Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

4

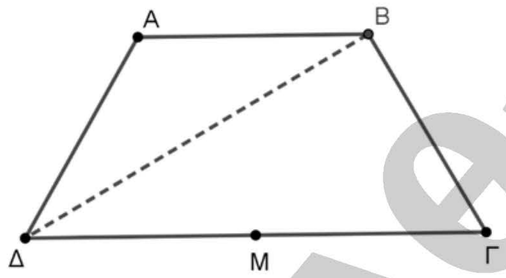
ΘΕΜΑ 2

Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε ΑΒ=ΑΔ=$\frac{ΓΔ}{2}$, $\hat{Δ} = 60^\circ$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) η διαγώνιος ΔΒ του τραπεζίου είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$, (Μονάδες 9)

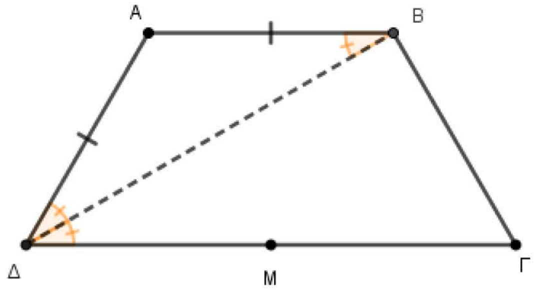
β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 16)



4 A

ΛΥΣΗ

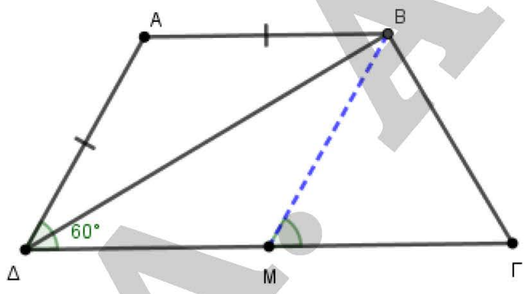
α)



Είναι $\Gamma\widehat{\Delta}B = A\widehat{B}\Delta$ (1) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ με τέμνουσα την ΒΔ. Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΔ, άρα $A\widehat{\Delta}B = A\widehat{B}\Delta$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $A\widehat{\Delta}B = \Gamma\widehat{\Delta}B$, άρα η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.

β) Φέρνουμε το τμήμα ΒΜ.



Επειδή ΑΒ // ΔΓ ως βάσεις του τραπεζίου ΑΒΓΔ, θα είναι ΑΒ // ΔΜ.

Αφού είναι ΑΒ = $\frac{\Gamma\Delta}{2}$ και το Μ είναι μέσο του ΔΓ από την υπόθεση, άρα ΑΒ =ΔΜ. Οπότε, το τετράπλευρο ΑΔΜΒ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΜ παράλληλες και ίσες άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ από την υπόθεση άρα το παραλληλόγραμμο ΑΔΜΒ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

Αφού το ΑΔΜΒ είναι ρόμβος, τότε οι πλευρές του θα είναι ίσες, οπότε και ΒΜ = ΔΜ. Και αφού ΔΜ = ΜΓ γιατί Μ είναι μέσο του ΔΒ, τότε θα είναι ΒΜ = ΜΓ. Οπότε το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.

Αφού $\widehat{\Delta} = 60^o$ τότε και $B\widehat{M}\Gamma = \widehat{\Delta} = 60^o$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ και ΒΜ με τέμνουσα την ΔΓ.

Επειδή το ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΓ έχει τη γωνία της κορυφής του ίση με 60^o θα είναι ισόπλευρο.

5

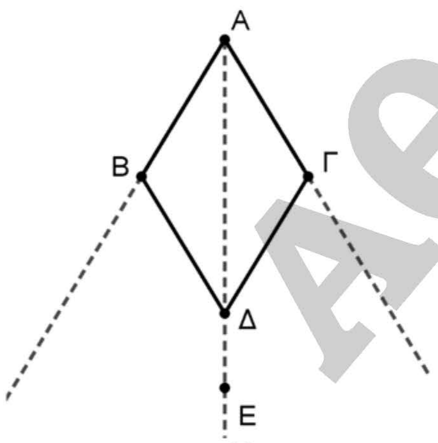
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου του ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα). (Μονάδες 10)

β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ. (Μονάδες 15)

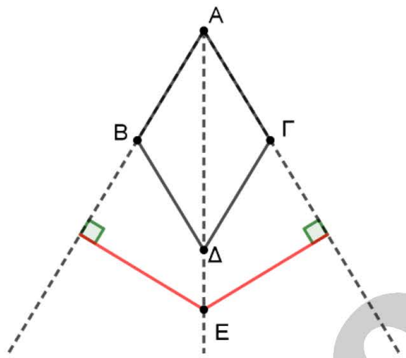


5 Α

ΛΥΣΗ

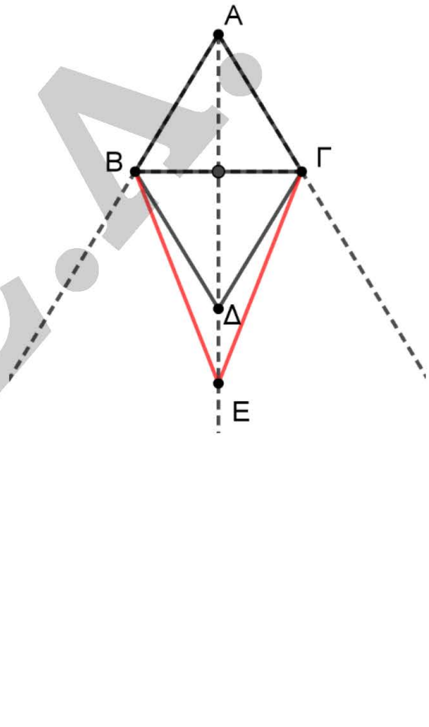
α) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνία του $\widehat{A}$.

Επειδή το Ε είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{A}$, θα ισαπέχει από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ της γωνίας.



β) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται, άρα η ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

Επειδή το Ε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ, ισαπέχει από τα Β και Γ.



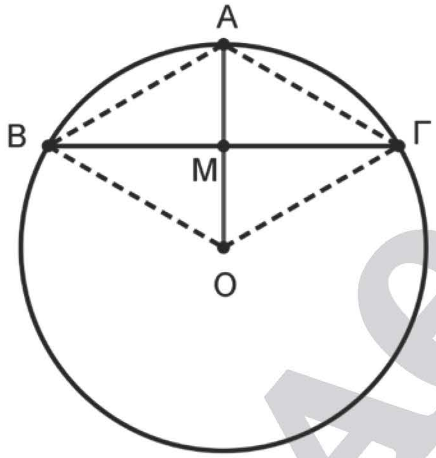
6

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε ακτίνα ΟΑ και χορδή ΒΓ κάθετη στο μέσο της Μ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ. (Μονάδες 15)



6 Α

ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΒΓ ⊥ ΟΑ, οπότε και ΒΓ ⊥ ΟΜ, τότε το ΟΜ είναι απόστημα της χορδής ΒΓ, άρα το Μ είναι μέσο της.

Από υπόθεση το Μ είναι μέσο και της ΟΑ, οπότε τα τμήματα ΟΑ και ΒΓ του ΑΓΟΒ διχοτομούνται. Άρα το ΑΓΟΒ είναι παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοί του ΟΑ, ΒΓ διχοτομούνται.

Επιπλέον ΟΑ⊥ ΒΓ**,** δηλαδή οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΓΟΒ είναι κάθετες. Άρα το ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.

β) Στο τρίγωνο ΒΟΑ το τμήμα ΒΜ είναι ύψος (ΒΓ ⊥ ΟΑ από δεδομένα) και διάμεσος (ΒΓ ⊥ ΟΑ και Μ μέσο ΟΑ από δεδομένα), άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΒΟ = ΒΑ.

