ρ
- $Α\hat{Ο}Γ= Β\hat{Ο}Δ$ ως κατακορυφήν.

Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ), οπότε έχουν και ΑΓ= ΒΔ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $Α\hat{Ο}Γ$ και $Β\hat{Ο}Δ$ αντίστοιχα.

β) Τα σημεία Α, Γ, Β και Δ ορίζουν το τετράπλευρο ΑΓΒΔ.



Επειδή ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ρ, οι διαγώνιοι ΑΒ και ΓΔ του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ διχοτομούνται και ως διάμετροι του κύκλου είναι ίσες. Άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

6

ΘΕΜΑ 2

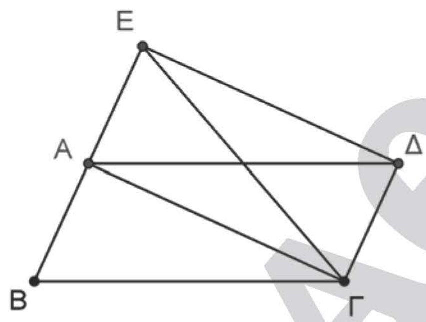
Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 9)

γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 8)



6 A

ΛΥΣΗ

α) Είναι ΑΒ = ΓΔ (1) και ΑΒ // ΓΔ (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Επίσης είναι ΑΕ = ΓΔ (3) και ΑΕ // ΓΔ (4) ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΓΔΕ.

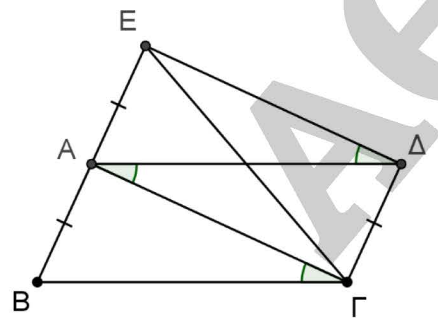
Από τις σχέσεις (2), (4) προκύπτει ότι ΑΒ // ΑΕ. Οπότε τα σημεία Β, Α και Ε είναι συνευθειακά και επειδή ΑΒ = ΑΕ, λόγω των (1), (3), το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ.

β) Είναι ΑΔ = ΒΓ (5) διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Επίσης είναι ΑΔ = ΓΕ (6) διότι οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες.

Άρα από τις σχέσεις (5), (6) προκύπτει ότι ΒΓ = ΓΕ, οπότε το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $B\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{A}\Delta$ (7), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ και $A\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{A}\Delta$ (8) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ. Άρα από τις σχέσεις (7), (8) προκύπτει ότι $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$.



7

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε τα μέσα Μ και Ν των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΔ=ΜΓ, (Μονάδες 12)

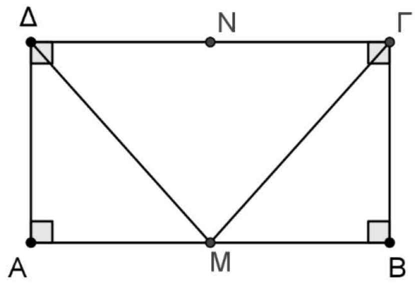
β) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Μ και Ν είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ.

(Μονάδες 13)

7 Α

ΛΥΣΗ

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma} = 90^0$, Μ και Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.



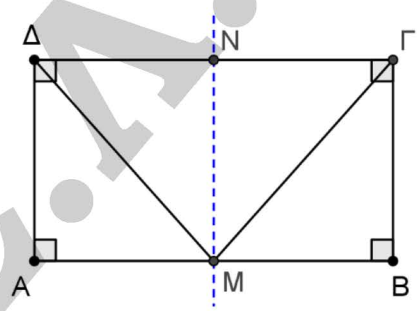
α) Φέρουμε τα τμήματα ΜΓ και ΜΔ.

Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΒΓ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου
- ΑΜ = ΜΒ, διότι το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΒΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι και οι υποτείνουσές τους είναι ίσες, δηλαδή ΜΔ = ΜΓ.

β) Έστω ΜΝ η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Μ,Ν.



Το τρίγωνο ΜΔΓ είναι ισοσκελές, αφού είναι ΜΔ = ΜΓ από το α) ερώτημα, στο οποίο τρίγωνο το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος. Άρα η ευθεία ΜΝ είναι μεσοκάθετος του ΓΔ.

