Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

1

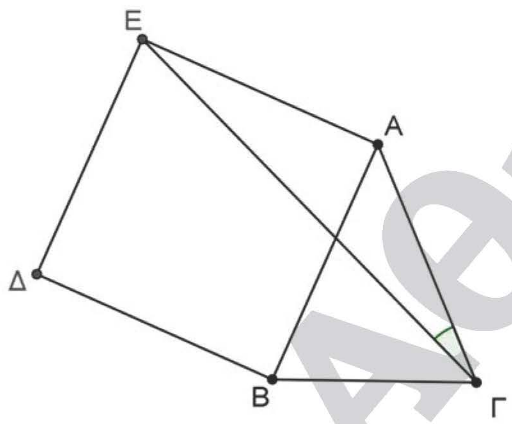
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 10)

β) $2 \cdot \hat{\text{ΕΓΑ}} = 90^{\circ} - \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$. (Μονάδες 15)



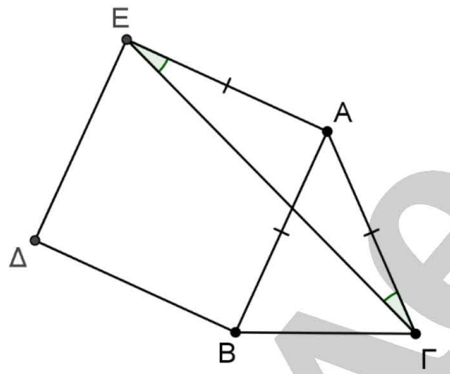
1 Α

ΛΥΣΗ

α) Είναι ΑΒ = ΑΕ ως πλευρές τετραγώνου και ΑΒ = ΑΓ από υπόθεση. Άρα ΑΕ = ΑΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $A\hat{E}\Gamma = E\hat{\Gamma}A$ ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ΕΓ.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΓ ισχύει ότι $E\hat{A}\Gamma + A\hat{E}\Gamma + E\hat{\Gamma}A = 180^\circ$ και επειδή $A\hat{E}\Gamma = E\hat{\Gamma}A$ τότε θα ισχύει $2E\hat{\Gamma}A + E\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma = 180^\circ$ ή $2E\hat{\Gamma}A + 90^\circ + B\hat{A}\Gamma = 180^\circ$, άρα $2E\hat{\Gamma}A = 90^\circ - B\hat{A}\Gamma$.



2

ΘΕΜΑ 2

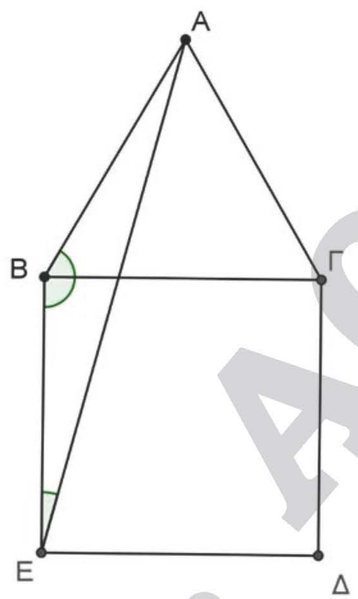
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες :

i. $A\widehat{B}E$ (Μονάδες 8)

ii. $B\widehat{E}A$ (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



2 Α

ΛΥΣΗ

α) i. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο είναι $A\hat{B}\Gamma = 60^o$.

Επίσης είναι $E\hat{B}\Gamma = 90^o$ διότι το ΒΓΔΕ είναι τετράγωνο.

Τότε $A\hat{B}E = A\hat{B}\Gamma + E\hat{B}\Gamma = 60^o + 90^o = 150^o$

ii. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο θα είναι ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ και επειδή το ΒΓΔΕ είναι τετράγωνο θα είναι ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΒΕ. Επομένως ΑΒ = ΒΕ, άρα το τρίγωνο ΒΕΑ είναι ισοσκελές και $B\hat{E}A = B\hat{A}E$.

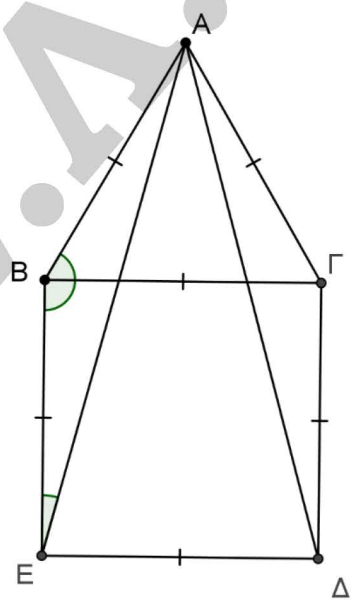
Για τις γωνίες του τριγώνου ΒΕΑ ισχύει ότι $B\hat{E}A + B\hat{A}E + A\hat{B}E = 180^o$ και επειδή $B\hat{E}A = B\hat{A}E$ θα έχουμε ότι $2B\hat{E}A + 150^o = 180^o$ ή $2B\hat{E}A = 30^o$, άρα $B\hat{E}A = 15^o$.

