ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. **i)** Πρέπει το σύνολο Δ να είναι διάστημα π.χ. Αν $f(x)=\frac{-1}{x}$, τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$ χωρίς η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$.

ii) Πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

Π.χ. η $f(x)=|x|$, στο σημείο $x_o=0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, ενώ δεν ισχύει $f'(0)=0$, αφού η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

iii) Πρέπει το σύνολο Δ να είναι διάστημα.

Π.χ. αν $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ x^3, & x>0 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x^3+2, & x>0 \end{cases}$, τότε

για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $f'(x)=g'(x)$ χωρίς να ισχύει $f(x)=g(x)+c$, $x\in\mathbb{R}^*$

iv) Πρέπει το x_o να είναι εσωτερικό σημείο του Δ.

Π.χ. αν $f(x)=2x+3$, $x\in[1,3)$, τότε στο σημείο $x_o=1$ η f παρουσιάζει τοπικό (ολικό) ελάχιστο και είναι $f'(1)=2\neq 0$.

v) Μπορεί και να μην υπάρχει η $f''(x_o)$. Π.χ. αν $f(x)=x|x|$, τότε η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το (0,0) και όμως δεν υπάρχει $f''(0)$.

vi) Πρέπει η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_o.

Π.χ. αν $f(x)=x^4$, τότε $f''(0)=0$, ενώ το σημείο (0,0) δεν είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

vii) Πρέπει να ισχύει $\alpha\leq\beta$. Π.χ. αν $f(x)=x$, $\Delta=\mathbb{R}$ τότε για $\alpha=1$ και $\beta=0$ είναι

$$\left|\int_1^0 x\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^0\right|=\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \int_1^0 |x|\,dx=-\int_0^1 |x|\,dx=-\int_0^1 x\,dx=-\frac{1}{2}$$

2. **i)** Η συνάρτηση f στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Για το σημείο $x_o=0$ έχουμε

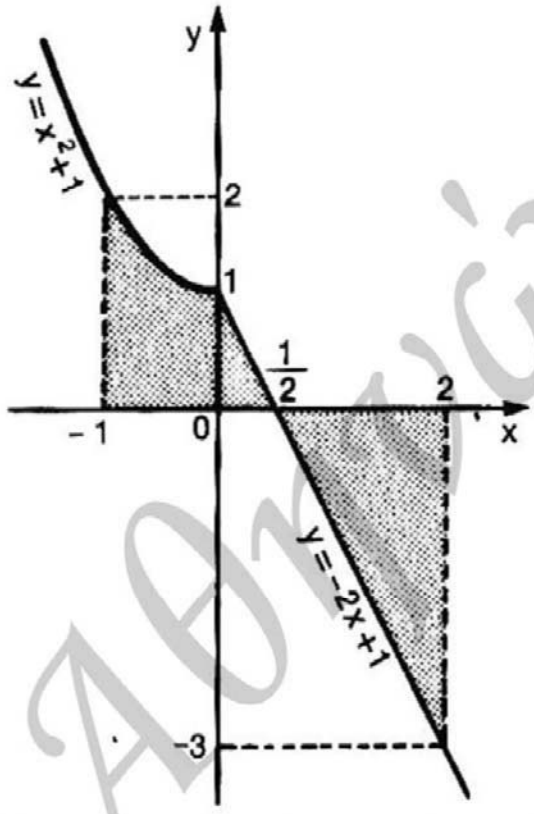
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1,$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-2x+1)=1$ και

$f(0)=1,$

που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής και στο $x_o=0$.

Η γραφική της παράσταση αποτελείται από το τμήμα της παραβολής $y=x^2+1$ στο διάστημα $(-\infty,0)$ και την ημιευθεία $y=-2x+1$, $x\geq 0$.



ii) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,2]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_{-1}^{2}\left|f(x)\right|dx$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα

για κάθε $x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ είναι $f(x)\geq 0$ και για κάθε $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ είναι $f(x)\leq 0$

οπότε

$$E=\int_{-1}^{1/2}f(x)dx-\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x^2+1)dx+\int_{0}^{1/2}(-2x+1)dx-\int_{\frac{1}{2}}^{2}(-2x+1)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{0}+\left[-x^2+x\right]_{0}^{\frac{1}{2}}-\left[-x^2+x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}-1\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left[(-4+2)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{23}{6}\text{ τετρ. μονάδ.}$$

3. i) Επειδή

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{x+1}=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x+1}=-\infty,$$

η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Εξάλλου το τριώνυμο $\alpha x^2+\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)x$ παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο

$$x=\frac{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x=\frac{-2\alpha-1}{4\alpha}.$$

Το ακρότατο της g βρίσκεται στην ευθεία $x=-1$ όταν

$$\frac{-2\alpha-1}{4\alpha}=-1 \quad \text{ή} \quad -2\alpha-1=-4\alpha \quad \text{ή} \quad \alpha=\frac{1}{2}.$$

ii) Για $\alpha=\frac{1}{2}$ είναι $g(x)=\frac{1}{2}x^2+x$, οπότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f,g είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} y=\frac{x}{x+1} \\ y=\frac{1}{2}x^2+x \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y=\frac{x}{x+1} \\ \frac{x}{x+1}=\frac{x^2+2x}{2} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y=\frac{x}{x+1} \\ x^3+3x^2=0 \end{cases}, \quad \text{δηλαδή}$$

$$\begin{pmatrix} x=0 \\ y=0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} x=-3 \\ y=\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Επομένως τα κοινά σημεία είναι $O(0,0)$ και $A\left(-3,\frac{3}{2}\right)$.

Επειδή $f'(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{(x)'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$ **και**

$$g'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)'=x+1,$$

έχουμε $f'(0)=g'(0)=1$ **και** $f'(-3)\neq g'(-3)$,
που σημαίνει ότι στο σημείο O(0,0) οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν την ίδια εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης 1.

4. **i)** Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,2)$ και $(2,+\infty)$ ως πολυωνυμική. Για να είναι συνεχής αρκεί να είναι συνεχής και στο σημείο $x_0=2$, δηλαδή να ισχύει

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \quad \text{ή} \quad 4\alpha+4=4+2\beta \quad \text{ή} \quad \beta=2\alpha \qquad (1)$$

Για κάθε $x\in(-\infty,2)$ είναι $f'(x)=(\alpha x^2+4)'=2\alpha x$ και για κάθε $x\in(2,+\infty)$ είναι $f'(x)=(x^2+\beta x)'=2x+\beta$.

Οι εφαπτόμενες στα σημεία $A\big(-1,f(-1)\big)$ και $B\big(4,f(4)\big)$ είναι παράλληλες

όταν $f'(-1)=f'(4)$ ή $-2\alpha=8+\beta$ ή $\beta=-2\alpha-8$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε $\alpha=-2$ και $\beta=-4$

ii) Για τις παραπάνω τιμές των α, β είναι

$$f(x)=\begin{cases} -2x^2+4, & x<2 \\ x^2-4x, & x\geq 2 \end{cases}, \quad \text{οπότε} \quad f'(x)=\begin{cases} -4x, & x<2 \\ 2x-4, & x>2 \end{cases}$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f, φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		+	0	−	∥	+	
f		↗	τ.μ.	↘	τ.ε.	↗	

Παρατηρούμε ότι η f,

- στο σημείο $x_1=0$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το $f(0)=4$
- στο σημείο $x_2=2$ αλλάζει η μονοτονία της f. Εξάλλου στο σημείο αυτό η f είναι και συνεχής, οπότε παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το $f(2)=-4$.

5. **i)** Η f έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$ και για κάθε $x \in A$ είναι

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)' = \frac{(x^2)'(x^2-4) - x^2(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}.$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'		+	‖	+	0	−	‖	−	
f		↗	‖	↗		↘	‖	↘	

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2)$, $(-2,0]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0,2)$, $(2,+\infty)$.

ii) Από το ερώτημα (i) παρατηρούμε ότι στο σημείο $x=0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για κάθε $x \in [-1,1]$ είναι $f(x) \le f(0) = 0$.
Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{-1}^{1}\left|\frac{x^2}{x^2-4}\right|dx = \int_{-1}^{1}\frac{-x^2}{x^2-4}\,dx = -\int_{-1}^{1}\frac{x^2-4+4}{x^2-4}\,dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)dx = -\int_{-1}^{1}1\,dx - \int_{-1}^{1}\frac{4}{x^2-4}\,dx =$$

$$= -2 - \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = -2 - \int_{-1}^{1}\frac{1}{x-2}\,dx + \int_{-1}^{1}\frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= -2 - \Big[\ln|x-2|\Big]_{-1}^{1} + \Big[\ln|x+2|\Big]_{-1}^{1} = -2 - (\ln 1 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 1) = -2 + 2\ln 3$$

6. **i)** • Η συνάρτηση f στο διάστημα $(-\infty, 1)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική και στο $(1, +\infty)$ είναι συνεχής ως ρητή.

• Στο σημείο $x_o = 1$ έχουμε

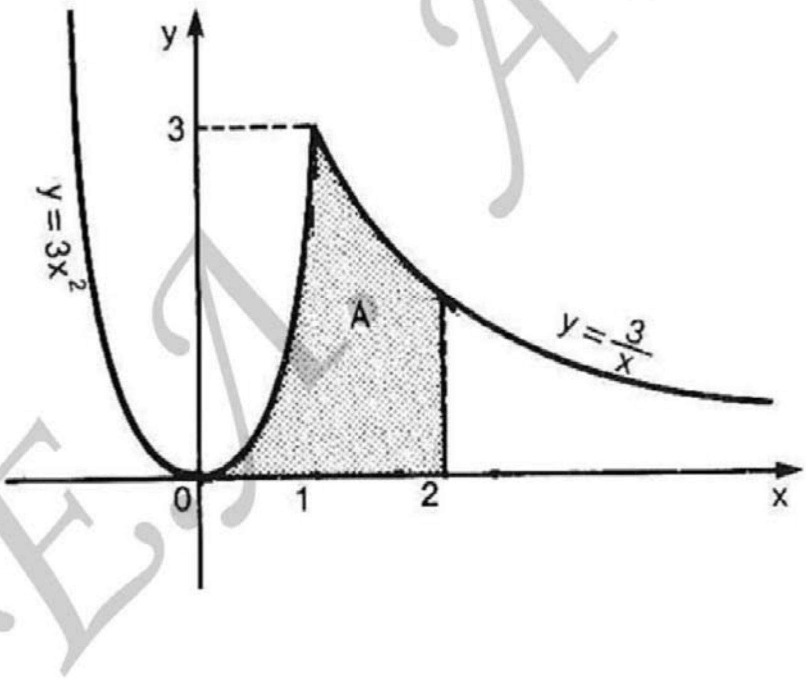
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x^2) = 3, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3}{x} = 3 \text{ και } f(1) = 3, \quad \text{οπότε}$$

$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$, που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής και στο σημείο $x_o = 1$.

Επομένως η f, ως συνεχής, είναι ολοκληρώσιμη.

ii) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και για κάθε $x \in [0,2]$ ισχύει $f(x) \geq 0$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου Α είναι

$$E = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 \frac{3}{x} dx = \left[x^3\right]_0^1 + 3\left[\ln x\right]_1^2 = 1 + 3\ln 2 \quad \text{τετραγ. μονάδες.}$$



7. **i)** Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' x - (\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad \text{και}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1 - \ln x)' x^2 - (x^2)'(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

Επειδή $f''(x) = 0 \iff \ln x = \dfrac{3}{2} \iff x = e^{\frac{3}{2}}$ και

$$f''(x) > 0 \iff \ln x > \frac{3}{2} \iff x > e^{\frac{3}{2}}$$

το πρόσημο της f'' φαίνεται στον πίνακα

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f''	‖	$-$	0	$+$	
f	‖		σ.κ.		

Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $\left(e\sqrt{e}, \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$

ii.

Είναι $\qquad y' = \dfrac{lnx}{x} = lnx \cdot (lnx)' = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot lnx \cdot (lnx)' = \dfrac{1}{2} \cdot [(lnx)^2]'$

Άρα y(x) = $\frac{1}{2} \cdot (lnx)^2$+ c και είναι y(1) = 3 δηλαδή c = 3.

8. i)

Είναι $y' = f'(x) = (x+2)e^x = xe^x+2e^x = xe^x+e^x+e^x =$

$= x(e^x)'+(x)'e^x+e^x = (xe^x)'+e^x = (xe^x+e^x)'$

Άρα $f(x) = xe^x + e^x + c$ και για $x=0$ είναι $c=0$.

Επομένως $f(x) = xe^x + e^x$.

ii) Για κάθε $x \in [0,1]$ η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) > 0$.
Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (xe^x + e^x)dx = \int_0^1 (xe^x)'\,dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 = e \quad \text{τετραγ. μονάδες}$$

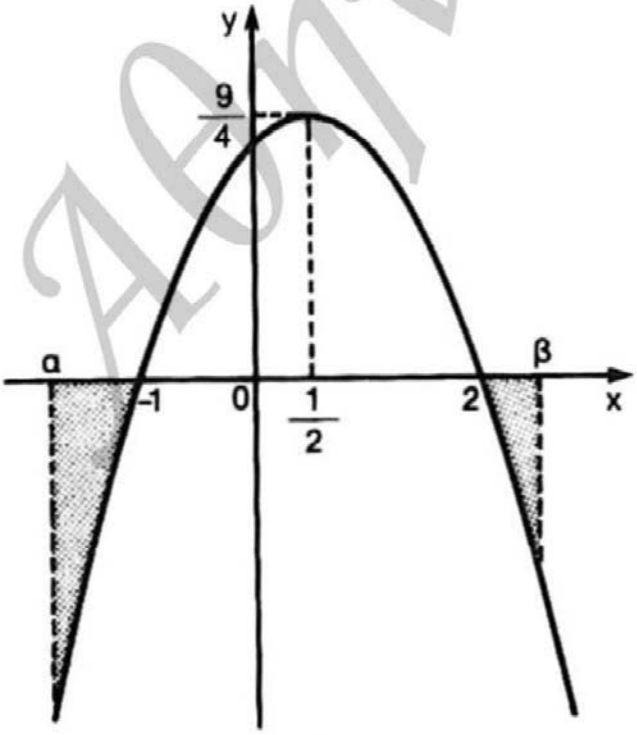
9. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-x^2+x+2$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-1,0)$ και $(2,0)$.
Εξάλλου για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ είναι $f(x)<0$, ενώ για κάθε $x\in[-1,2]$ είναι $f(x)\geq 0$.

- Αν $\alpha\leq -1$ και $\beta\geq 2$ έχουμε $\int_{\alpha}^{-1}f(x)dx\leq 0$ και $\int_{2}^{\beta}f(x)dx\leq 0$, οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{\beta}f(x)dx\leq\int_{-1}^{2}f(x)dx$$

- Αν $\alpha,\beta\in[-1,2]$ με $\alpha<\beta$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ εκφράζει αριθμητικά το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ και ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq\int_{-1}^{2}f(x)dx$$



Ανάλογα σε κάθε περίπτωση είναι

$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq\int_{-1}^{2}f(x)dx$, που σημαίνει ότι το $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

10. **i)** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x+1$ (έχει αποδειχθεί σε άσκηση του βιβλίου)

ii) Αν $h(x) = \alpha^x - x - 1$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $h(x) \geq 0 = h(0)$.
Επομένως η συνάρτηση h στο σημείο $x_o = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο.
Εξάλλου η h είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι $h'(0) = 0$.
Επειδή $h'(x) = (\alpha^x - x - 1)' = \alpha^x \ln\alpha - 1$, έχουμε $h'(0) = \ln\alpha - 1 = 0$ ή $\ln\alpha = 1$ ή $\alpha = e$.

iii) Έχουμε $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2 = x(x^2+2) + (x^2+2) = (x+1)(x^2+2)$
Σύμφωνα με προηγούμενο ερώτημα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x+1$, οπότε $e^x(x^2+2) \geq (x+1)(x^2+2)$ ή $f(x) \geq g(x)$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_0^1 \left[e^x(x^2+2) - (x^3+x^2+2x+2)\right]dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 e^x dx + 2\int_0^1 e^x dx - \int_0^1 (x^3+x^2+2x+2)dx$$

$$= \left[x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right]_0^1 + 2\left[e^x\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right]_0^1 =$$

$$= (e - 2e + 2e - 2) + 2(e-1) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1 + 2\right) = 3e - \frac{91}{12} \text{ τετρ. μονάδες}$$

11. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=(0,+\infty)$.

i) α) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$,

η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. Εξάλλου $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$ $\left(\text{απροσδ. μορφή } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$, που σημαίνει ότι η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

β) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'=\frac{(\ln x)'x^2-(x^2)'\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3},\ \text{οπότε}$$

$$f'(x)=0 \iff \ln x=\frac{1}{2} \iff x=\sqrt{e} \quad \text{και}$$

$$f'(x)>0 \iff 1-2\ln x>0 \iff \ln x<\frac{1}{2} \iff 0<x<\sqrt{e}$$

Επομένως το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'	‖	+	0	−	
f	‖	↗	τ.μ.	↘	

Παρατηρούμε ότι η f, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,\sqrt{e}\,\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$. Επομένως στο σημείο $x=\sqrt{e}$ παρουσιάζει μέγιστο, το $f\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}^{\,2}}=\dfrac{1}{2e}$.

ii) α) Για κάθε $x>0$ πρέπει να ισχύει

$$\left(\frac{\alpha\ln x+\beta}{x}\right)'=\frac{\ln x}{x^2} \quad \text{ή} \quad \frac{(\alpha\ln x+\beta)'x-(\alpha\ln x+\beta)(x)'}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2} \quad \text{ή}$$

$\alpha-\alpha\ln x-\beta=\ln x$ οπότε πρέπει $\alpha=-1$ και $\alpha-\beta=0$ ή $\alpha=\beta=-1$.

β) Για κάθε $x\in[1,\kappa]$ είναι $f(x)\geq 0$, οπότε $E(\kappa)=\displaystyle\int_1^{\kappa}\frac{\ln x}{x^2}\,dx$. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα μια αρχική της f είναι η $\dfrac{-\ln x-1}{x}$ και επομένως

$$E(\kappa)=\left[\frac{-\ln x-1}{x}\right]_1^{\kappa}=\frac{-\ln\kappa-1}{\kappa}-\frac{-\ln 1-1}{1}=\frac{-\ln\kappa-1}{\kappa}+1$$

Επομένως $\lim\limits_{\kappa\to+\infty}E(\kappa)=\lim\limits_{\kappa\to+\infty}\left(\dfrac{-\ln\kappa-1}{\kappa}\right)+1$ $\left(\text{απροσδ. μορφή } \dfrac{-\infty}{+\infty}\right)=$

$$=\lim_{\kappa\to+\infty}\frac{(-\ln\kappa-1)'}{(\kappa)'}+1=\lim_{\kappa\to+\infty}\frac{-1}{\kappa}+1=0+1=1.$$

12. i) Αν y = f(x), τότε έχουμε $5y'+3y=10 \Leftrightarrow 5y'=10-3y \overset{y\neq\frac{10}{3}}{\Leftrightarrow} \frac{5y'}{10-3y}=1$. Άρα

$$\frac{y'}{y-\frac{10}{3}}=-\frac{3}{5} \Leftrightarrow \left(\ln\left|y-\frac{10}{3}\right|\right)'=-\frac{3}{5} \Leftrightarrow \ln\left|y-\frac{10}{3}\right|=-\frac{3}{5}x+c$$

$$\left|y-\frac{10}{3}\right|=e^{-\frac{3}{5}x}\cdot e^{c} \Leftrightarrow \begin{cases} y=e^{-\frac{3}{5}x}\cdot e^{c}+\frac{10}{3} (\alpha\pi o\rho.\ \gamma\iota\alpha\ x=0...) \\ y=-e^{\frac{3}{5}x}\cdot e^{c}+\frac{10}{3} (\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}) \end{cases}$$ και για $x=0...$ *είναι* $e^{c}=-\frac{10}{3}$

Άρα $y=f(x)=\frac{10}{3}\left(1-e^{-\frac{3}{5}x}\right)$. Επίσης $f(x)\neq\frac{10}{3}$ --- Θα έπρεπε $e^{-\frac{3}{5}x}=0$ για κάποιο x.

ii) Επειδή $f(x)=\frac{10}{3}\left(1-e^{-\frac{3x}{5}}\right)$, για κάθε $x\in[0,5]$ είναι $0\le f(x)<\frac{10}{3}$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_0^5\left[\frac{10}{3}-\frac{10}{3}\left(1-e^{-\frac{3x}{5}}\right)\right]dx=\frac{10}{3}\cdot\int_0^5 e^{-\frac{3x}{5}}dx=-\frac{10}{3}\cdot\frac{5}{3}\int_0^5 e^{-\frac{3x}{5}}\cdot\left(-\frac{3x}{5}\right)'dx=$$

$$=-\frac{50}{9}\left[e^{-\frac{3x}{5}}\right]_0^5=-\frac{50}{9}\cdot(e^{-3}-1)=\frac{50}{9}\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$$ τετραγ. μονάδες.