8

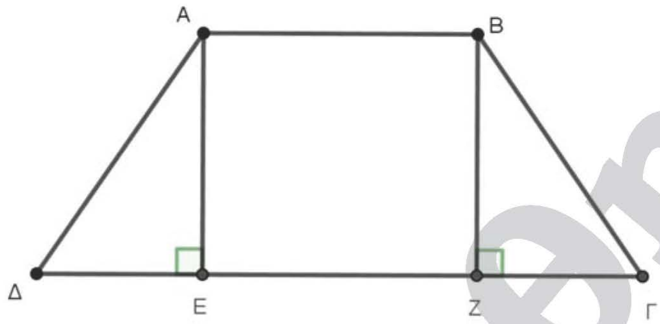
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Από τα σημεία Α και Β φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΑΕ και ΒΖ αντίστοιχα στη ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΕ = ΓΖ, (Μονάδες 12)

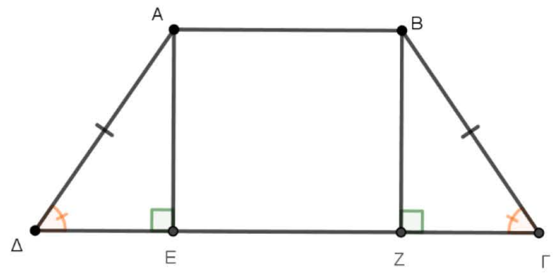
β) ΑΖ = ΒΕ. (Μονάδες 13)



8 Α

ΛΥΣΗ

α)

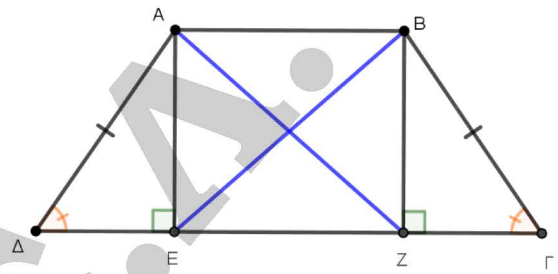


Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:

- $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma = 90^0$, αφού τα ΑΕ και ΒΖ είναι κάθετα τμήματα στη ΔΓ.
- ΑΔ = ΒΓ, ως οι ίσες μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$, ως γωνίες στη βάση ΔΓ του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Άρα, τα τρίγωνα είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν τις υποτείνουσές τους και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως, θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους $\Delta\hat{A}E$ και $Z\hat{B}\Gamma$ ίσες, οπότε και οι απέναντί τους κάθετες πλευρές θα είναι ίσες, δηλαδή ΔΕ = ΓΖ.

β) Φέρνουμε τα τμήματα ΑΖ και ΒΕ.



Αφού το ΑΕ είναι κάθετο τμήμα στη ΔΓ, τότε θα είναι κάθετο και στην παράλληλη της ΔΓ, την ΑΒ, οπότε θα είναι $E\hat{A}B = 90^o$. Άρα, το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ορθογώνιο γιατί έχει τρείς γωνίες ορθές ($E\hat{A}B = A\hat{E}Z = E\hat{Z}B = 90^0$). Επειδή τα ΑΖ και ΒΕ είναι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΑΕΖΒ θα ισχύει ότι ΑΖ = ΒΕ.

19
ΘΕΜΑ 4

Έστω ε_1, ε_2 δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2, να αποδείξετε ότι:

I. $OM = OM_1$ (Μονάδες 6)

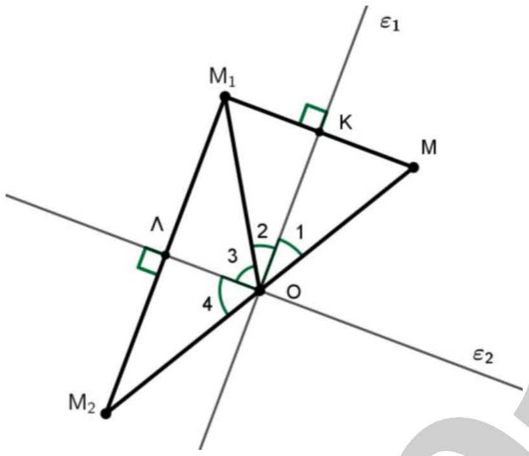
II. Τα σημεία Μ, Ο και M_2 είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

III. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

Β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

19 A

α) i. Επειδή το σημείο M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ε_1, η ε_1 είναι μεσοκάθετος του MM_1. Το O ανήκει στη μεσοκάθετο του MM_1, οπότε ισαπέχει από τα M και M_1, δηλαδή $OM = OM_1$.



ii. Στο ισοσκελές τρίγωνο OMM_1 η διάμεσος OK είναι και διχοτόμος, άρα $M\widehat{O}M_1 = 2\widehat{O}_2$.

Επειδή στο τρίγωνο M_1OM_2 η $OΛ$ είναι διάμεσος και ύψος το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα η $OΛ$ είναι και διχοτόμος και ισχύει $M_1\widehat{O}M_2 = 2\widehat{O}_3$.

Τότε: $M\widehat{O}M_2 = M\widehat{O}M_1 + M_1\widehat{O}M_2 = 2\widehat{O}_2 + 2\widehat{O}_3 = 2(\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3) = 2 \cdot 90^o = 180^o$.

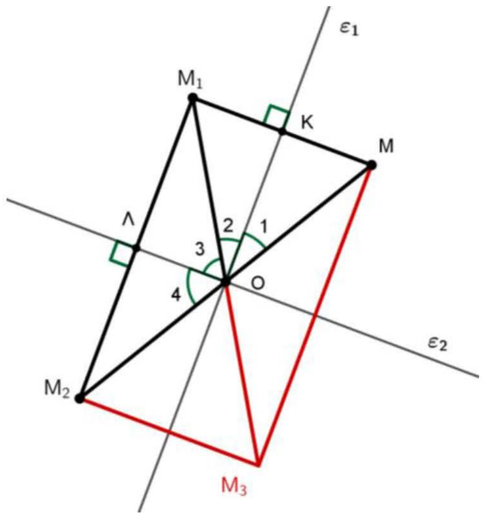
Αφού η γωνία $M\widehat{O}M_2$ είναι ευθεία γωνία, τα σημεία M, O και M_2 είναι συνευθειακά.

iii. Το τετράπλευρο $KM_1ΛO$ έχει 3 γωνίες ορθές, άρα είναι ορθογώνιο. Συνεπώς $K\widehat{M}_1Λ = 90^o$. Άρα το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο με $M\widehat{M}_1M_2 = 90^o$.

β) Όμοια με το ερώτημα (α) βρίσκουμε:

$OM_3 = OM_2$ οπότε $OM_3 = OM_1 = OM_2 = OM$ και τα σημεία M_1, O, M_3 είναι συνευθειακά.

Τελικά στο $MM_1M_2M_3$ οι διαγώνιοι MM_2 και M_1M_3 τέμνονται στο O, είναι ίσες και διχοτομούνται, οπότε το $MM_1M_2M_3$ είναι ορθογώνιο.



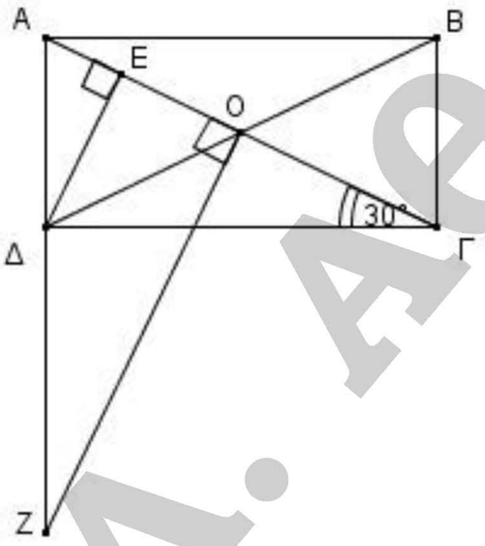
20

ΘΕΜΑ 4

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{\Delta\Gamma\mathrm{A}} = 30°$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε ΔΕ $\perp$ ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{\mathrm{A}\Delta\Gamma}$ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)

β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



20 A

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ οι οξείες γωνίες του $\Delta\widehat{A}\Gamma$ και $\Delta\widehat{\Gamma}A$ είναι συμπληρωματικές, οπότε αφού $\Delta\widehat{\Gamma}A = 30^o$, τότε $\Delta\widehat{A}\Gamma = 60^o$ (1). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΕ οι οξείες γωνίες του $\Delta\widehat{A}\Gamma$ και $A\widehat{\Delta}E$ είναι συμπληρωματικές, οπότε αφού $\Delta\widehat{A}\Gamma = 60^o$, τότε $A\widehat{\Delta}E = 30^o$ (2).

Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα

$O\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} = O\Delta$.

Επομένως το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΔΓ, οπότε $O\widehat{\Delta}\Gamma = O\widehat{\Gamma}\Delta = 30^o$ (3).

Ισχύει ακόμη ότι: $A\widehat{\Delta}E + E\widehat{\Delta}O + O\widehat{\Delta}\Gamma = 90^o$. Δηλαδή $30^o + E\widehat{\Delta}O + 30^o = 90^o$.

Άρα $E\widehat{\Delta}O = 30^o$ (4).

Από τις (2), (3) και (4) έχουμε ότι $A\widehat{\Delta}E = E\widehat{\Delta}O = O\widehat{\Delta}\Gamma = 30^o$.

Άρα η γωνία $A\widehat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τις ΔΕ και ΔΒ σε τρείς ίσες γωνίες.

β) Το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές με ΟΑ=ΟΔ ως μισά των ίσων διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Αφού $\Delta\widehat{A}\Gamma = 60^o$ από(1) θα είναι $\Delta\widehat{A}E = 60^o$. Άρα το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισόπλευρο με ΟΑ = ΟΔ = ΑΔ. Όμως ΑΔ=ΒΓ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου. Άρα τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ έχουν:

- $\widehat{O} = \widehat{B} = 90^o$ ($ZO \perp A\Gamma$ στο σημείο Ο)
- ΟΑ = ΒΓ
- $A\widehat{\Gamma}B = 90^o - 30^o = 60^o = Z\widehat{A}O$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με μία κάθετη πλευρά ίση και την προσκείμενη οξεία γωνία ίση.