β) Φέρνουμε το τμήμα ΑΔ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ
- ΒΕ = ΓΔ, ως πλευρές του τετραγώνου ΒΓΔΕ
- $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}\Delta = 60^o + 90^o = 150^o = A\hat{B}E$ αφού $A\hat{B}E = 150^o$ από το α) i. ερώτημα.

Οπότε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ), άρα είναι ίσα, οπότε ΑΔ = ΑΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{\Gamma}\Delta$ και $A\hat{B}E$ αντίστοιχα.



3

ΘΕΜΑ 4

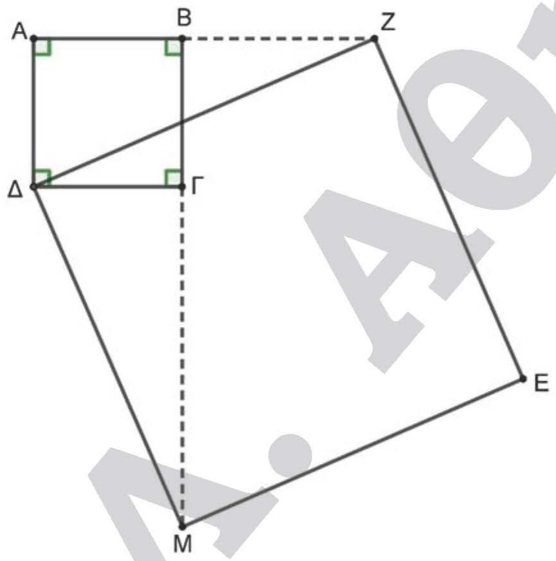
Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΖ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΖ. Θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα και οι γωνίες $A\hat{\Delta}Z$ και $\Gamma\hat{\Delta}M$ είναι ίσες, (Μονάδες 9)

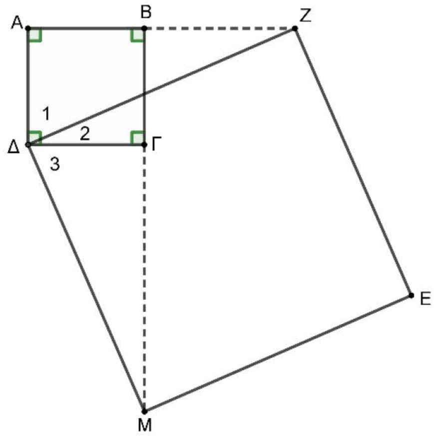
β) το τετράπλευρο ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο, (Μονάδες 9)

γ) οι γωνίες $B\hat{Z}E$ και $E\hat{M}B$ είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 7)



3 Α

ΛΥΣΗ



α) Για τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ έχουμε:

- ΑΔ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- ΑΖ = ΓΜ, από τα δεδομένα

Άρα έχουν μία προς μία ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε είναι ίσα.

Αν $A\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_1$ και $\Gamma\hat{\Delta}M = \hat{\Delta}_3$, τότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3$ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΓΜ των ίσων τριγώνων ΑΔΖ και ΓΔΜ.

β) Από την υπόθεση έχουμε ότι το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο.

Για να είναι το ΔΜΕΖ τετράγωνο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Είναι $M\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3$, όμως $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3$ από α) ερώτημα, οπότε $M\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_1 = A\hat{\Delta}\Gamma = 90°$. Συνεπώς το παραλληλόγραμμο ΔΜΕΖ είναι και ορθογώνιο διότι έχει μία ορθή γωνία.

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα (ερώτημα α), θα έχουν και τις υποτείνουσες αντίστοιχα ίσες, δηλαδή ΔΖ = ΔΜ. Άρα το ορθογώνιο ΔΜΕΖ είναι και ρόμβος, διότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. Συνεπώς το ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο.

γ) Από το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουμε $A\hat{B}\Gamma = 90°$ άρα και $M\hat{B}Z = 90°$ ως παραπληρωματική της.

Από το τετράγωνο ΔΜΕΖ έχουμε $Z\hat{E}M = 90°$. Άρα $M\hat{B}Z + Z\hat{E}M = 90° + 90° = 180°$.

