Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

7

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) με ΒΔ διχοτόμο και ΑΚ ύψος, που τέμνονται στο Ε. Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.

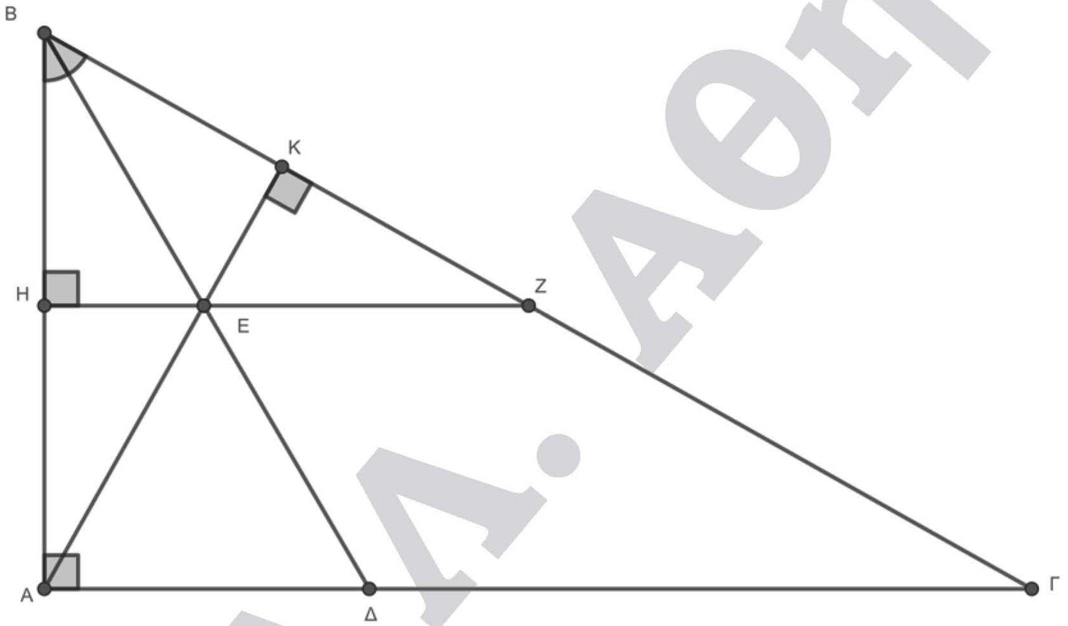
α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii. η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΖ. (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. (Μονάδες 6)

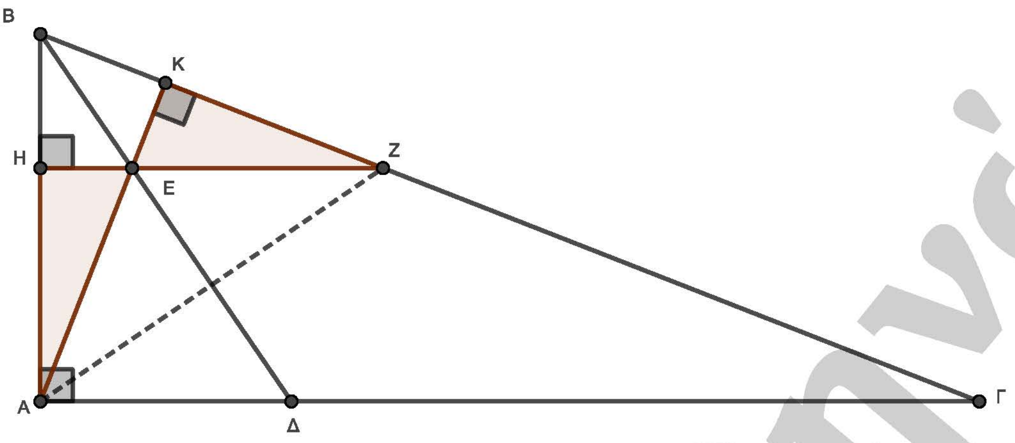


6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

7 A

ΛΥΣΗ

α) i)

