

Καλημέρα,

Το ΓΟΠ2 λύνει τα θέματα 1,2 & 3.

Το ΓΘΕΤ λύνει τα θέματα 2 & 4

1. ΘΕΜΑ 2

• Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{αν } x \in [-1, 2] \\ x - 1, & \text{αν } x \in (2, 5] \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$.

(Μονάδες 09)

γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1, 5]$.

(Μονάδες 06)

2. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 3x + 2$, $x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) + 2023 = 0$ έχει θετική λύση.

(Μονάδες 6)

3.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(\frac{\pi}{2}, \pi+1\right)$.

(Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 1$ εφάπτεται της C_f σε άπειρα σημεία.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι:

i. $|f'(x)| \leq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ii. $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq 3|\beta - \alpha|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.

(Μονάδες 4)

4. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \\ e^{x-2} - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ και

$g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

- τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 14)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x \neq 2$.

(Μονάδες 04)

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.»

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)