Τότε ΟΑ = ΒΟ = ΒΑ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΒΟΑ είναι ισόπλευρο και επομένως:

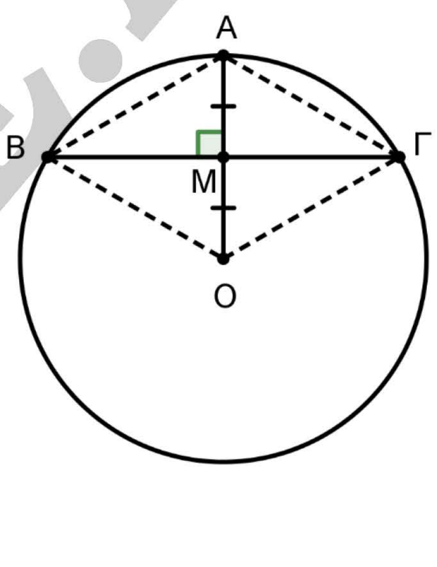
$$B\hat{O}A = B\hat{A}O = O\hat{B}A = 60^o$$

Όμοια, το ΓΜ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΟΓΑ, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΟΑ = ΟΓ= ρ.

Τότε όμως ΟΑ = ΟΓ = ΓΑ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΓΟΑ είναι ισόπλευρο και επομένως:

$$\Gamma\hat{O}A = \Gamma\hat{A}O = O\hat{\Gamma}A = 60^o$$

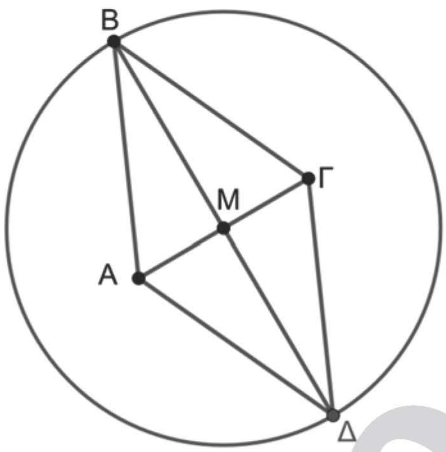
Είναι $B\hat{O}\Gamma = 60^o + 60^o = 120^o = B\hat{A}\Gamma$, επειδή $B\hat{O}\Gamma = B\hat{A}\Gamma$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΓΟΒ.



12

ΘΕΜΑ 4

α) Στο σχήμα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο Μ. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)



β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.

Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

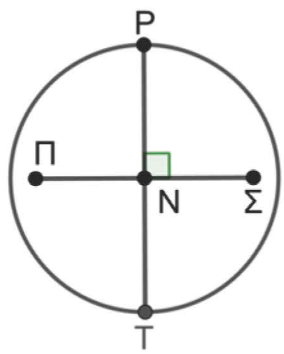
Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

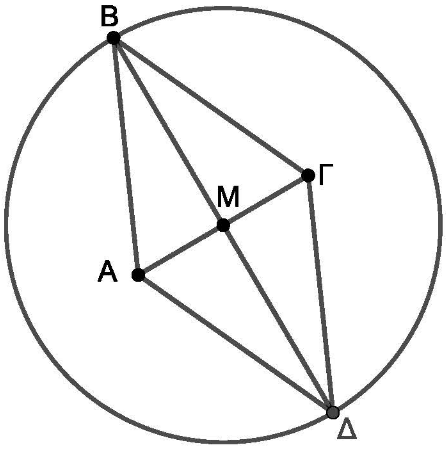
(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΤ και ΠΣ τέμνονται κάθετα στο Ν και ΠΝ = ΝΣ. Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Ν.

Να αποδείξετε ότι ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ. (Μονάδες 7)



12 Α



α) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ από την υπόθεση, άρα ισχύει ΑΜ = ΜΓ.