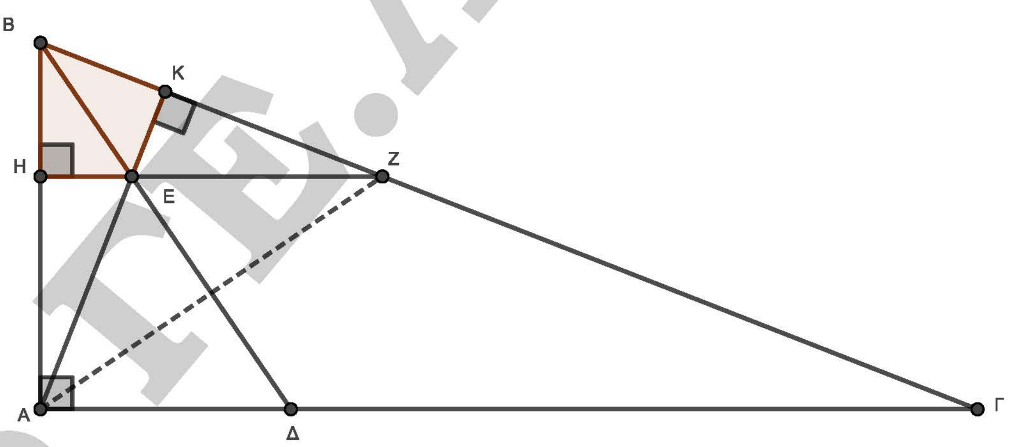


Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ έχουν:

- $H\hat{E}A = K\hat{E}Z$, ως κατακορυφήν
- ΕΗ = ΕΚ (1), διότι το Ε είναι σημείο της διχοτόμου ΑΔ και ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\widehat{B}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα γιατί ως ορθογώνια έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνίες ίσες μία προς μία.

ii)



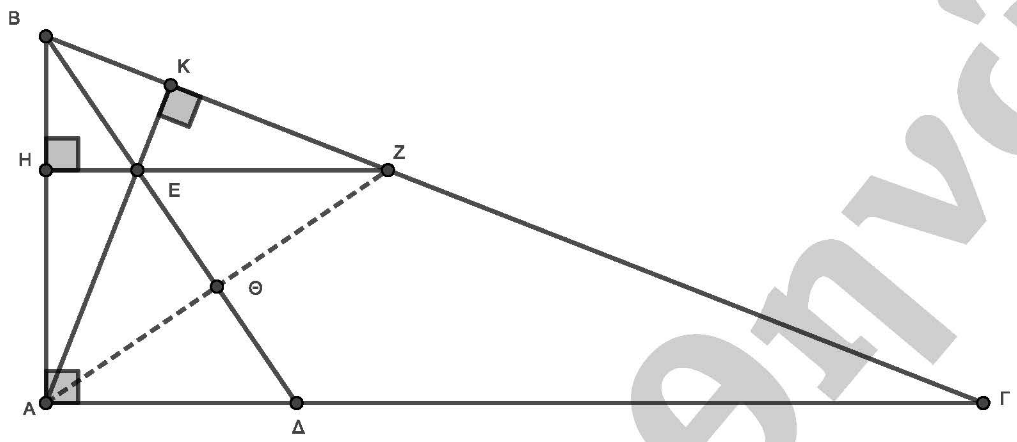
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΗ και ΒΕΚ έχουν:

- ΕΗ = ΕΚ (σχέση (1) του αι) ερωτήματος)
- ΒΕ κοινή πλευρά

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

Άρα τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΒΕΚ είναι ίσα γιατί ως ορθογώνια έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν και τις άλλες αντίστοιχες κάθετες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΒΗ = ΒΚ. Επομένως το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές.

