

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

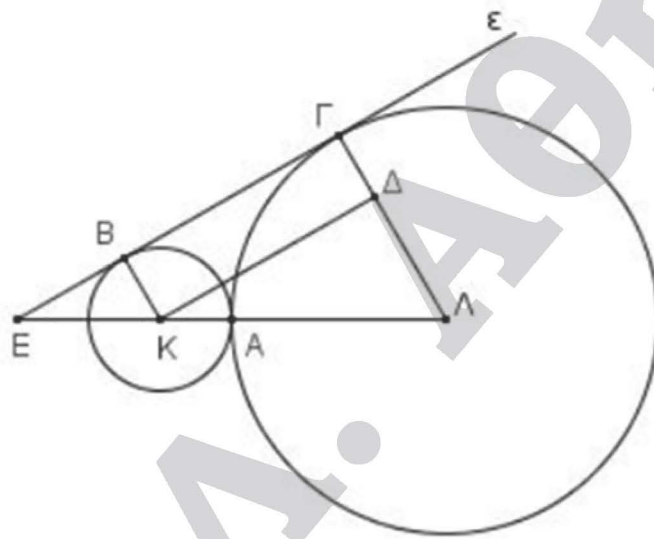
15

ΘΕΜΑ 4

Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Μία ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $K\Lambda$ (προς το K) στο σημείο E . Φέρουμε από το σημείο K παράλληλο τμήμα στην (ε) που τέμνει το τμήμα $\Lambda\Gamma$ στο Δ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο, (Μονάδες 9)
- β) η γωνία $\Delta K\Lambda$ είναι 30° , (Μονάδες 8)
- γ) το τμήμα $E\Lambda = 6\rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (K, ρ) . (Μονάδες 8)



15 A

ΛΥΣΗ

α) Οι ακτίνες ΚΒ και ΛΓ είναι κάθετες στην εφαπτομένη (ε), άρα ΚΒ//ΛΓ. Επίσης ΚΔ//ΒΓ από υπόθεση οπότε το ΒΓΔΚ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\widehat{ΚΒΓ} = 90^\circ$, τελικά το ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.

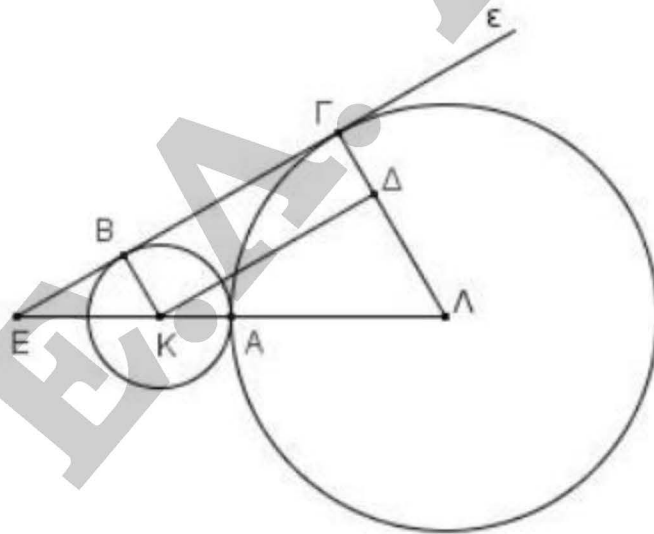
β) Από το ορθογώνιο ΒΓΔΚ έχουμε ότι ΒΚ=ΓΔ=ρ.

Επίσης $\Delta\Lambda = \Gamma\Lambda - \Gamma\Delta = 3\rho - \rho = 2\rho$ και $\text{ΚΛ} = \text{ΚΑ} + \text{ΑΛ} = \rho + 3\rho = 4\rho$ (διάκεντρος κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΛ η κάθετη πλευρά ΔΛ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας ΚΛ, οπότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από αυτή την πλευρά είναι γωνία 30° , δηλαδή $\widehat{\Delta\text{ΚΛ}} = 30^\circ$.

γ) Είναι $\widehat{\text{Ε}} = \widehat{\Delta\text{ΚΛ}} = 30^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΚΔ//ΕΓ που τέμνονται από την ΕΛ. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΛ για την πλευρά ΓΛ που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία των 30 μοιρών θα ισχύει ότι $\Gamma\Lambda = \frac{\text{ΕΛ}}{2}$, οπότε

$$\text{ΕΛ} = 2\Gamma\Lambda = 2 \cdot 3\rho = 6\rho.$$



17

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο O εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = A\Gamma$ και $O\Delta = \Delta B$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η γωνία $\widehat{\Gamma\hat{O}\Delta}$ είναι 60° ,

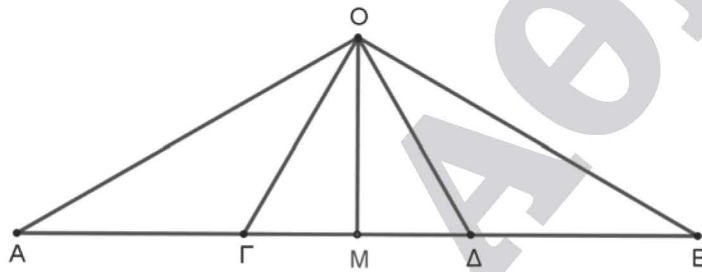
(Μονάδες 9)

ii. οι γωνίες $\widehat{O\hat{A}\Gamma}$, $\widehat{O\hat{B}\Delta}$ είναι ίσες και κάθε μία ίση με 30° .

(Μονάδες 9)

β) Αν M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB , να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.

(Μονάδες 7)



17 A

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $ΑΓ=ΟΓ=ΓΔ$ και $ΓΔ=ΔΒ=ΟΔ$, οπότε $ΟΓ=ΓΔ=ΟΔ$. Άρα το τρίγωνο $ΟΓΔ$ είναι ισόπλευρο και οι γωνίες του είναι ίσες με 60° . Άρα $\widehat{ΓΟΔ}=60^\circ$.

ii. Επειδή $ΟΓ=ΑΓ$, το τρίγωνο $ΟΑΓ$ είναι ισοσκελές οπότε $\widehat{Α_1}=\widehat{Ο_1}$.

Η γωνία $ΟΓΔ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΟΓΑ$, οπότε:

$$\widehat{ΟΓΔ} = \widehat{Α_1} + \widehat{Ο_1} \quad \text{ή} \quad 60^\circ = 2\widehat{Α_1} \quad \text{ή} \quad \widehat{Α_1} = 30^\circ$$

Η γωνία $ΟΔΒ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $ΟΓΑ$, άρα:

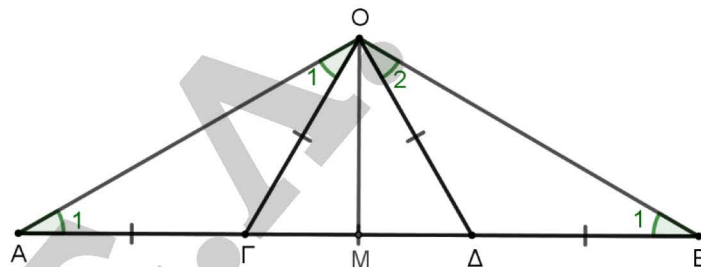
$$\widehat{ΟΔΒ} = \widehat{Ο_2} + \widehat{Β_1} \quad \text{ή} \quad 60^\circ = 2\widehat{Β_1} \quad \text{ή} \quad \widehat{Β_1} = 30^\circ$$

β) Είναι $\widehat{Α_1} = \widehat{Β_1} = 30^\circ$, άρα το τρίγωνο $ΟΑΒ$ είναι ισοσκελές.

Η διάμεσος $ΟΜ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΟΑΒ$ είναι και ύψος του, δηλαδή $ΟΜ \perp ΑΒ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΜΑ$ είναι $\widehat{Α_1}=30^\circ$, άρα για την απέναντί της κάθετης πλευρά $ΟΜ$ ισχύει:

$$ΟΜ = \frac{ΟΑ}{2} \quad \text{ή} \quad 2ΟΜ=ΟΑ$$



18

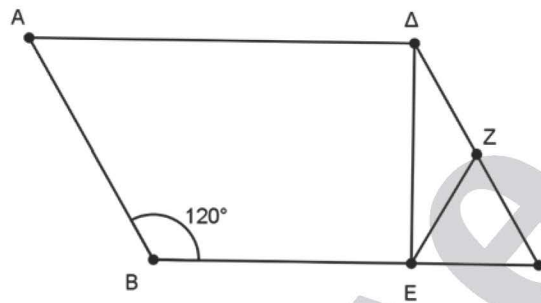
ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\widehat{B} = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 8)

β) Αν K είναι το μέσο της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$. (Μονάδες 9)

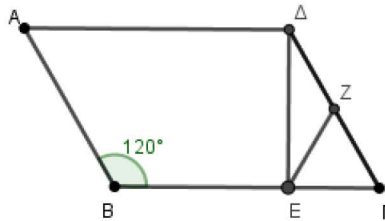
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{EZ\Gamma}$. (Μονάδες 8)



18 A

ΛΥΣΗ

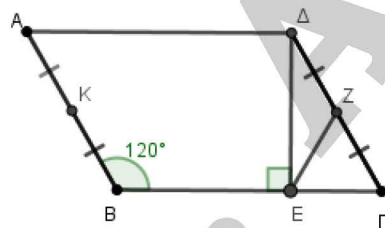
α)



Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AD και $B\Gamma$ που τέμνονται από την AB οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ και αφού $\hat{B} = 120^\circ$ άρα $\hat{A} = 60^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου άρα είναι ίσες, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{A} = 60^\circ$.

β)



Έστω K το μέσο της πλευράς AB , τότε θα είναι $AK = KB = \frac{AB}{2}$ (1).

Αφού $DE \perp B\Gamma$ τότε το τρίγωνο $\Delta E \Gamma$ είναι ορθογώνιο και το EZ είναι διάμεσος (από υπόθεση) που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του $\Delta \Gamma$, άρα $EZ = \frac{\Delta \Gamma}{2}$ (2).

Είναι $AB = \Delta \Gamma$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ οπότε $\frac{AB}{2} = \frac{\Delta \Gamma}{2}$ (3)

Επομένως, από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $AK = EZ$.

γ) Επειδή $EZ = \frac{\Delta \Gamma}{2} = Z\Delta = Z\Gamma$ αφού Z είναι μέσο της $\Delta \Gamma$, το τρίγωνο $EZ\Gamma$ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ZE , $Z\Gamma$ και τη γωνία $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ από το α) ερώτημα, οπότε θα είναι ισόπλευρο. Άρα $\hat{EZ\Gamma} = 60^\circ$.

19

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα $\Delta\Gamma$ και $E\Gamma$ είναι κάθετα μεταξύ τους,

(Μονάδες 12)

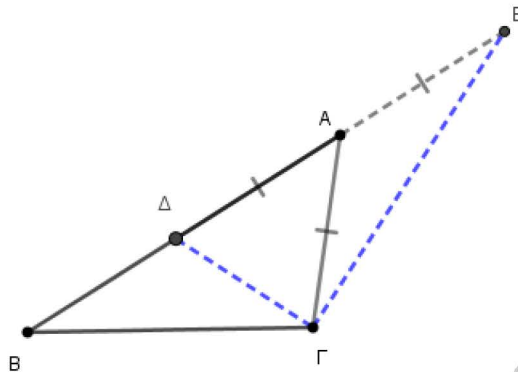
β) η γωνία $E\hat{A}\Gamma$ είναι διπλάσια της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$.

(Μονάδες 13)

19 A

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma < AB$, σημείο Δ στην πλευρά AB τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και σημείο E στην προέκταση της BA τέτοιο ώστε $AE = A\Gamma$.



α) Φέρνουμε τα τμήματα $\Delta\Gamma$ και ΓE .

Αφού από υπόθεση είναι $A\Delta = A\Gamma$ και $AE = A\Gamma$, τότε $A\Delta = A\Gamma = AE = \frac{\Delta E}{2}$. Οπότε στο τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ το τμήμα $A\Gamma$ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΔE και είναι ίσο με το μισό της πλευράς ΔE .

Επομένως, το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΔE και με ορθή τη γωνία $E\hat{\Gamma}\Delta$, άρα τα τμήματα $\Delta\Gamma$ και $E\Gamma$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

β) Επειδή είναι $A\Gamma = A\Delta$, το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, άρα $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma$ (1).

Η $E\hat{A}\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $A\Delta\Gamma$, οπότε είναι $E\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta + A\hat{\Delta}\Gamma$ και αφού είναι $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma$ λόγω της σχέσης (1), άρα $E\hat{A}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Delta}\Gamma = 2A\hat{\Delta}\Gamma$.

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{B}=60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στην ευθεία $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2},$

(Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ίσο με το τρίγωνο $B\Gamma Z$,

(Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 8)

20 A

ΛΥΣΗ

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{B} = 60^\circ$ και AE, BZ ύψη του από τις κορυφές A και B αντίστοιχα προς την ευθεία $\Delta\Gamma$.



α) Οι AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και το BZ είναι ύψος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, άρα θα είναι κάθετο στις παράλληλες AB και $\Delta\Gamma$ και θα είναι $\widehat{ABZ} = \widehat{Z} = 90^\circ$ (1). Οπότε $\widehat{\Gamma BZ} = \widehat{ABZ} - \widehat{AB\Gamma} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓZB ($\widehat{Z} = 90^\circ$) είναι $\widehat{\Gamma BZ} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι πλευρά της γωνίας των 30° θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $\Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2}$ και αφού είναι $B\Gamma = A\Delta$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, τότε $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$.

β) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ έχουν:

- $\widehat{E} = \widehat{Z} = 90^\circ$, γιατί τα τμήματα AE και BZ είναι κάθετα στη $B\Gamma$ ως ύψη του παραλληλογράμμου.
- $A\Delta = B\Gamma$, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
- $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma Z}$, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες $A\Delta$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $\Delta\Gamma$.

Άρα τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μία.

γ) Το τετράπλευρο $ABZE$ έχει τρεις γωνίες ορθές, την $\widehat{ABZ}$ από σχέση (1), την $\widehat{Z}$ και την $\widehat{AEZ}$ αφού τα AE και BZ είναι ύψη, οπότε είναι ορθογώνιο.

21

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του AD και την διάμεσο AM στην πλευρά $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma A D}$ είναι ίσες,

(Μονάδες 12)

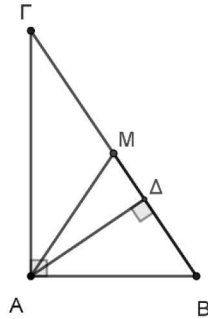
β) $\hat{A M \Delta} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

21 Α

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$, AD το ύψος του προς στην $B\Gamma$ και AM διάμεσός του στην πλευρά $B\Gamma$.



α) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) ισχύει ότι:

$$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \text{ ή } \widehat{B} = 90^\circ - \widehat{\Gamma} \quad (1)$$

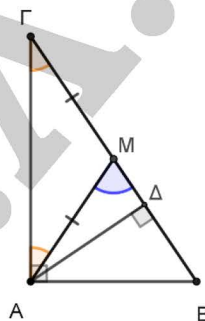
Αφού AD είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ τότε $\widehat{AD\Gamma} = 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο $AD\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AD\Gamma$ ισχύει ότι:

$$\widehat{\Gamma AD} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \text{ ή } \widehat{\Gamma AD} = 90^\circ - \widehat{\Gamma} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\widehat{B} = \widehat{\Gamma AD}$.

β)



Αφού η AM είναι διάμεσος στην υποτείνουσα $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, τότε θα είναι

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = MG, \text{ αφού } M \text{ μέσο της } B\Gamma.$$

Αφού $AM = MG$ τότε το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές γιατί έχει δυο πλευρές του ίσες, οπότε

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{M\Gamma A} \quad (3) \text{ ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του } A\Gamma.$$

Στο τρίγωνο $AM\Delta$ η γωνία $\widehat{AM\Delta}$ είναι εξωτερική της γωνίας $\widehat{AM\Gamma}$ του τριγώνου $AM\Gamma$, οπότε θα είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου, δηλαδή

$$\widehat{AM\Delta} = \widehat{M\Gamma A} + \widehat{\Gamma} \text{ και αφού είναι } \widehat{\Gamma} = \widehat{M\Gamma A} \text{ (σχέση (3))}, \text{ τότε θα είναι:}$$

$$\widehat{AM\Delta} = \widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} \text{ ή } \widehat{AM\Delta} = 2\widehat{\Gamma}$$

22

ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και γωνία $\widehat{B}$ ίση με 30° . Θεωρούμε Δ και E τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

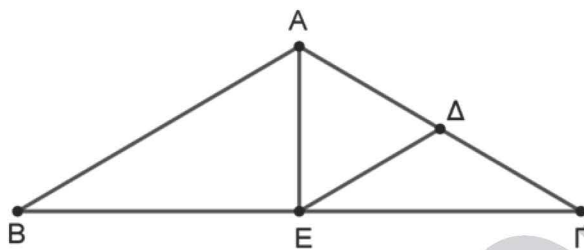
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

(Μονάδες 16)

β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 9)



22 Α

ΛΥΣΗ

α) Το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ οπότε $ΔΕ \parallel ΑΒ$ και $ΔΕ = \frac{ΑΒ}{2}$

(1). Επειδή είναι $ΑΒ = ΑΓ$ και το Δ μέσο του ΑΓ από υπόθεση, ισχύει ότι

$ΔΓ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$, άρα και $ΔΓ = ΔΕ$ λόγω της σχέσης (1). Οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές με βάση ΕΓ.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και $\widehat{Β} = 30^\circ$ από υπόθεση, ισχύει ότι $\widehat{Γ} = \widehat{Β} = 30^\circ$.

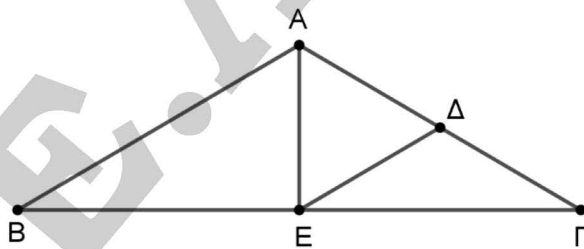
Επειδή το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές οι γωνίες οι προσκείμενες στη βάση του θα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{ΔΕΓ} = \widehat{Γ} = 30^\circ$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ ισχύει ότι $\widehat{ΕΔΓ} + \widehat{ΔΕΓ} + \widehat{Γ} = 180^\circ$ με $\widehat{ΔΕΓ} = \widehat{Γ} = 30^\circ$, οπότε $\widehat{ΕΔΓ} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ άρα $\widehat{ΕΔΓ} = 120^\circ$.

β) Το τμήμα ΕΔ ενώνει τα μέσα δυο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε θα είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς, δηλαδή θα ισχύει $ΕΔ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2}$ (2) και επειδή το Δ είναι μέσο της ΑΓ έχουμε $ΑΔ = \frac{ΑΓ}{2}$ (3).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ είναι $\widehat{Γ} = 30^\circ$ άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2}$ (4).

Από (2), (3) και (4) προκύπτει ότι $ΕΔ = ΑΔ = ΑΕ$ οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.



23

ΘΕΜΑ 2

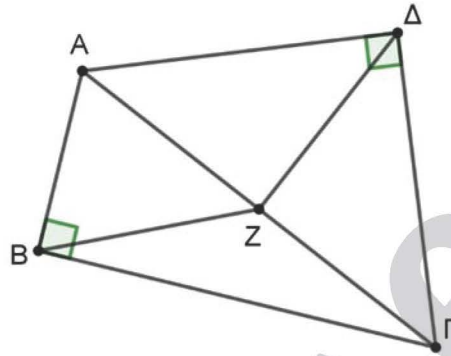
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} = 90^\circ$ και Z το μέσο του $A\Gamma$. Με υποτείνουσα το $A\Gamma$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ με $\widehat{\Delta} = 90^\circ$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$.

(Μονάδες 13)

β) Αν είναι $\widehat{A\Gamma B} = 30^\circ$, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B\Delta\Delta}$ και $\widehat{B\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 12)



23 Α

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η BZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου, άρα $BZ = \frac{A\Gamma}{2}$ (1).

Η ΔZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $A\Delta\Gamma$, άρα $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $BZ = \Delta Z$.

β) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\widehat{B\hat{A}\Gamma} + \widehat{A\hat{\Gamma}B} = 90^\circ$ και επειδή $\widehat{A\hat{\Gamma}B} = 30^\circ$ από την υπόθεση θα έχουμε ότι $\widehat{B\hat{A}\Gamma} + 30^\circ = 90^\circ$, άρα $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οι οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45° , δηλαδή $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} = 45^\circ$.

Τότε $\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{B\hat{A}\Gamma} + \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$ και $\widehat{B\hat{\Gamma}\Delta} = \widehat{A\hat{\Gamma}B} + \widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