Επιπλέον ΒΜ = ΜΔ, γιατί από την υπόθεση το Μ είναι κέντρο του κύκλου με διάμετρο ΒΔ. Επομένως, οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται. Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

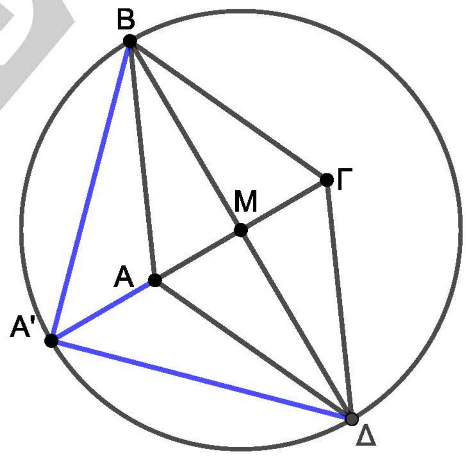
Ακόμα οι ΒΔ και ΑΓ είναι κάθετες, γιατί η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ από την υπόθεση.

Εφόσον οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι κάθετες το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

β) Η Πρόταση 1 έχει αποδειχθεί στο ερώτημα α), άρα είναι αληθής.

Η Πρόταση 2 είναι ψευδής.

Στο παραπάνω σχήμα προεκτείνουμε την ΑΓ προς το μέρος του Α κατά ΑΑ΄, ώστε το Α΄ να είναι σημείο του κύκλου.



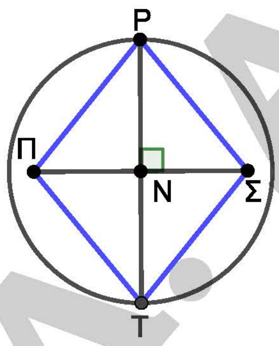
Το τετράπλευρο Α΄ΒΓΔ πληροί τις υποθέσεις της Πρότασης 2. Ωστόσο δεν είναι παραλληλόγραμμο καθώς οι διαγώνιοι του Α΄Γ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται στο Μ δε διχοτομούνται, γιατί Α΄Μ>ΜΓ (η Α΄Μ είναι διάμετρος του κύκλου, ενώ το Γ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου). Αν ήταν παραλληλόγραμμο, τότε οι διαγώνιοί του θα διχοτομούνταν. Επομένως, εφόσον δεν είναι παραλληλόγραμμο, τότε δεν είναι και ρόμβος.

γ) Σχεδιάζουμε το τετράπλευρο ΠΡΣΤ.

Η διαγώνιος του ΡΤ είναι μεσοκάθετος της ΠΣ, εφόσον είναι κάθετες και ΠΝ = ΝΣ, από την υπόθεση.

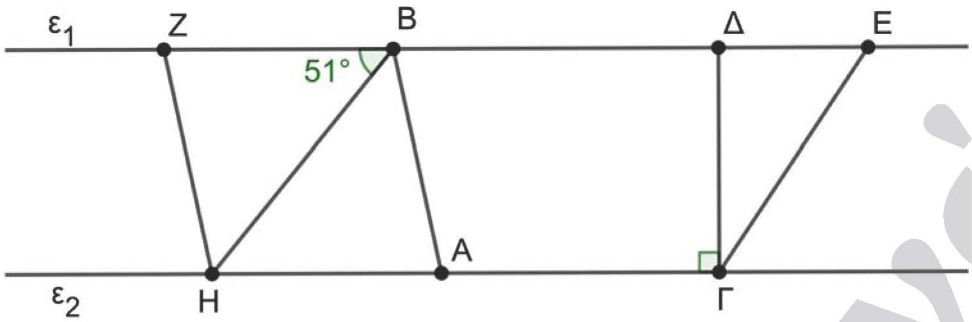
Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου που έχει ως κέντρο το Ν, σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου.

Άρα από την Πρόταση 1 (του ερωτήματος β)) που αποδείχθηκε στο α) το ΠΡΣΤ είναι ρόμβος. Συνεπώς έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Δηλαδή ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ.



13

ΘΕΜΑ 2



Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι ρόμβος.

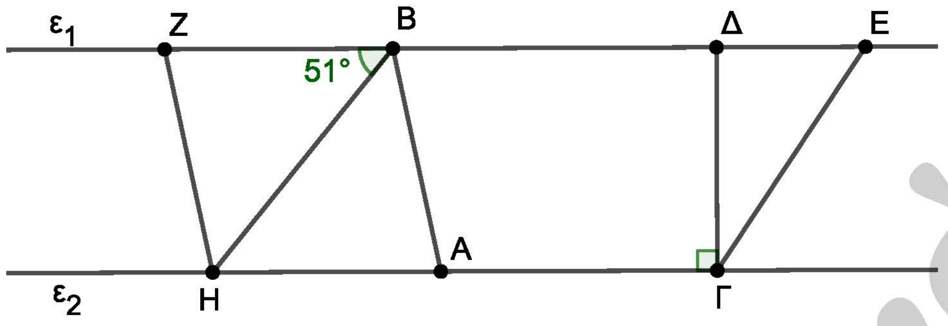
Επίσης δίνεται ότι $Z\hat{B}H = 51^o$ και ότι η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}H$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{H}B$. (Μονάδες 6)

γ) Αν η γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΓΔΕ είναι ίση με 56°, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 10)

13 A



α) Εφόσον το ΑΒΖΗ είναι ρόμβος η διαγώνιός του ΒΗ διχοτομεί τη γωνία του $A\hat{B}Z$.

Επομένως $A\hat{B}H = Z\hat{B}H = 51^o$.

β) Οι $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες, γιατί οι ΒΖ και ΑΗ είναι παράλληλες, ως απέναντι πλευρές ρόμβου. Άρα οι $Z\hat{B}H$ και $A\hat{H}B$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ε_1$ και $ε_2$ με τέμνουσα την ΒΗ. Άρα $A\hat{H}B = 51^o$.

γ) Η ΓΔ τέμνει κάθετα την $ε_2$ από την υπόθεση (εφόσον η γωνία $A\hat{Γ}Δ$ είναι ορθή), συνεπώς τέμνει κάθετα και την $ε_1$ που είναι παράλληλη της $ε_2$.

Άρα η γωνία $Γ\hat{Δ}E$ είναι ορθή και το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο. Άρα οι οξείες γωνίες του $\hat{Γ}$ και $\hat{E}$ είναι συμπληρωματικές. Επομένως $\hat{Γ} = 90^o - \hat{E} = 90^o - 56^o = 34^o$.

14

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα το Μ είναι μέσο των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Επίσης $A\widehat{M}B = \Gamma\widehat{M}B$.

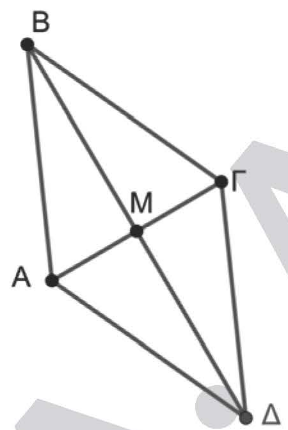
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες. (Μονάδες 10)

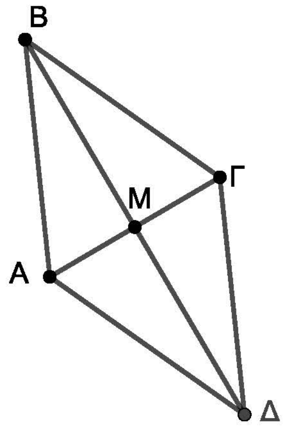
ii. Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το ΑΒΓΔ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;

(Μονάδες 7)



14 Α



α) i. Οι γωνίες $A\widehat{M}B$ και $\Gamma\widehat{M}B$ είναι παραπληρωματικές. Όμως σύμφωνα με την υπόθεση είναι και ίσες. Άρα η κάθε μια είναι ορθή γωνία, δηλαδή $A\widehat{M}B = \Gamma\widehat{M}B = 90^o$. Επομένως οι ΒΔ και ΑΓ είναι κάθετες.

ii. Το Μ είναι μέσο των διαγωνίων του ΑΒΓΔ, άρα οι διαγώνιές του διχοτομούνται. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον από το ερώτημα αi) οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, γιατί είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες.

β) Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος επομένως θα έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Άρα κάθε πλευρά του κήπου χρειάζεται 7,5 μέτρα φράχτη. Συνεπώς, αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ χωρίς φράχτη, θα χρειαστούμε 30 – 7,5 = 22, 5 μέτρα φράχτη.