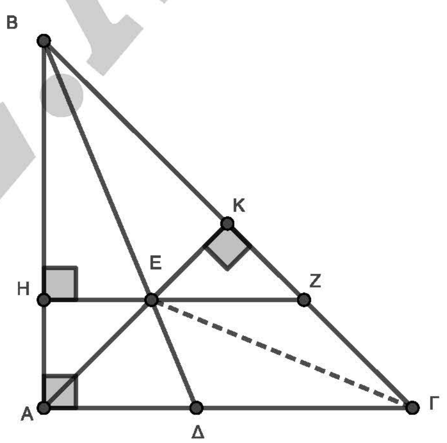
iii)



Φέρνουμε το τμήμα ΑΖ και έστω Θ το σημείο τομής της διχοτόμου ΒΔ και του ΑΖ.

Στο τρίγωνο ΑΒΖ το σημείο Ε είναι το σημείο τομής των υψών του ΑΚ, ΖΗ άρα είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Οπότε και το ΒΘ είναι ύψος αφού διέρχεται από το Ε. Άρα η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΖ.

β)



Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, το ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Ε είναι σημείο τομής των διχοτόμων ΑΚ και ΒΔ. Η ΓΕ διέρχεται από το Ε άρα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

6ο ΓΕΛ. Αθηνών

9

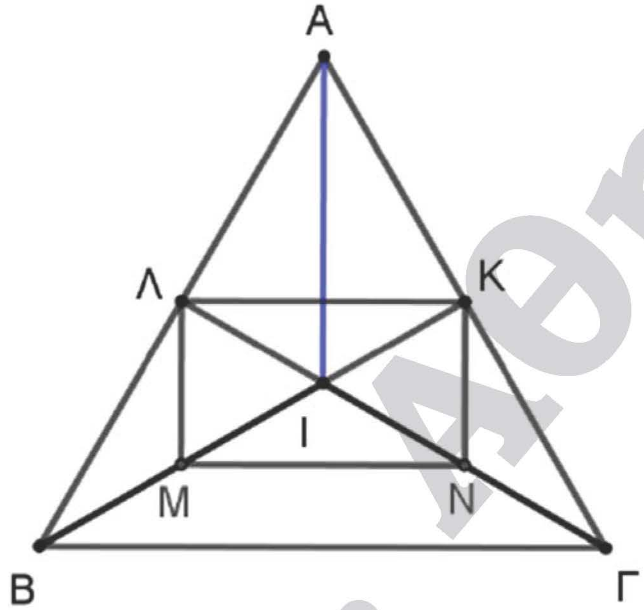
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι.

Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΙΒ και ΙΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το , μέσο της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

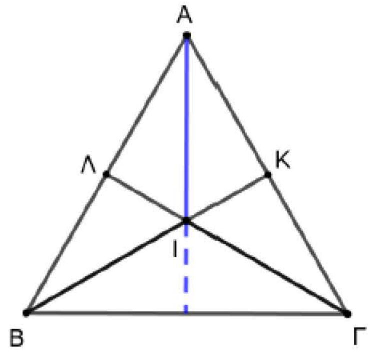


6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

9 A

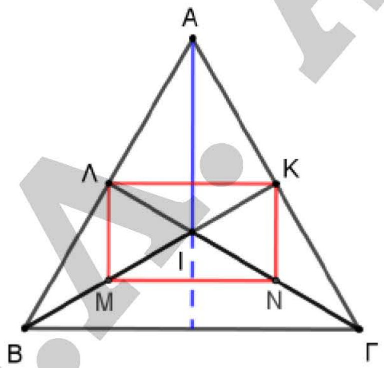
ΛΥΣΗ

α)



Επειδή στο σημείο Ι τέμνονται τα ύψη ΒΚ και ΛΓ του τριγώνου ΑΒΓ, το Ι είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου οπότε το ΑΙ θα βρίσκεται στο φορέα του $3^{ου}$ ύψους και επειδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, κάθε ύψος είναι και διάμεσος, άρα η προέκταση του ΑΙ θα διχοτομεί την πλευρά ΒΓ.

β)



Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Λ, Κ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ οπότε ΛΚ//=$\frac{ΒΓ}{2}$ (1).

