

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

1. Στους παρακάτω ισχυρισμούς υπάρχει κάποιο λάθος. Ποιο είναι αυτό; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- i) Αν για κάθε x που ανήκει σ' ένα σύνολο Δ ισχύει $f'(x) > 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- ii) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ , τότε $f'(x_0) = 0$.
- iii) Αν για κάθε x που ανήκει σ' ένα σύνολο Δ ισχύει $f'(x) = g'(x)$, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $f(x) = g(x) + c$, $x \in \Delta$.
- iv) Αν μια συνάρτηση f στο σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε $f'(x_0) = 0$.
- v) Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει σημείο καμπής $(x_0, f(x_0))$, τότε $f''(x_0) = 0$.
- vi) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης.
- vii) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ ισχύει $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ -2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

- i) Να τη μελετήσετε ως προς τη συνέχειά της και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = -1$, $x = 2$ και τον άξονα $x'x$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x+1}$ και $g(x) = ax^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)x$, $a \in \mathbb{R}^*$.

- i) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε το ακρότατο της g να βρίσκεται στην κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .
- ii) Αν $a = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f , g , στο οποίο αυτές έχουν την ίδια εφαπτομένη.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 4, & x < 2 \\ x^2 + \beta x, & x \geq 2 \end{cases}$

- i) Να βρείτε τις τιμές των a , β αν η f είναι συνεχής και οι εφαπτόμενες της γραφικής της παράστασης στα σημεία με τετμημένες -1 και 4 είναι παράλληλες.
- ii) Για τις παραπάνω τιμές των a, β , να προσδιορίσετε τα τοπικά ακρότατα της f .

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$. Να βρείτε

- i) τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- ii) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 1 \\ \frac{3}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.
- ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου (A) που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία $x=2$ και τον άξονα $x'x$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- i) Να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f .
- ii) Να βρείτε συνάρτηση $y = g(x)$ για την οποία ισχύει $y' = f(x)$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(1,3)$.

8. i) Να βρείτε συνάρτηση $y = f(x)$ για την οποία ισχύει $y' = (x+2)e^x$ και $f(0) = 1$.
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

9. Να βρείτε το διάστημα $[a,b]$ στο οποίο το ολοκλήρωμα $\int_a^b (-x^2 + x + 2)dx$ παίρνει μέγιστη τιμή.

10. i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x + 1$

ii) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $a^x \geq x + 1$, $a > 0$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x \cdot (x^2 + 2)$, $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$, την ευθεία $x = 1$ και τον άξονα $y'y$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

i) α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να προσδιορίσετε τα ακρότατά της.

ii) α) Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η συνάρτηση $\frac{\alpha \ln x + \beta}{x}$ να είναι αρχική της f .

β) Να βρείτε το $\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} E(\kappa)$, όπου $E(\kappa)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τις ευθείες $x = 1$, $x = \kappa > 1$ και τον άξονα $x'x$.

12. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν

$$5f'(x) + 3f(x) = 10 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0$$

i) Να προσδιορίσετε την f

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $y = \frac{10}{3}$, $x = 5$ και τον άξονα $y'y$.

Καλή Επιτυχία στις εξετάσεις !!!