Για τις γωνίες του τετραπλεύρου ΒΖΕΜ ισχύει ότι:

$B\hat{Z}E + Z\hat{E}M + E\hat{M}B + M\hat{B}Z = 360^0$ ή $B\hat{Z}E + E\hat{M}B + 180^0 = 360^0$ ή $B\hat{Z}E + E\hat{M}B = 360^0 - 180^0 = 180^0$

Άρα οι γωνίες $B\hat{Z}E$ και $E\hat{M}B$ είναι παραπληρωματικές.

4

ΘΕΜΑ 2

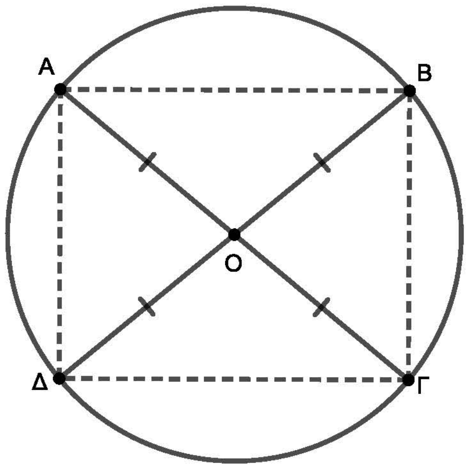
Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Τί είδους γωνία σχηματίζουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

4 A

α)



Αν ρ η ακτίνα του κύκλου τότε: ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ρ. Οπότε οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται και είναι ίσες αφού ΑΓ = ΒΔ = 2ρ, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε οι διαγώνιοί του είναι επιπλέον κάθετες μεταξύ τους. Άρα οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ σχηματίζουν ορθή γωνία.

5

ΘΕΜΑ 4

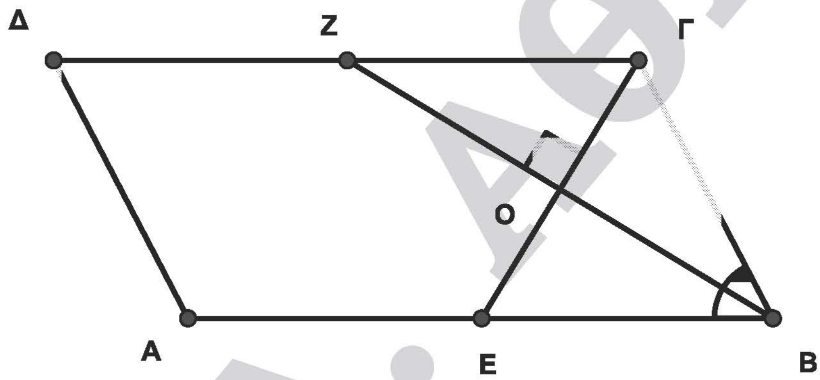
Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος και η ΒΖ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$. Φέρουμε ΓΟ κάθετη στη ΒΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

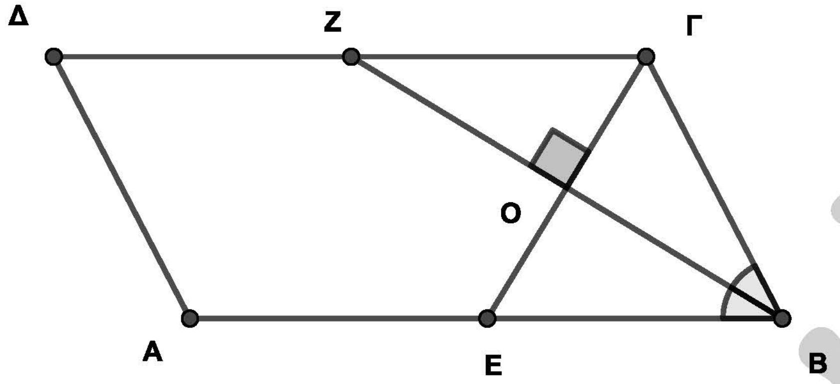
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος (Μονάδες 6)

δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$ ώστε το τετράπλευρο ΕΒΓΖ να είναι τετράγωνο; (Μονάδες 4)



5 Α



α) Έχουμε ΒΖ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$ και ΒΟ ⊥ ΓΕ από υπόθεση. Συνεπώς το τμήμα ΒΟ στο τρίγωνο ΕΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΓ.