Στο τρίγωνο ΙΒΓ τα Μ, Ν είναι τα μέσα των ΙΒ και ΙΓ οπότε ΜΝ//=$\frac{ΒΓ}{2}$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι ΛΚ=//ΜΝ, άρα το ΜΛΚΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο ΑΒΙ το ευθύγραμμο τμήμα ΛΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΙ οπότε ΛΜ//ΑΙ.

Το ΑΙ βρίσκεται στο φορέα του $3^{ου}$ ύψους α) άρα ΑΙ⊥ΒΓ και επειδή ΒΓ//ΛΚ από τη σχέση (1), θα είναι ΑΙ⊥ΛΚ. Άρα το τμήμα ΛΜ θα είναι κάθετο στο τμήμα ΛΚ. Επομένως $M\hat{Λ}K = 90^o$ οπότε το παραλληλόγραμμο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο γιατί έχει 1 γωνία ορθή.

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

11

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ ,ΓΖ, τα ύψη από τις κορυφές Β, Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα Μ, Ν, Κ, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΗ, ΒΗ αντίστοιχα.

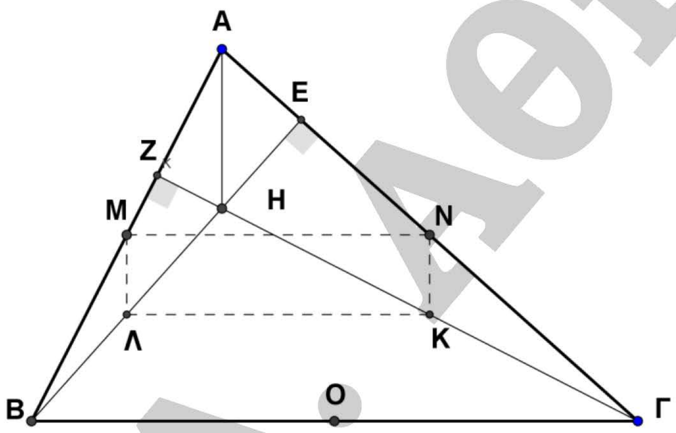
α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΜΝ=ΛΚ (Μονάδες 6)

ii. ΝΚ=ΜΛ=$\frac{АН}{2}$ (Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν το Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι το $M\hat{O}K = 90^0$. (Μονάδες 7)



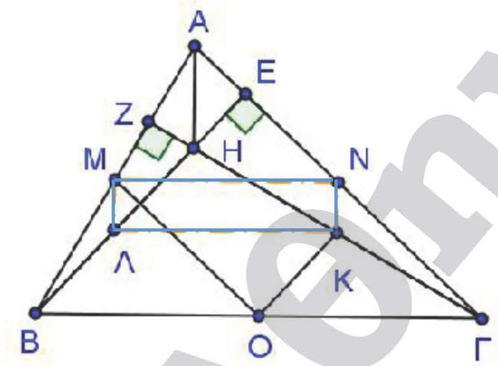
6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

11 Α

α) i. Το ΜΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΜΝ // ΒΓ (1) και ΜΝ = $\frac{ΒΓ}{2}$ (2)

Το ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΗΒ και ΗΓ στο τρίγωνο ΗΒΓ, άρα ΚΛ // ΒΓ (3) και ΚΛ = $\frac{ΒΓ}{2}$ (4)

Από (2), (4) προκύπτει: ΜΝ = ΚΛ.



ii. Το ΝΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΗΓ στο τρίγωνο ΑΗΓ, άρα ΝΚ // ΑΗ (5) και ΝΚ = $\frac{ΑΗ}{2}$ (6).

Το ΜΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΗ στο τρίγωνο ΑΗΒ, άρα ΜΛ // ΑΗ και ΜΛ = $\frac{ΑΗ}{2}$ (7).

Από (6), (7) προκύπτει ότι: ΝΚ = ΜΛ = $\frac{ΑΗ}{2}$

iii. Από τις (1), (3) έχουμε ΜΝ // ΚΛ. Επίσης ΜΝ = ΚΛ άρα το τετράπλευρο ΜΝΚΛ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή το Η είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, είναι ΑΗ $\perp$ ΒΓ (8).

Επειδή ΜΝ // ΒΓ (9) και ΜΛ // ΑΗ (10), από (8), (9) και (10) είναι ΜΝ $\perp$ ΜΛ.

Άρα το παραλληλόγραμμο ΜΝΚΛ έχει μία ορθή γωνία και συνεπώς είναι ορθογώνιο.

β) Το ΚΟ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΗΓ και ΒΓ στο τρίγωνο ΗΒΓ, άρα ΚΟ // ΒΗ.

Το ΜΟ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΜΟ // ΑΓ.

Όμως ΒΗ $\perp$ ΑΓ άρα και ΚΟ$\perp$ΜΟ, δηλαδή $Μ\widehat{Ο}Κ = 90^{\circ}$.

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

12

ΘΕΜΑ 4

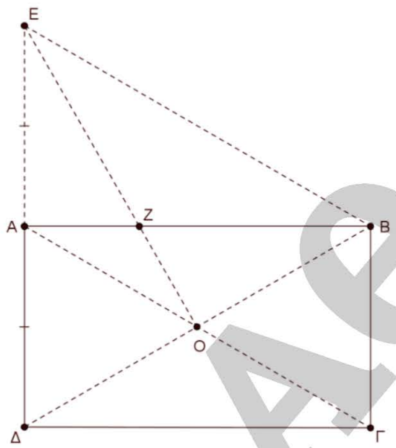
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ΑΓ = 2ΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ, προς το Α, παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΔΑ = ΑΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

γ) Αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι ΔΖ⊥ΕΒ. (Μονάδες 8)

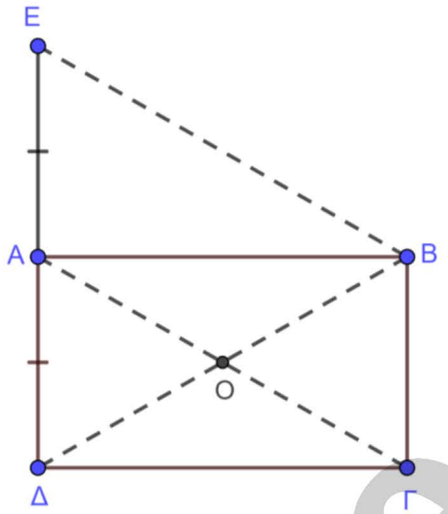


6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

12 Α

α) Επειδή ΑΕ = ΑΔ = ΒΓ και ΑΔ // ΒΓ, προκύπτει ότι ΑΕ = // ΒΓ.

Άρα το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.

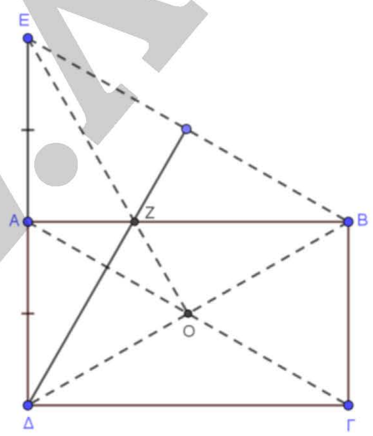


β) Είναι: ΑΓ = 2ΒΓ $\Leftrightarrow$ ΒΔ = 2ΑΔ $\Leftrightarrow$ ΒΔ = ΔΕ

Άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και αφού $E\hat{\Delta}B = 60^o$, είναι ισόπλευρο.

γ) Τα ΕΟ και ΒΑ είναι ύψη στο ισόπλευρο τρίγωνο ΕΔΒ, οπότε το σημείο τομής τους Ζ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου και η ΔΖ είναι το τρίτο ύψος του.

Δηλαδή, ΔΖ $\perp$ ΕΒ.



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών