

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

7

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ = ΑΒ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα ΔΖ = ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

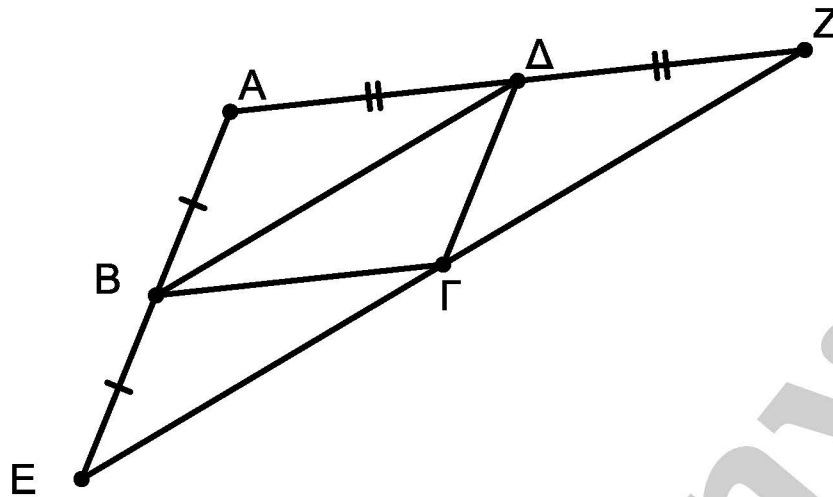
- i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)
- ii. Τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε $ΚΛ \parallel ΔΒ$ και $ΚΛ = \frac{3}{2} ΔΒ$.

(Μονάδες 9)

7 A

ΛΥΣΗ



α) i. Είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = BE$ οπότε $BE \parallel \Gamma\Delta$.

Στο τετράπλευρο $B\Delta\Gamma E$ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

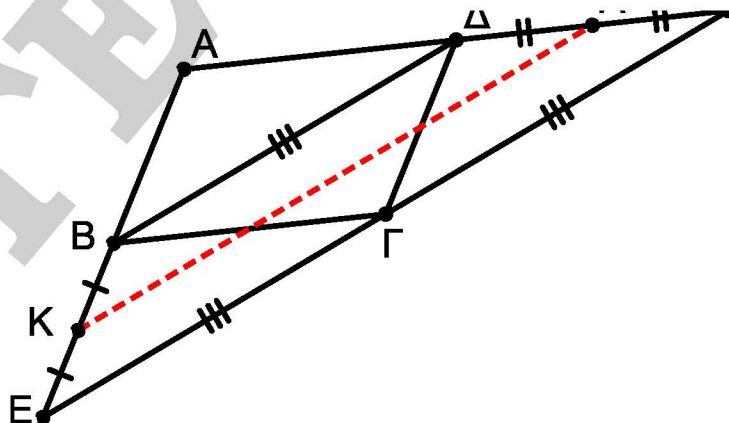
Όμοια, $A\Delta \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = \Delta Z$ οπότε $\Delta Z \parallel \Gamma\Delta$.

Επομένως το τετράπλευρο $B\Delta Z\Gamma$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Επειδή το $B\Delta\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι $E\Gamma \parallel B\Delta$ (1).

Όμοια, το $B\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\Gamma Z \parallel B\Delta$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $E\Gamma \parallel \Gamma Z$, άρα τα σημεία E, Γ, Z είναι συνευθειακά.



β) Επειδή $B\Delta \parallel EZ$, και οι EB και $Z\Delta$ τέμνονται στο A , το τετράπλευρο $B\Delta ZE$ είναι τραπέζιο.

Η $K\Lambda$ είναι διάμεσος του τραpezίου, άρα $K\Lambda \parallel \Delta B$ και ισχύει ότι:

$$K\Lambda = \frac{\Delta B + EZ}{2} = \frac{\Delta B + E\Gamma + \Gamma Z}{2} = \frac{\Delta B + \Delta B + \Delta B}{2} = \frac{3\Delta B}{2}$$

12

ΘΕΜΑ 4

Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ έτσι ώστε $AB = 2 \cdot B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Αν H είναι το μέσο του $A\Delta$ και η ευθεία ΔE τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Z να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

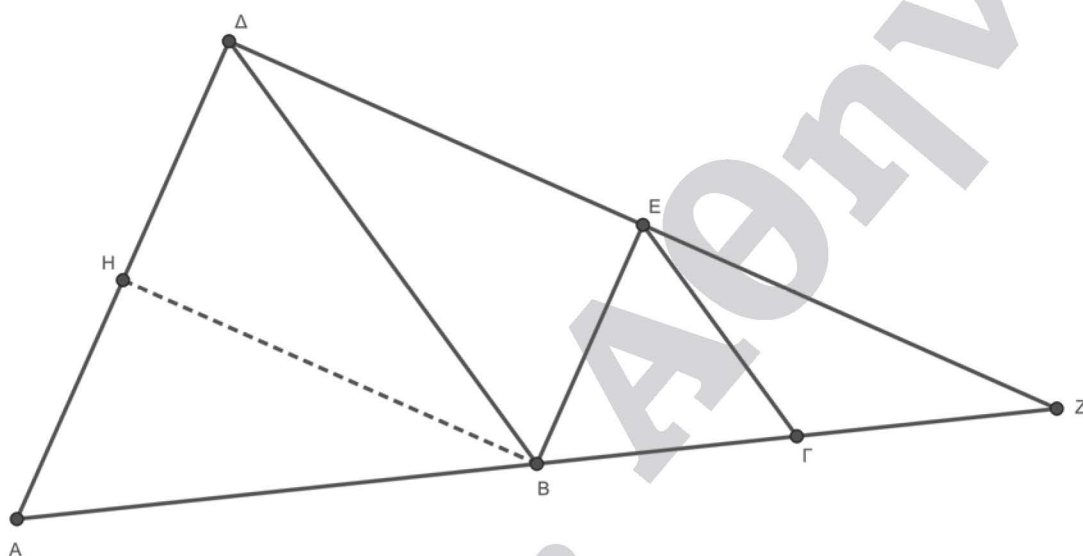
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

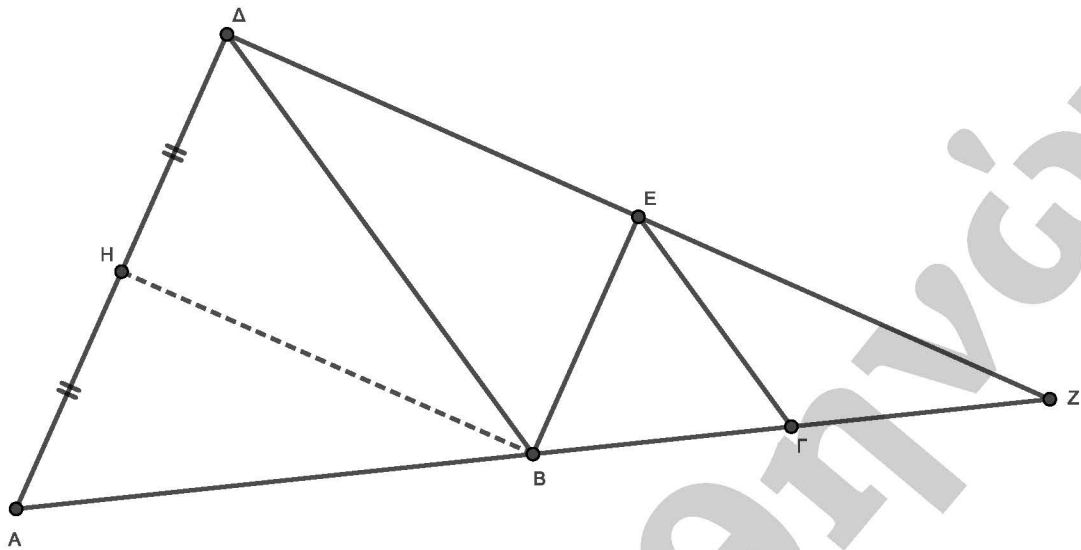
γ) Το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 9)



12 Α

ΛΥΣΗ



α) Επειδή τα τρίγωνα ABD και BGE είναι ισοπλευρά, ισχύει ότι $\widehat{DAB} = \widehat{EBG} = 60^\circ$. Άρα οι ευθείες AD και BE , που τέμνονται από την AZ έχουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες. Συνεπώς είναι παράλληλες. Άρα $DH \parallel BE$.

Επίσης, $DH = \frac{AD}{2}$, επειδή το H είναι μέσο του AD από την υπόθεση.

Όμως $AD = AB$, ως πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου ABD . Άρα, $DH = \frac{AB}{2}$.

Αλλά από την υπόθεση έχουμε και ότι $BG = \frac{AB}{2}$. Άρα, $DH = BG$.

Όμως $BE = BG$, ως πλευρές του ισοπλεύρου BGE . Άρα, $DH = BE$.

Τελικά το τετράπλευρο $BHDE$ έχει $DH \parallel BE$ και $DH = BE$, δηλαδή δύο πλευρές παράλληλες και ίσες. Επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον, στο ισοπλευρο τρίγωνο ABD το BH είναι διάμεσος, άρα και ύψος, οπότε η γωνία $B\hat{H}D$ είναι ορθή. Άρα, το παραλληλόγραμμο $BHDE$ έχει μία ορθή γωνία, επομένως είναι ορθογώνιο.

β) Λόγω του ορθογωνίου $BHDE$ είναι $BH \parallel DE$. Άρα, στο τρίγωνο ADZ , η HB διέρχεται από το μέσο H της πλευράς AD και είναι παράλληλη στην DZ . Επομένως, θα διέρχεται από το μέσο της AZ , άρα το B είναι μέσο της AZ .

Άρα, $AB = BZ$.

Όμως $AB = 2BG$ από την υπόθεση, άρα $BZ = 2BG$, δηλαδή το G είναι μέσο της BZ .

Επομένως $BG = GZ$.

Όμως από το ισόπλευρο τρίγωνο $BΓE$ είναι $BΓ = ΓE$. Άρα $ΓE = ΓZ$, δηλαδή το $ΓZE$ είναι ισοσκελές.

γ) Προκύπτει ότι το E είναι μέσο της $ΔZ$: Πράγματι, στο τρίγωνο $ΑΔZ$, το BE διέρχεται από το μέσο B της AZ και είναι παράλληλο στην $ΑΔ$. Άρα, θα διέρχεται από το μέσο της $ΔZ$.

Παραμένοντας στο τρίγωνο $ΑΔZ$, ισχύει ότι τα H και E είναι μέσα των πλευρών $ΑΔ$ και $ΔZ$, αντίστοιχα. Άρα, η EH είναι παράλληλη στην AZ (ή αλλιώς στην $AΓ$).

Επίσης, $H\hat{A}B = E\hat{Γ}B = 60^\circ$, λόγω των ισοπλεύρων τριγώνων $ΑΒΔ$ και $BΓE$.

Άρα:

- Εφόσον $H\hat{A}B + E\hat{Γ}B < 180^\circ$, οι ευθείες AH και $ΓE$ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που χωρίζεται από το AZ και προς το μέρος του $Δ$ και άρα δεν είναι παράλληλες. Αυτό σημαίνει ότι λόγω της παραλληλίας των EH και $AΓ$ το $HEΓA$ είναι τραπέζιο.
- Επειδή οι γωνίες της βάσης του $HEΓA$ είναι ίσες, αυτό είναι ισοσκελές τραπέζιο.

13

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

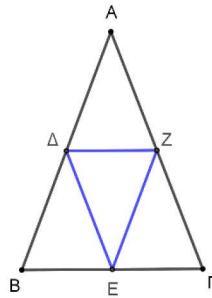
i. ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 9)

13 A

ΛΥΣΗ

α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, A\Gamma$ αντίστοιχα.



Το ΔE ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$ (1)

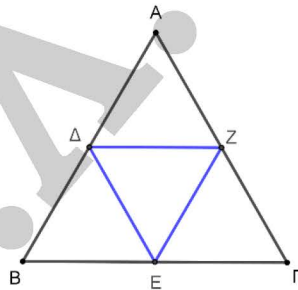
Το EZ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $EZ = \frac{AB}{2}$ (2)

Επειδή $AB=A\Gamma$ από (1) και (2) προκύπτει ότι $\Delta E=EZ$, δηλαδή το τρίγωνο ΔEZ είναι ισοσκελές.

β)

- ι. **Πρόταση:** «Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοπλεύρου τριγώνου είναι ισόπλευρο».

Έστω ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = B\Gamma = A\Gamma$ και Δ, E, Z τα μέσα των ίσων πλευρών του $AB, B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.



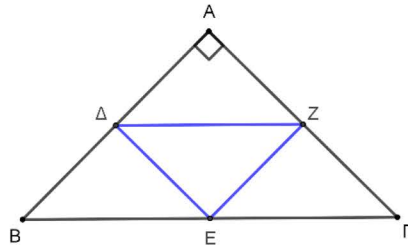
Όπως στο α) ερώτημα, για τους ίδιους λόγους θα ισχύει $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$ (1) και $EZ = \frac{AB}{2}$ (2).

Επειδή το ΔZ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, ισχύει ότι $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{2}$ (3)

Επειδή $AB=B\Gamma=A\Gamma$ από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\Delta E=EZ=\Delta Z$, οπότε το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.

- ii. **Πρόταση:** «Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι ορθογώνιο και ισοσκελές».

Έστω ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = A\Gamma$ και Δ, E , και Z τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.



Επειδή $DE \parallel \Lambda\Gamma$, $ZE \parallel AB$ (ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα 2 πλευρών ενός τριγώνου) και $AB \perp \Lambda\Gamma$ θα είναι και $DE \perp ZE$, άρα το τρίγωνο ΔEZ είναι ορθογώνιο με $\hat{E} = 90^\circ$.

Όπως στο α) ερώτημα, για τους ίδιους λόγους θα ισχύει $E\Delta = \frac{\Lambda\Gamma}{2}$ και $EZ = \frac{AB}{2}$ και επειδή είναι $AB = \Lambda\Gamma$, θα είναι $E\Delta = EZ$.

Άρα το τρίγωνο ΔEZ είναι και ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνα $AB\Delta$ με $AB = B\Delta = 5$ και $A\Gamma E$ με $A\Gamma = \Gamma E = 5$ έτσι ώστε τα σημεία Δ , B , Γ και E να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους BK και $\Gamma\Lambda$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

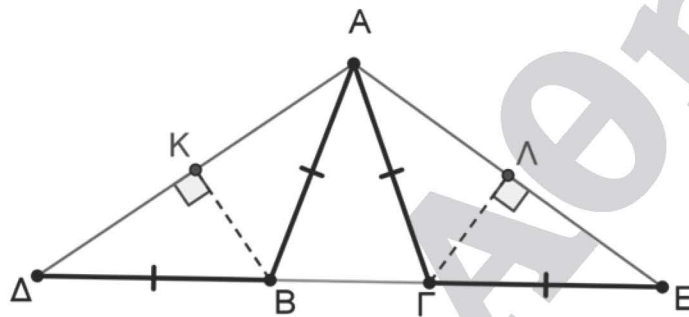
- i. τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ισοσκελή,
- ii. τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και AE αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 8)

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα $K\Lambda$.

(Μονάδες 9)



17 A

ΛΥΣΗ

α)

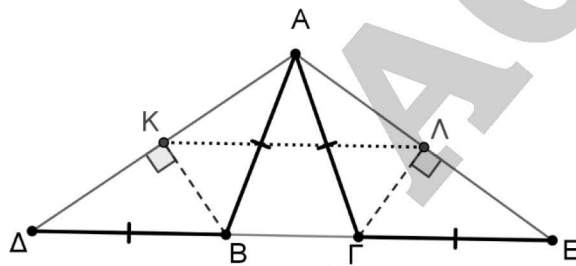
- i. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ισοσκελή, γιατί είναι $AB = B\Delta$ και $A\Gamma = \Gamma E$, αντίστοιχα
ii. Το BK είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Delta$ που αντιστοιχεί στη βάση του $A\Delta$, άρα είναι και διάμεσος του τριγώνου, οπότε το K είναι μέσο του $A\Delta$.

Όμοια, το $\Gamma\Lambda$ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $A\Gamma E$ που αντιστοιχεί στη βάση του $A\Gamma$, άρα είναι και διάμεσός του, συνεπώς το Λ είναι μέσο του $A\Gamma$.

β) Είναι $AB + A\Gamma + B\Gamma = 12$. Όμως ισχύει $AB = B\Delta = A\Gamma = \Gamma E$, άρα $B\Delta + \Gamma E + B\Gamma = 12$.

Το τμήμα $K\Lambda$ ενώνει τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα του τριγώνου $A\Delta E$, άρα θα είναι ίσο με το μισό της τρίτης του πλευράς, της ΔE , δηλαδή:

$$K\Lambda = \frac{\Delta E}{2} = \frac{B\Delta + \Gamma E + B\Gamma}{2} = \frac{12}{2} = 6$$



18

ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$. Από τα μέσα K και Λ των πλευρών $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα KE και ΛZ στην πλευρά $B\Gamma$.

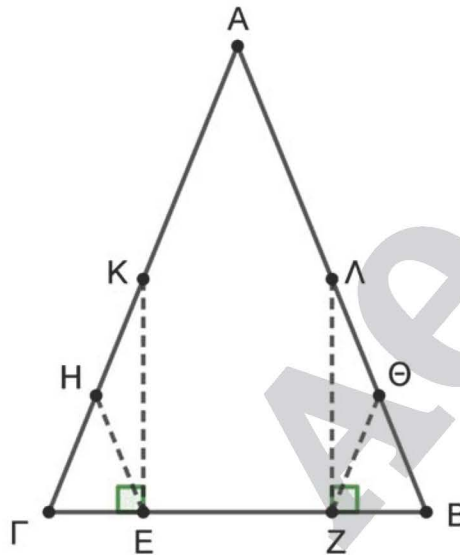
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $KE\Gamma$ και ΛZB είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

β) $EH=Z\Theta$, όπου H , Θ τα μέσα των τμημάτων $K\Gamma$, ΛB αντίστοιχα.

(Μονάδες 10)



18 A

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ είναι ορθογώνια με $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$ επειδή από τα δεδομένα έχουμε ότι τα τμήματα ΚΕ και ΛΖ είναι κάθετα στη ΒΓ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ έχουν:

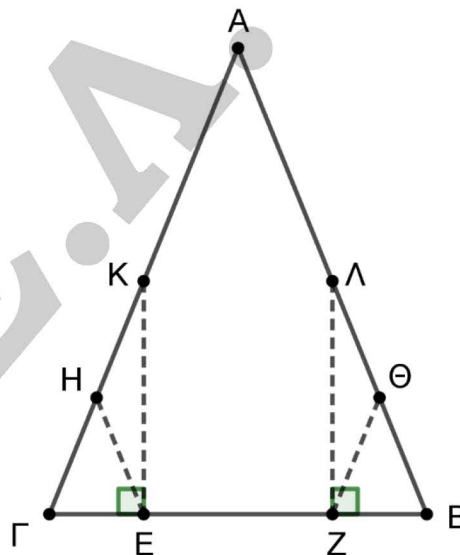
- $ΚΓ = ΛΒ$, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα του ισοσκελούς ΑΒΓ της υπόθεσης με Κ, Λ τα αντίστοιχα μέσα τους
- $\hat{B} = \hat{G}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ είναι ίσα γιατί έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

β) Η ΕΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΚΓ του ορθογώνιου τριγώνου ΚΕΓ, οπότε ισχύει: $ΕΗ = \frac{ΚΓ}{2}$ (1).

Η ΖΘ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΛΒ του ορθογώνιου τριγώνου ΛΖΒ, άρα $ΖΘ = \frac{ΛΒ}{2}$ (2).

Επειδή $ΚΓ = ΛΒ$ ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $ΕΗ = ΖΘ$.



19

ΘΕΜΑ 2

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $E\Delta=1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) $A\Gamma$

(Μονάδες 8)

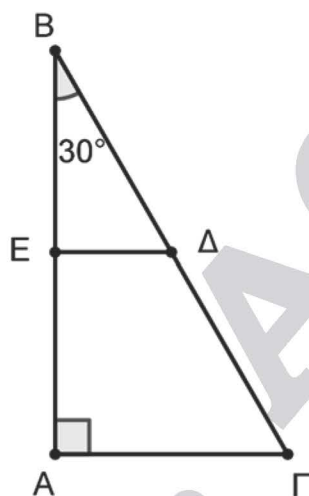
β) $B\Gamma$

(Μονάδες 9)

γ) $A\Delta$

(Μονάδες 8)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



19 Α

ΛΥΣΗ

α) Το τμήμα ΕΔ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ισχύει $ΕΔ = \frac{ΑΓ}{2}$ με

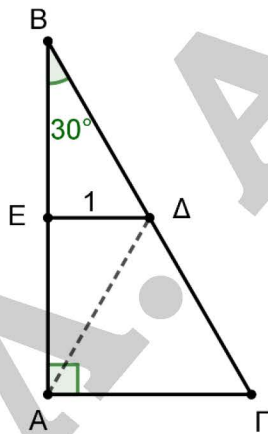
$ΕΔ = 1$, οπότε $1 = \frac{ΑΓ}{2}$, άρα $ΑΓ = 2$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{Β} = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΓ της γωνίας των 30° θα είναι ίση με το μισό της υποτέμνουσας ΒΓ. Δηλαδή $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ με $ΑΓ = 2$ από το α)

ερώτημα, οπότε $2 = \frac{ΒΓ}{2}$, άρα $ΒΓ = 4$.

γ) Η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα θα ισούται με το μισό της ΒΓ, δηλαδή $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2}$ με $ΒΓ = 4$ από το β) ερώτημα,

οπότε $ΑΔ = \frac{4}{2} = 2$.



20

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

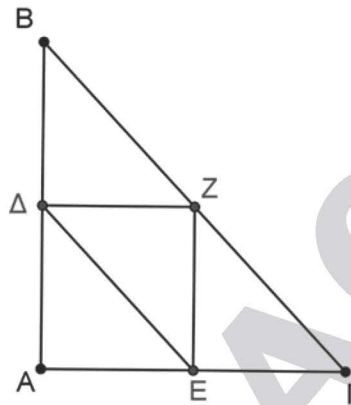
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι τετράγωνο,

(Μονάδες 15)

β) το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)



20 Α

ΛΥΣΗ

α) Επειδή το ΔΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, θα ισχύει ότι: $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = AE$ (1).

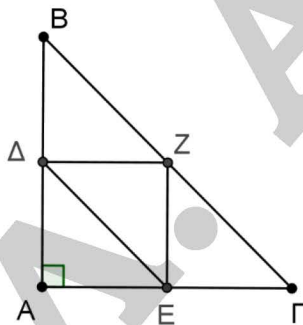
Επειδή το ΖΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, θα ισχύει ότι $ZE = \frac{AB}{2} = \Delta\Delta$ (2).

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$ και ισοσκελές θα έχει τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ ίσες, άρα και τα μισά τους ίσα, δηλαδή $\frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ ή $AE = E\Gamma = \Delta\Delta = \Delta B$ (3).

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $AE = ZE = \Delta Z = \Delta\Delta$, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΖΔ έχει τις πλευρές ίσες άρα θα είναι ρόμβος και επειδή έχει και μια ορθή γωνία, τη γωνία Α, θα είναι ορθογώνιο, άρα θα είναι τετράγωνο.

β) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ άρα $\Delta E \parallel B\Gamma$. Οι πλευρές ΒΔ και ΓΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Α, οπότε δεν είναι παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι τραπέζιο.

Από τη σχέση (3) έχουμε ότι $\Delta B = E\Gamma$, άρα το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



21

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

(Μονάδες 10)

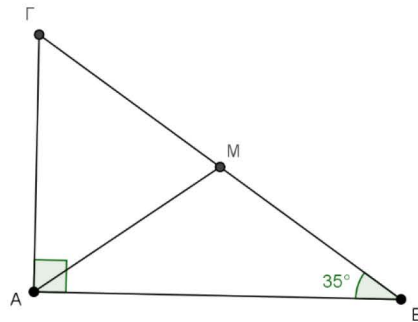
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB .

(Μονάδες 15)

21 A

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 35^\circ$ και AM διάμεσός του στην πλευρά $B\Gamma$



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές, δηλαδή ισχύει ότι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ με $\hat{B} = 35^\circ$ οπότε $35^\circ + \hat{\Gamma} = 90^\circ$, άρα $\hat{\Gamma} = 55^\circ$.

β) Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του $AB\Gamma$, άρα θα ισούται με το μισό της, δηλαδή $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB$.

Επειδή είναι $AM = MB$, το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές οπότε $\hat{BAM} = \hat{B} = 35^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AMB είναι:

$$\hat{AMB} + \hat{BAM} + \hat{B} = 180^\circ \text{ ή } \hat{AMB} + 35^\circ + 35^\circ = 180^\circ, \text{ άρα } \hat{AMB} = 110^\circ$$

22

ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $A\Delta=9$, $E\Gamma=10$ και $B\Gamma=30$.

α) Να υπολογίσετε:

i. το μήκος x του τμήματος ΔE ,

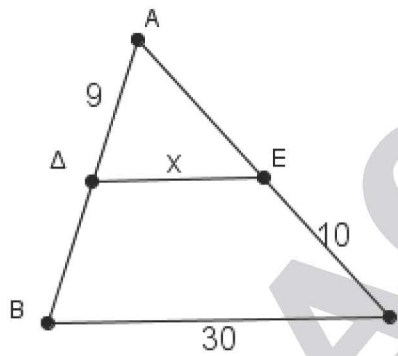
(Μονάδες 8)

ii. την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



22 A

ΛΥΣΗ

α)

i. Επειδή το ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών AB, ΑΓ του τριγώνου ABΓ θα είναι ίσο με το μισό της πλευράς ΒΓ, δηλαδή θα ισχύει ότι: $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$ ή $x = \frac{30}{2}$ ή $x = 15$.

ii. Το Δ είναι μέσο του AB, άρα $AB = 2\Delta\Delta$.

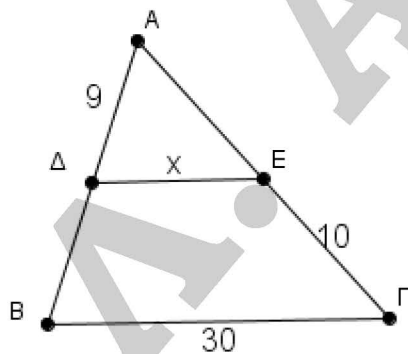
Αφού Ε μέσο της ΑΓ, τότε $A\Gamma = 2A\epsilon$.

Η περίμετρος του τριγώνου είναι:

$$\Pi = AB + B\Gamma + A\Gamma = 2\Delta\Delta + 30 + 2\epsilon\epsilon = 18 + 30 + 20 = 68$$

β) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών AB, ΑΓ του τριγώνου ABΓ, οπότε θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΒΓ, δηλαδή $\Delta E \parallel B\Gamma$.

Επίσης οι ΒΔ και ΓΕ δεν είναι παράλληλες, καθώς είναι μέρη πλευρών του τριγώνου ABΓ που τέμνονται στο Α. Άρα το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.



23

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta\widehat{E}\Gamma = 70^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$.

(Μονάδες 8)

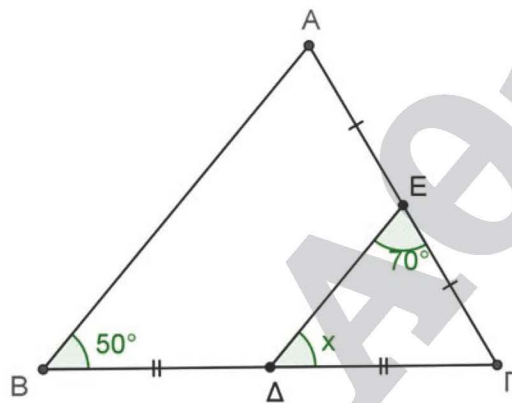
β) Να υπολογίσετε:

i. τη γωνία $\hat{x}$,

(Μονάδες 8)

ii. τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)



23 A

ΛΥΣΗ

α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ΑΒ, ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΑΒ, δηλαδή $\Delta\text{Ε} \parallel \text{ΑΒ}$.

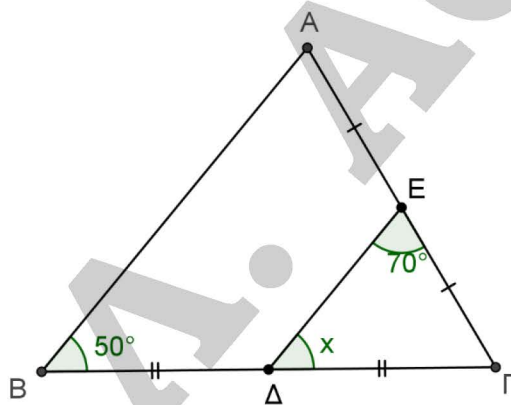
β)

i. Είναι $\hat{x} = \hat{B} = 50^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΒΓ.

ii. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ έχουμε ότι $70^\circ + \hat{x} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ και χρησιμοποιώντας όσα έχουμε βρει στο βi), έχουμε:

$$70^\circ + 50^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } \hat{\Gamma} = 60^\circ$$

Επίσης είναι $\hat{A} = \hat{E} = 70^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΓ.



24

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του,

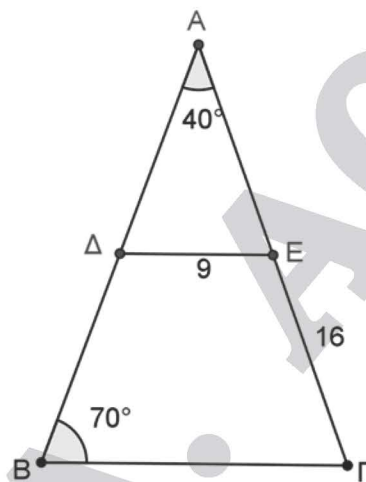
(Μονάδες 8)

ii. $B\Gamma = 18$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)



24 A

ΛΥΣΗ

α)

i. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABΓ βρίσκουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 40^\circ + 70^\circ + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 110^\circ + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } \widehat{\Gamma} = 70^\circ$$

Άρα $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ οπότε το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε έχει ίσες πλευρές τις AB και ΑΓ.

ii. Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, ισχύει ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι ίσο με το μισό της ΒΓ, δηλαδή

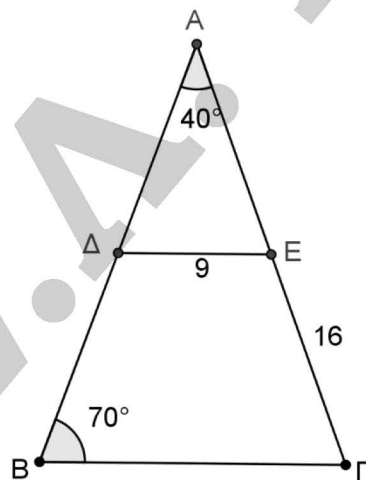
$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \text{ ή } 9 = \frac{B\Gamma}{2} \text{ ή } B\Gamma = 18$$

β) Αφού Ε μέσο της ΑΓ, τότε $E\Gamma = \frac{A\Gamma}{2}$ με $E\Gamma = 16$, οπότε $\frac{A\Gamma}{2} = 16$ ή $A\Gamma = 32$ άρα και $AB = 32$,

αφού το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές (από το αi) ερώτημα).

Τότε η περίμετρος του τριγώνου ABΓ είναι:

$$\Pi = AB + B\Gamma + A\Gamma = 32 + 18 + 32 = 82$$



25

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος AD της γωνίας του $\hat{A}$.

Από το σημείο D φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) $DE = \frac{A\Gamma}{2}$,

(Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο $DE\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές,

(Μονάδες 8)

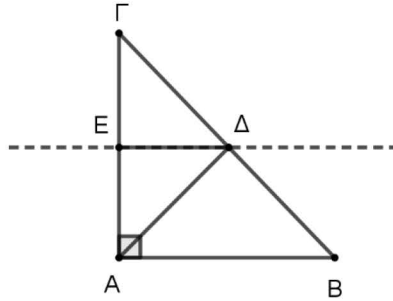
γ) $DE = \frac{A\Gamma}{2}$.

(Μονάδες 9)

25 A

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}$ ορθή, AD η διχοτόμος της $\hat{A}$ και ED η παράλληλη ευθεία προς την πλευρά AB .



α) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ η διχοτόμος του AD θα είναι ύψος και διάμεσος. Επειδή η AD είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισχύει ότι $AD = \frac{B\Gamma}{2}$.

β) Είναι $AB \parallel DE$ και $AG \perp AB$ επειδή $\hat{A}$ ορθή από τα δεδομένα.

Άρα η AG θα είναι κάθετη και στην παράλληλη της AB που είναι η DE , δηλαδή $AG \perp DE$. Οπότε το τρίγωνο $DE\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma E D} = 90^\circ$.

γ) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το D είναι μέσο της $B\Gamma$ και $DE \parallel AB$, άρα και το E είναι μέσο της AG . Επειδή το τμήμα DE ενώνει τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AG του $AB\Gamma$ ισχύει ότι: $DE = \frac{AB}{2}$ ή $DE = \frac{AG}{2}$ αφού $AB = AG$ στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$.