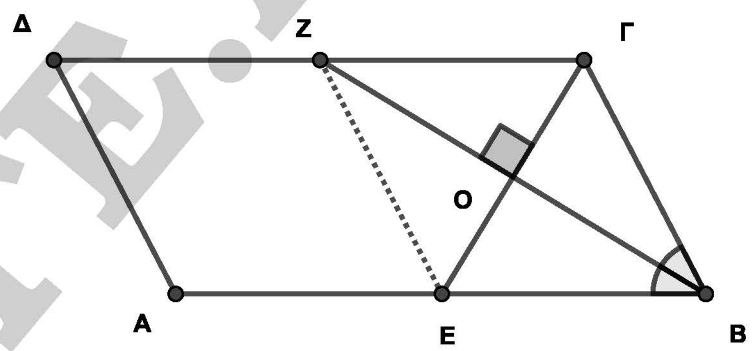
β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ τα οποία έχουν:

i. $\Gamma\widehat{O}Z=E\widehat{O}B=90^{o}$

ii. ΟΓ=ΟΕ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ)

iii. $Z\widehat{\Gamma}O=B\widehat{E}O$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΕ, ΓΖ που τέμνονται από την ΓΕ)

Τα τρίγωνα ΟΖΓ, ΟΒΕ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.



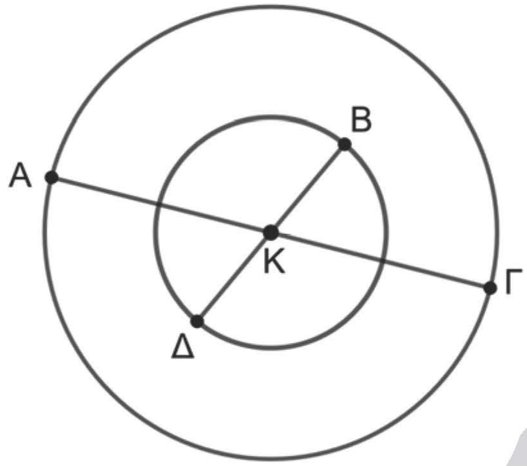
γ) Από τη σύγκριση στο ερώτημα β) έχουμε ΟΖ=ΟΒ ως πλευρές των ίσων τριγώνων ΖΟΓ και ΒΟΕ απέναντι από τις ίσες γωνίες $Z\widehat{\Gamma}O$ και $B\widehat{E}O$ και ΟΓ=ΟΕ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ). Το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι ΓΕ και ΒΖ διχοτομούνται στο σημείο Ο και επειδή είναι και κάθετες από υπόθεση (ΒΖ ⊥ ΓΕ) είναι ρόμβος.

δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ τετράγωνο θα πρέπει να είναι εκτός από ρόμβος (ερώτημα γ)) και ορθογώνιο άρα θα πρέπει $\widehat{B}=90^{o}$.

6

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.



α) Αν ισχύει ΑΓ>ΒΔ:

i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

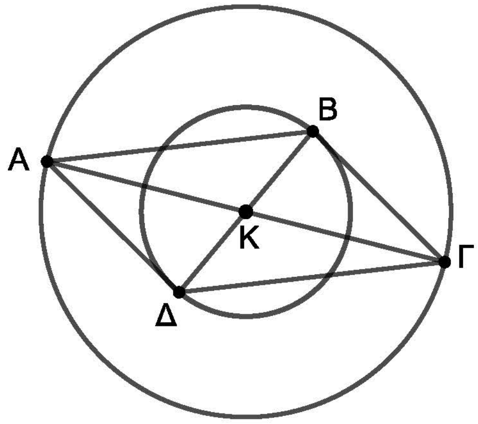
β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:

«Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

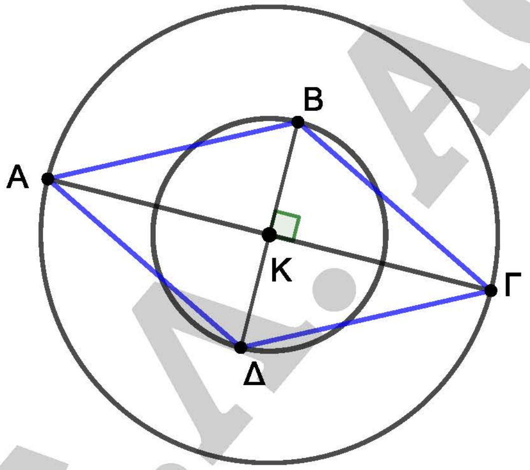
(Μονάδες 8)

6 Α



α) i. Ισχύει ότι ΒΚ = ΚΔ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου (Κ, ΚΒ). Ομοίως ΑΚ = ΚΓ στον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ΑΓ.

Άρα οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.



ii. Αν οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες τότε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κάθετες διαγωνίους. Συνεπώς είναι ρόμβος. Άρα η επιπλέον υπόθεση είναι ότι «οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες».