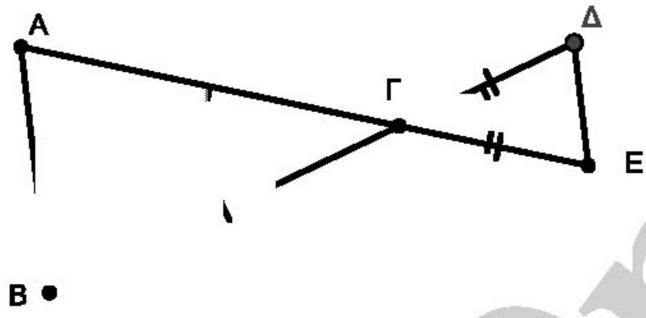
Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

1

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε ΑΒ = 2·ΔΕ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).

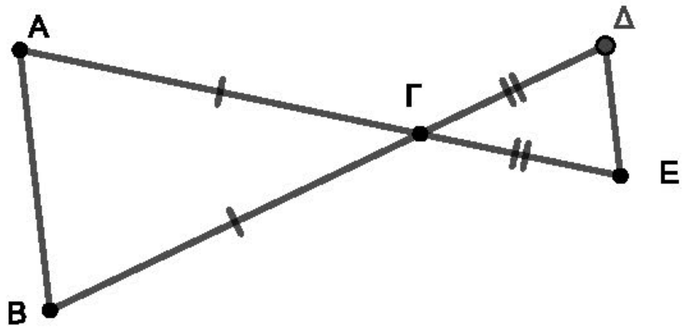
ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές ΑΓ και ΓΕ των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

1 α

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΕΔ είναι ισοσκελή με βάσεις ΑΒ και ΔΕ αντίστοιχα και έχουν τις γωνίες στην κορυφή τους ίσες αφού, $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$, ως κατακορυφήν.

Έτσι $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} = \dfrac{180° - \mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}}{2} = \dfrac{180° - \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{E}}{2} = \widehat{\mathrm{E}} = \widehat{\Delta}$. Οπότε τα τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα είναι όμοια.

β)

i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι :

$\dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$ και $\Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$

$\dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{\Gamma\Delta}$, $\dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{E}}$ και $\widehat{\mathrm{B}}$, $\widehat{\Delta}$ αντίστοιχα.

Αφού τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΕΔ είναι όμοια οι λόγοι των ομόλογων πλευρών του είναι ίσοι δηλαδή, ισχύει $\dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{\Gamma\Delta} = \dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}}$.

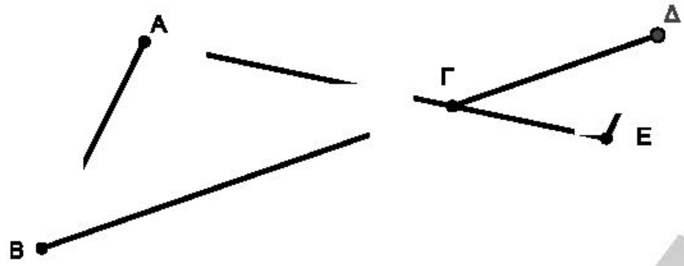
ii. Από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει $\dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}} = \dfrac{2\cdot\Delta\mathrm{E}}{\Delta\mathrm{E}} = 2$. Δηλαδή ισχύει $\dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}} = 2$ ή ΑΓ = 2·ΓΕ. Οπότε η πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι διπλάσια από την πλευρά ΓΕ του τριγώνου ΓΔΕ.

60 ΓΕΛ. Αθηνών

2

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλα και τα τμήματα ΑΓ και ΓΕ είναι τέτοια, ώστε ΑΓ=2ΓΕ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

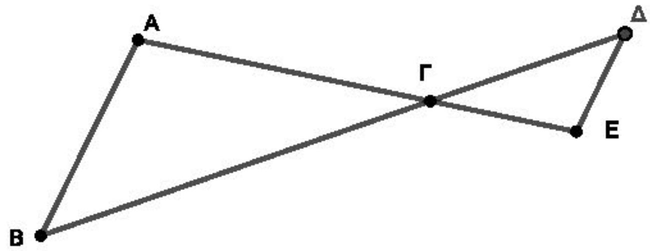
ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

2 α

ΛΥΣΗ



α) Δίνεται ότι ΑΒ//ΔΕ οπότε οι γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\mathrm{E}}$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΔΕ με τέμνουσα την ΑΕ. Ομοίως $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των ΑΒ και ΔΕ με τέμνουσα τη ΒΔ. Οι γωνίες $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$ και $\Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$ είναι ίσες ως κατακορυφήν. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μία, οπότε είναι όμοια.

β)

i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι :

   $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Gamma\Delta}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\mathrm{E}}$

   $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Gamma\mathrm{E}}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Delta}$ και

   $\frac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$ και $\Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$.

ii. Ο λόγος ομοιότητας είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή οποιοσδήποτε από τους ίσους λόγους $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Gamma\Delta}$, $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Gamma\mathrm{E}}$, $\frac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}}$. Οπότε ο λόγος ομοιότητας ισούται με $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Gamma\mathrm{E}} = \frac{2\cdot\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{E}} = 2$.

60 ΓΕ.Λ. Αθηνών

3

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$\widehat{A} = 48^o$, $\widehat{B} = 53^o$, $\widehat{E} = 79^o$ και $\widehat{Z} = 48^o$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β)

i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; (Μονάδες 9)

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

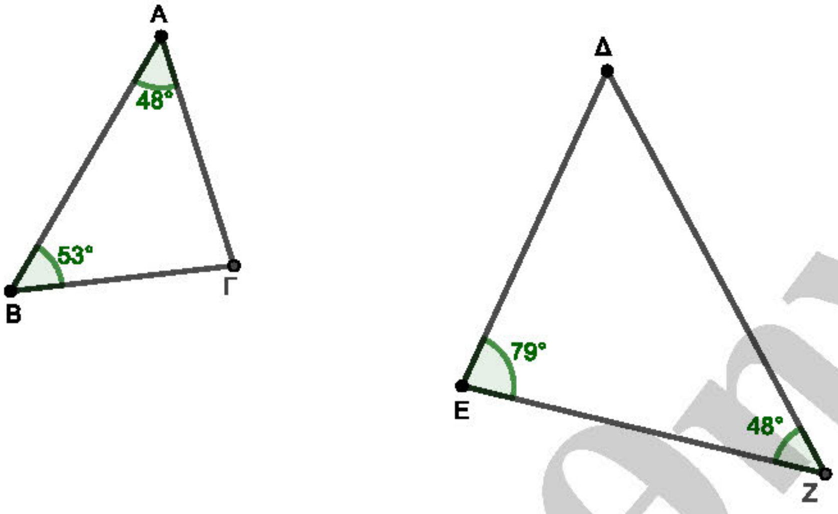
(Μονάδες 6)

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

3 α

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ τέτοια ώστε $\widehat{A}$ = 48°, $\widehat{B}$ = 53°, $\widehat{E}$ = 79° και $\widehat{Z}$ = 48°.



α) Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 180°. Οπότε $\widehat{\Gamma}$ = 180° – (48° + 53°) = 180° – 101° = 79°. Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε $\widehat{\Delta}$ = 180° – (79° + 48°) = 180° – 127° = 53°. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.

β)

i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Δηλαδή οι πλευρές ΒΓ και ΔΕ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A} = \widehat{Z}$ = 48°. Αντίστοιχα οι πλευρές ΑΓ και ΕΖ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$ = 53°, και οι πλευρές ΑΒ και ΔΖ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Gamma} = \widehat{E}$ = 79°.

ii. Οι ίσοι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{EZ} = \frac{AB}{\Delta Z}$.

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

4

ΘΕΜΑ 2

Για δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΕΖ) γνωρίζουμε ότι:

$\widehat{\mathrm{A}} = 48^{o}$, $\widehat{\mathrm{Z}} = 66^{o}$ και ΑΒ = 3·ΕΔ.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων

ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων.

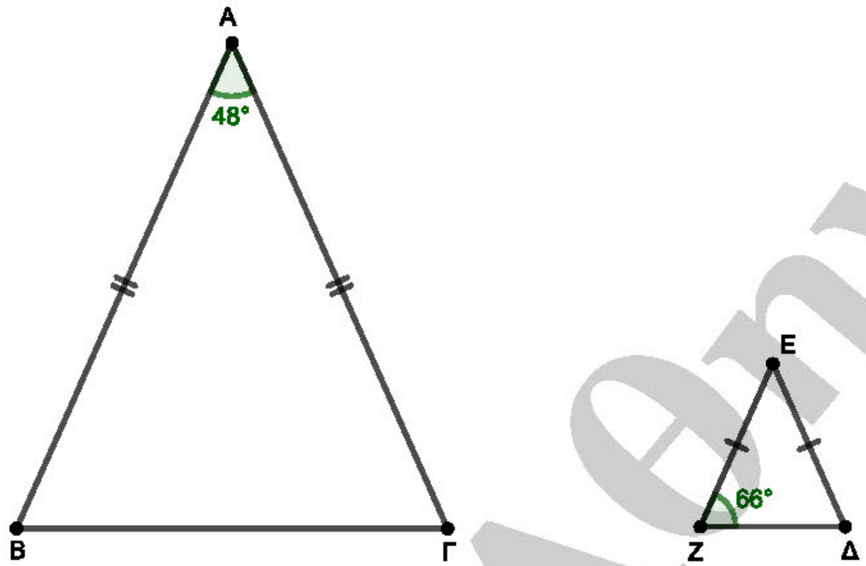
(Μονάδες 12)

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

4 α

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΕΖ), τέτοια ώστε $\widehat{A}$ = 48ο, $\widehat{Z}$ = 66ο και ΑΒ = 3·ΕΔ.



Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα των γωνιών του είναι 180ο. Οπότε καθεμιά από τις γωνίες της βάσης του θα είναι ίση με $\frac{180°-48°}{2} = \frac{132°}{2}$ = 66ο . Στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΖΔ έχουμε ότι η γωνία $\widehat{Z}$ της βάσης του είναι ίση με 66ο , οπότε και η άλλη γωνία της βάσης θα είναι 66ο. Δηλαδή $\widehat{\Delta} = \widehat{Z}$ = 66ο . Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΖΔ έχουν τις δυο γωνίες στη βάση τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι όμοια.

β)

i. Στα όμοια τρίγωνα ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες. Οι λόγοι που σχηματίζονται είναι $\frac{AB}{EZ}$, $\frac{A\Gamma}{E\Delta}$ και $\frac{B\Gamma}{Z\Delta}$ οι οποίοι είναι ίσοι μεταξύ τους, αφού τα τρίγωνα είναι όμοια. Δηλαδή ισχύει ότι: $\frac{AB}{EZ} = \frac{A\Gamma}{E\Delta} = \frac{B\Gamma}{Z\Delta}$.

ii. Ο λόγος των βάσεων είναι ο λόγος $\frac{B\Gamma}{Z\Delta}$ ο οποίος είναι ίσος με το λόγο $\frac{AB}{EZ}$.
$\frac{B\Gamma}{Z\Delta} = \frac{AB}{EZ} = \frac{3 \cdot E\Delta}{EZ} = \frac{3 \cdot EZ}{EZ} = 3$. Άρα ο ζητούμενος λόγος των βάσεων είναι ίσος με 3.

6ο ΓΕΛ Αθηνών

5

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

ΑΒ = 9, ΑΓ =15 και $\widehat{\mathrm{A}} = 48^{o}$, ΖΔ = 12, ΖΕ = 20 και $\hat{\mathrm{Z}} = 48^{o}$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

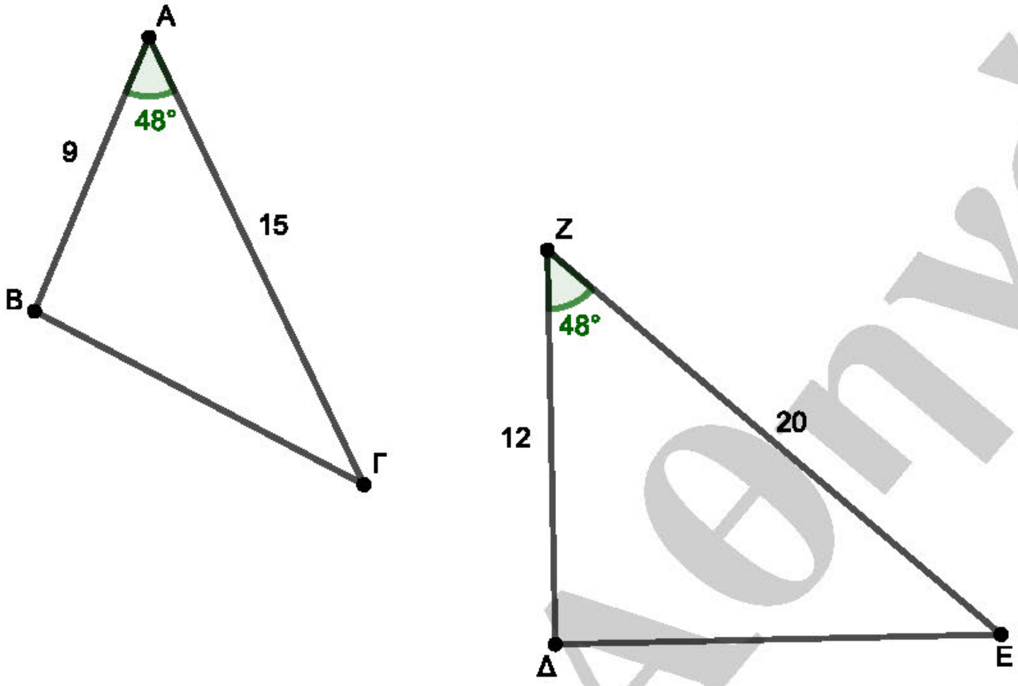
(Μονάδες 12)

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

5 α

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ ώστε $\widehat{A} = \widehat{Z} = 48^o$, ΑΒ=9, ΑΓ=15, ΖΔ=12 και ΖΕ=20.



α) Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{Z}$ που καθεμιά είναι ίση με 48^o, περιέχονται στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΖΔ, ΖΕ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύει $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ και $\frac{A\Gamma}{ZE} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, οπότε $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{ZE}$. Δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ έχουν δυο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές τις πλευρές ίσες, οπότε τα τρίγωνα είναι όμοια.

β)

i. Δύο λόγοι πλευρών των δυο τριγώνων είναι οι $\frac{AB}{Z\Delta}$ και $\frac{A\Gamma}{ZE}$ που αποδείξαμε πριν ότι είναι μεταξύ τους ίσοι αφού καθένας από τους λόγους αυτούς είναι ίσος με $\frac{3}{4}$. Οι τρίτες πλευρές των δύο τριγώνων είναι οι ΒΓ και ΔΕ που είναι ομόλογες αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{Z}$. Οι τρεις λόγοι των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων είναι $\frac{AB}{Z\Delta}$, $\frac{A\Gamma}{ZE}$ και $\frac{B\Gamma}{\Delta E}$.

ii. Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους που όπως αποδείχθηκε στο ερώτημα α) ισούται με $\frac{3}{4}$.

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

6

ΘΕΜΑ 4

Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων Α και Β στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους ΑΒ είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο Ο ώστε η μέτρηση των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μέτρησαν και βρήκαν ΟΑ=20m και ΟΒ=30m. Στις ΟΑ και ΟΒ πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΟΓ=2m και ΟΔ=3m.

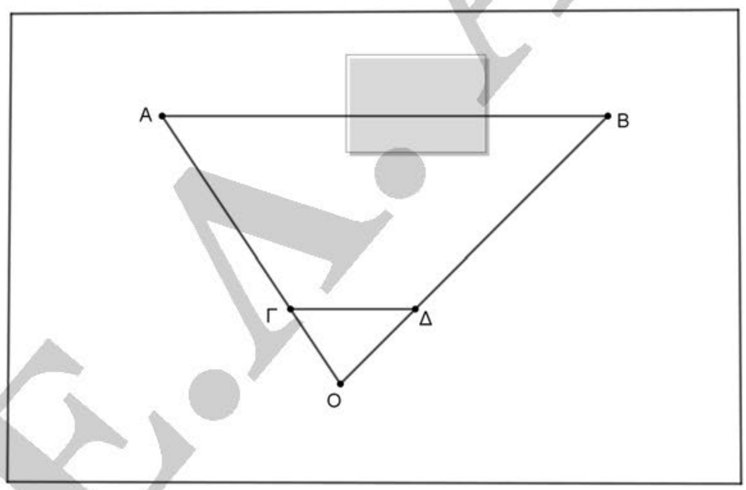
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η ΓΔ είναι παράλληλη με την ΑΒ, (Μονάδες 8)

ii. τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

β) Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων Α και Β αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ.

Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

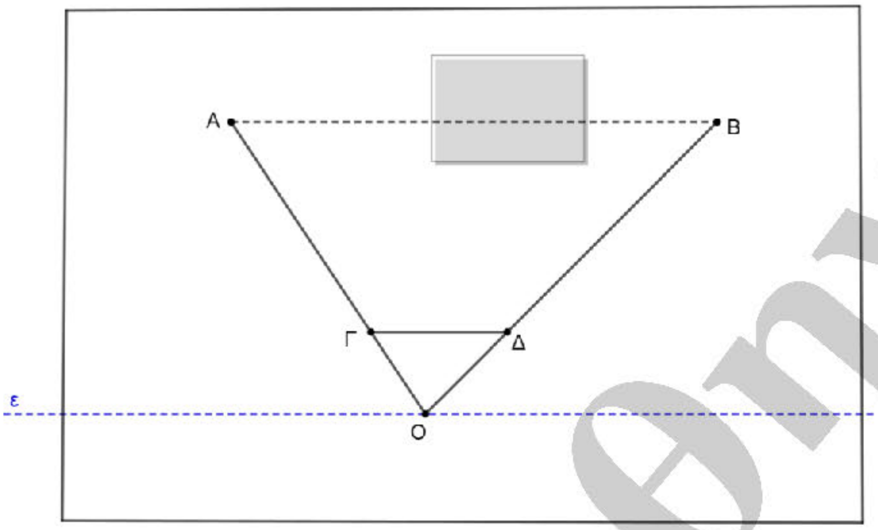


60 ΓΕ.Λ. Αθηνών

6 α

ΛΥΣΗ

Έστω ότι το τμήμα ΑΒ εκφράζει την απόσταση των σημείων Α, Β και ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι παράλληλη με την ΓΔ.



α) Είναι $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$ και $\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$, άρα $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{1}{10}$ (1).

i. Οι παράλληλες ευθείες ε και ΓΔ τέμνονται από τις ΟΓ και ΟΔ στα σημεία Ο,Γ και Ο,Δ αντίστοιχα. Για τα σημεία Α και Β των ευθειών ΟΓ και ΟΔ αντίστοιχα ισχύει $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}$ από σχέση (1). Επομένως σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή προκύπτει ότι οι ευθείες ΓΔ και ΑΒ είναι παράλληλες.

ii. Από σχέση (1) έχουμε ότι $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}$, δηλαδή τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες (κοινή η γωνία $\widehat{Ο}$), άρα είναι όμοια.

β) Εφόσον τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, άρα $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ με $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{1}{10}$ από τη σχέση (1), άρα $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}=\frac{1}{10}$ ή ΑΒ = 10·ΓΔ. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.

60 ΓΕ.Λ. Αθηνών

7

ΘΕΜΑ 4

Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m.

Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα ΟΑ και ΟΓ, με κοινό άκρο Ο, αναπαριστάνουν τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ, τα δε τμήματα ΑΒ και ΓΔ αναπαριστάνουν τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην ΟΓ.

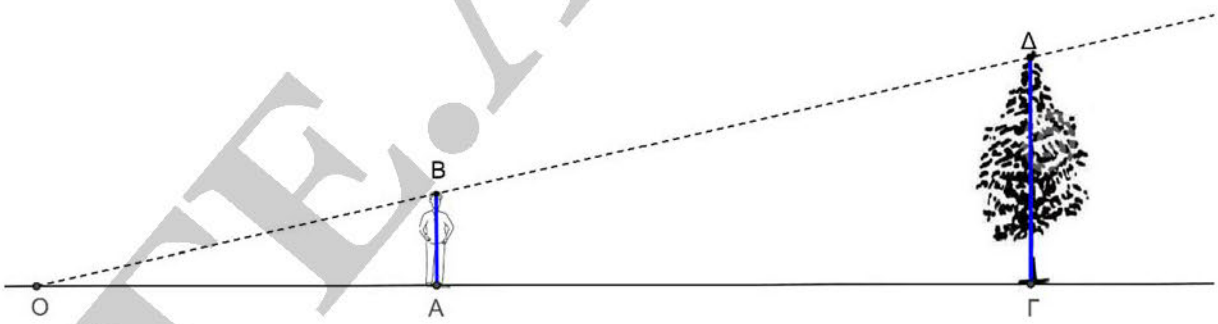
α)

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου. (Μονάδες 8)

β) Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας; Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 5)



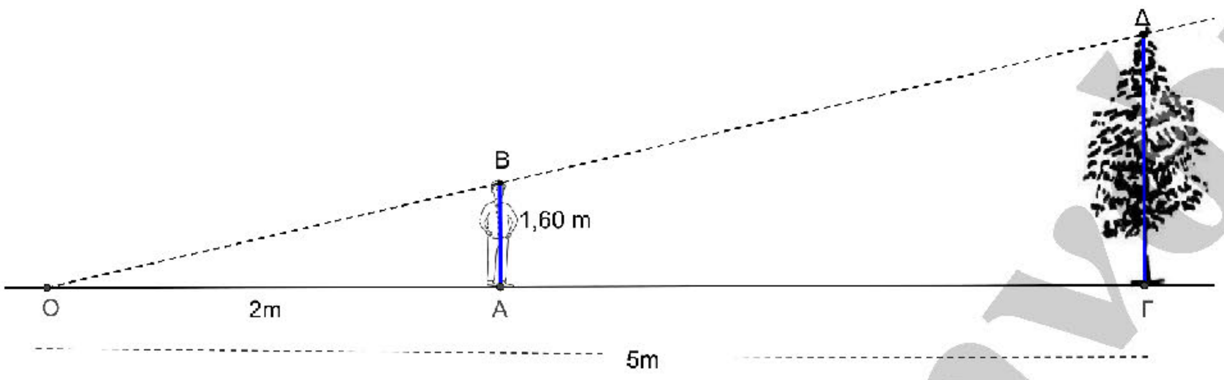
(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

60 ΓΕ.Λ. Αθηνών

7 α

ΛΥΣΗ

α)



i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι σκιές ΟΑ και ΟΓ έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ και τα ύψη είναι κάθετα σε αυτόν. Οπότε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ορθογώνια με $\mathrm{O\widehat{A}B}$ = $\mathrm{O\widehat{\Gamma}\Delta}$ = 90^0 και έχουν την οξεία γωνία $\widehat{\mathrm{O}}$ κοινή, άρα θα είναι όμοια γιατί ως ορθογώνια έχουν μια οξεία γωνίας τους ίση.

Αφού τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή θα ισχύει:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{O}\Delta} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{O}\Gamma} = \frac{2}{5}\,(1)$$

Άρα, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι $\lambda = \frac{2}{5}$.

ii. Από τη σχέση (1) και με αντικατάσταση των δεδομένων θα έχουμε ότι:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{O}\Gamma} = \frac{2}{5} \text{ ή } \frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{5} \text{ ή } \frac{1{,}60}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{5} \text{ ή } \Gamma\Delta = \frac{1{,}6\cdot 5}{2} = 4\,.$$

Άρα το ύψος του δέντρου είναι 4 m.

β) Όσο ο ήλιος δημιουργεί σκιές κατά τη διάρκεια της ημέρας, καθώς κινείται από την ανατολή προς τη δύση, για να συνεχίσουν οι σκιές του μαθητή και του δέντρου να έχουν το ίδιο άκρο (προϋπόθεση του προβλήματος), θα πρέπει ο μαθητής να αλλάζει θέση ως προς τη θέση του δέντρου που παραμένει σταθερή, έτσι ώστε το κοινό άκρο των σκιών, η θέση του μαθητή και η θέση του δέντρου, θεωρούμενα ως σημεία Ο, Α και Γ αντίστοιχα, να είναι συνευθειακά.

Αυτό σημαίνει ότι τα μήκη των σκιών ΟΑ και ΟΓ του μαθητή και του δέντρου θα αλλάζουν. Οι γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\Gamma}$ που σχηματίζουν τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου με την ευθεία ΟΓ θα είναι ορθές.

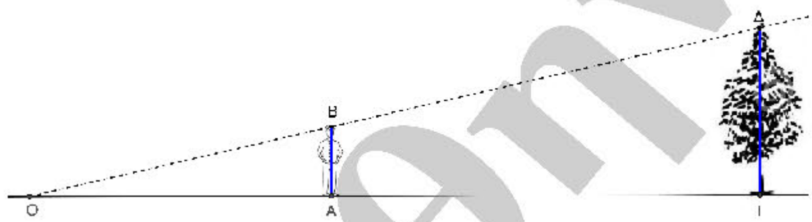
Το μέτρο της γωνίας $\widehat{\mathrm{O}}$ με κορυφή τα κοινά άκρα των σκιών θα αλλάζει, καθώς θα αλλάζει η θέση του ήλιου, αλλά θα συνεχίσει να είναι κοινή γωνία των ορθογωνίων τριγώνων με

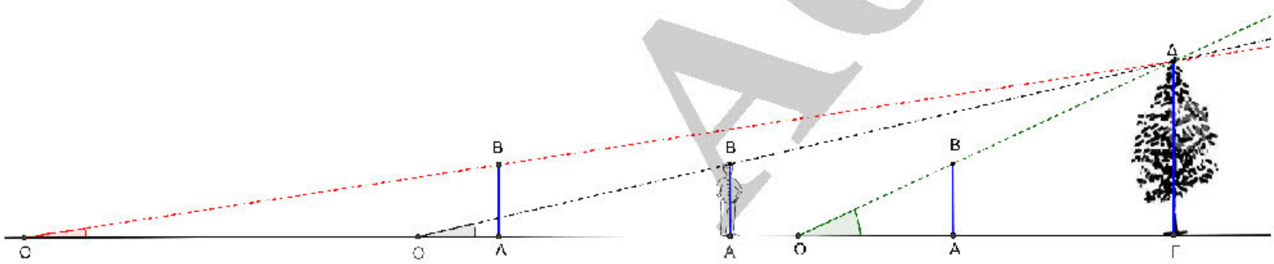
6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

κάθετες πλευρές τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου και των αντίστοιχων σκιών ΟΑ και ΟΓ που τα ύψη δημιουργούν.

Συνεπώς, τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ σε κάθε περίπτωση θα παραμένουν όμοια και θα ισχύει η αναλογία των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{OB}{O\Delta} = \frac{OA}{O\Gamma}$ και εφόσον είναι γνωστά τα μήκη των σκιών, μπορεί να υπολογιστεί το ύψος του δέντρου.

Άρα, ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας.





6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

8

ΘΕΜΑ 2

Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΒΓ και ΑΔ = 1, όπως στο σχήμα.

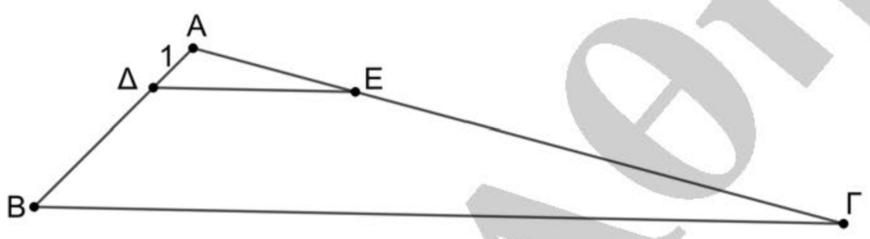
α) Να αποδείξετε ότι $AE \cdot B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 10)

β) Αν επιπλέον ΒΔ = ΑΕ και ΓΕ = 9:

i. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = 3 και ΑΒ = 4. (Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 05)



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

8 α

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, η ευθεία ΔΕ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ σε μέρη ανάλογα. Επομένως $\frac{A\Delta}{B\Delta}=\frac{AE}{\Gamma E}$ ή $\frac{1}{B\Delta}=\frac{AE}{\Gamma E}$ ή $AE\cdot B\Delta=\Gamma E$.

β) i. Από το α) ερώτημα $AE\cdot B\Delta=9$ ή $B\Delta\cdot B\Delta=9$ ή $B\Delta^2=9$ ή $B\Delta=3$.

Επομένως $AB=A\Delta+B\Delta=1+3=4$.

ii. Από την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη προς την ΒΓ έχει τις πλευρές του ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ίσος με τον λόγο $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{1}{4}$.

60 ΓΕ.Λ. Αθηνών

9

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα δίνονται ότι $\hat{B} = \hat{E} = 90^o$, $AE = 8$, $EB = 4$ και $ΔE = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια.

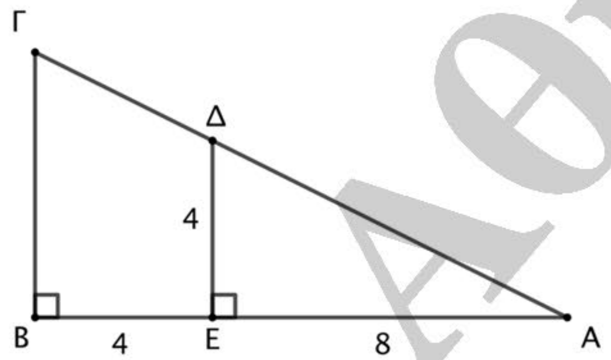
(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

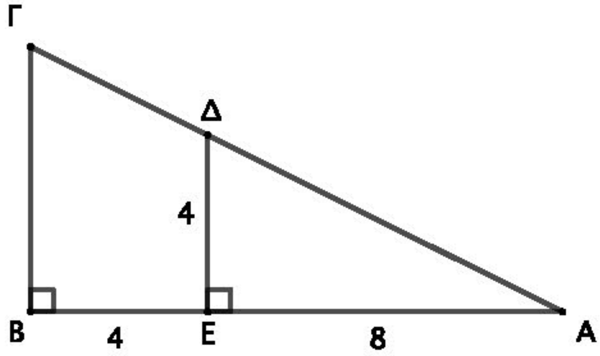
(Μονάδες 05)



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

9 α

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ έχουν $A\hat{E}\Delta = \hat{B}$ (ως ορθές) και κοινή τη γωνία $\hat{A}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{A}$	$A\hat{E}\Delta = \hat{B}$	$A\hat{\Delta}E = \hat{\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΕΔ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AE}{AB}$$

γ) Από την ισότητα

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{AE}{AB}$$

έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{AE}{AB} \quad ή \quad \frac{4}{B\Gamma} = \frac{8}{12} \quad ή \quad 8B\Gamma = 48 \quad ή \quad B\Gamma = 6$$

60 ΓΕ.Λ. Αθηνών

10

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2ΑΓ$ και σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ τέτοιο ώστε $ΑΓ = 2ΓΔ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} \text{ και } \frac{ΑΓ}{ΓΔ}$$

(Μονάδες 8)

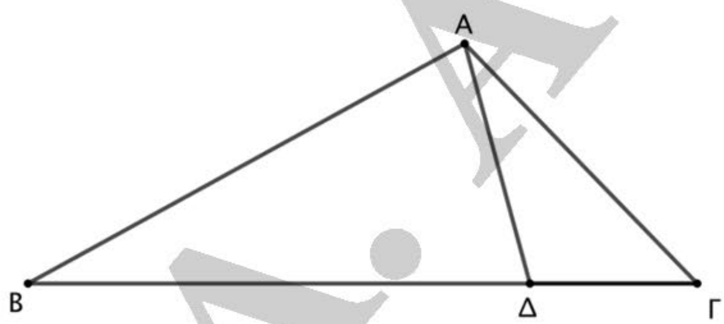
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΑΓ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$Β\hat{Α}Γ = \ldots.. , \qquad \hat{Β} = \ldots..$$

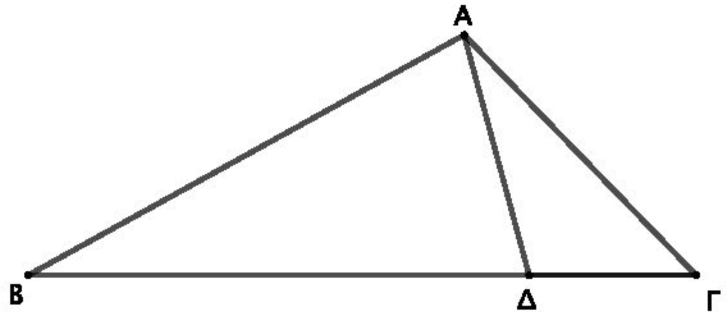
(Μονάδες 8)



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

10 α

ΛΥΣΗ



α) Αφού δίνονται ότι $ΒΓ = 2ΑΓ$ και $ΑΓ = 2ΓΔ$, θα είναι:

$$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = 2 \quad \text{και} \quad \frac{ΑΓ}{ΓΔ} = 2$$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ έχουν:

$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = 2$

$\frac{ΑΓ}{ΓΔ} = 2$

$\hat{Γ}$ (κοινή)

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

β) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

$Β\hat{Α}Γ = Γ\hat{Δ}Α$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.

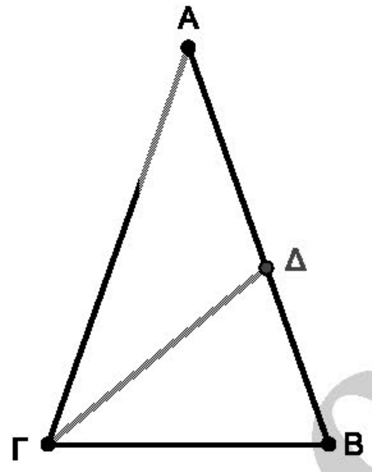
$\hat{Β} = Δ\hat{Α}Γ$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΓΔ αντίστοιχα.

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

11

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ = 36$ και $ΒΓ = 24$. Το



(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΓΔ$.

(Μονάδες 12)

6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

11 α

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΓΒΔ$ έχουν:

i. $\hat{B}$ κοινή γωνία

ii. $\frac{AB}{ΓB} = \frac{BΓ}{BΔ}$ ή $\frac{36}{24} = \frac{24}{16}$ ή $\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, που ισχύει,

επομένως είναι όμοια αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία κοινή. Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΓΒΔ$ είναι $\frac{3}{2}$.

β) Αφού τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΓΒΔ$ είναι όμοια, θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, οπότε

$$\frac{AΓ}{ΓΔ} = \frac{AB}{ΓB} \text{ ή } \frac{36}{ΓΔ} = \frac{36}{24} \text{ ή } ΓΔ = 24 .$$

60 ΓΕ.Λ. Αθηνών

12

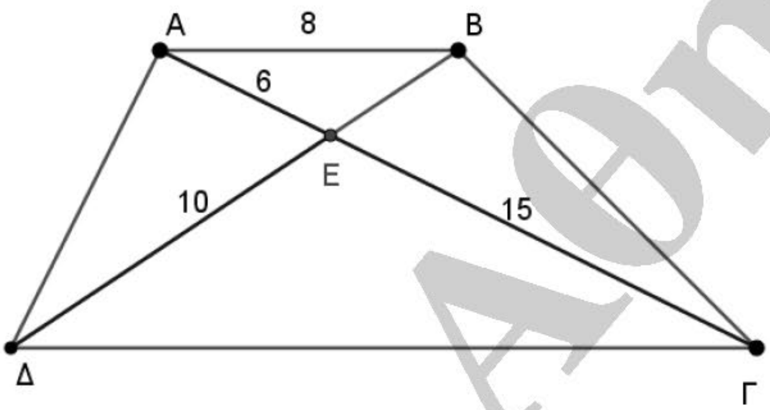
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΔΓ, Ε σημείο τομής των διαγώνιων, ΑΕ = 6, ΑΒ = 8, ΓΕ = 15 και ΔΕ = 10.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ είναι όμοια. (Μονάδες 09)

β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 09)

γ) Να υπολογίστε τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ. (Μονάδες 07)



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

12 α

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ έχουν:

$\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ.

$\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}_1$, σαν εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ.

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια, αφού έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

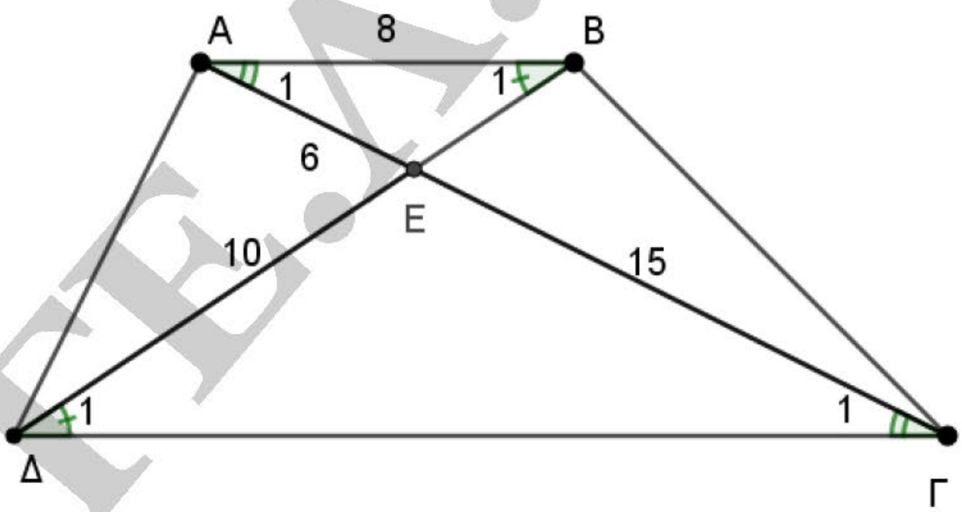
β) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΓΕΔ συμπεραίνουμε ότι οι αντίστοιχες πλευρές θα είναι ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές φαίνονται στον πίνακα.

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$	$\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$	$A\widehat{E}B = \Gamma\widehat{E}\Delta$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΕ	ΒΕ	ΑΕ	ΑΒ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΓΕΔ	ΔΕ	ΓΕ	ΔΓ

Επομένως θα ισχύει: $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{BE}{E\Delta}$ (1).

γ) Από την (1) έχουμε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{BE}{E\Delta}$ ή $\frac{8}{\Gamma\Delta} = \frac{6}{15} = \frac{BE}{10}$.

6ΓΔ = 8·15, άρα 6ΓΔ = 120, άρα ΓΔ = 20 και 15ΒΕ = 6·10, άρα 15ΒΕ = 60, άρα ΒΕ =4.



60 ΓΕΛ Αθηνών

13

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι $ΑΕ = 5$, $ΑΓ = 4$, $ΕΓ = 2$, $ΔΕ = 6$, $ΒΕ = 15$ και $ΒΔ = 12$.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{ΒΔ}{ΑΓ}, \frac{ΔΕ}{ΕΓ}, \frac{ΒΕ}{ΑΕ}$$

(Μονάδες 9)

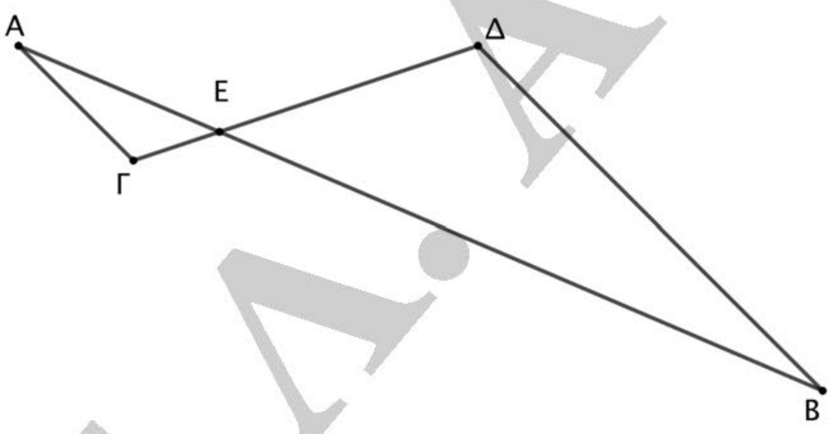
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια.

(Μονάδες 8)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΓ και ΒΕΔ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\hat{Α} = \ldots\ldots, \qquad \hat{Γ} = \ldots\ldots, \qquad Α\hat{Ε}Γ = \ldots\ldots$$

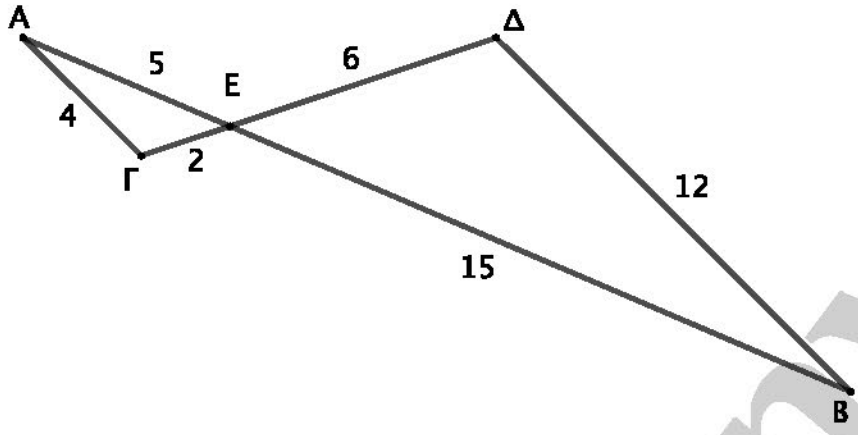
(Μονάδες 8)



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

13 α

ΛΥΣΗ



α) Είναι:

$$\frac{ΒΔ}{ΑΓ}=\frac{12}{4}=3\,,\qquad \frac{ΔΕ}{ΕΓ}=\frac{6}{2}=3\,,\qquad \frac{ΒΕ}{ΑΕ}=\frac{15}{5}=3$$

β) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια διότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

$\hat{Α} = \hat{Β}$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΕΓ και ΔΕ αντίστοιχα

$\hat{Γ} = \hat{Δ}$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΕ και ΒΕ αντίστοιχα

$Α\hat{Ε}Γ = Β\hat{Ε}Δ$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα

60 ΓΕ.Λ. Αθηνών

14

ΘΕΜΑ 2

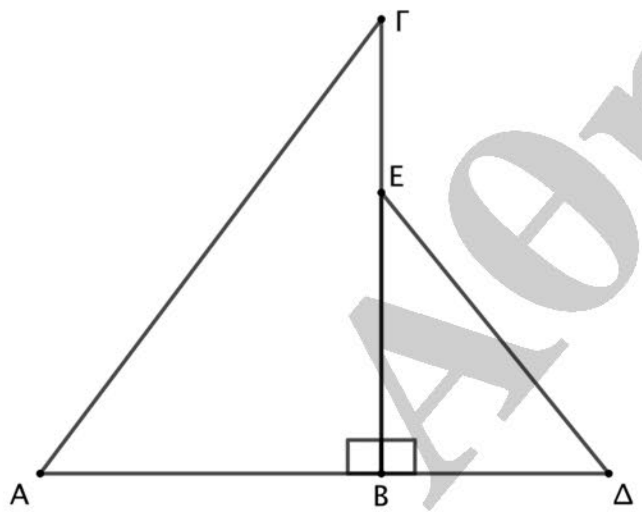
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $A\Gamma = 36$, $B\Delta = 16$ και $E\Delta = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.

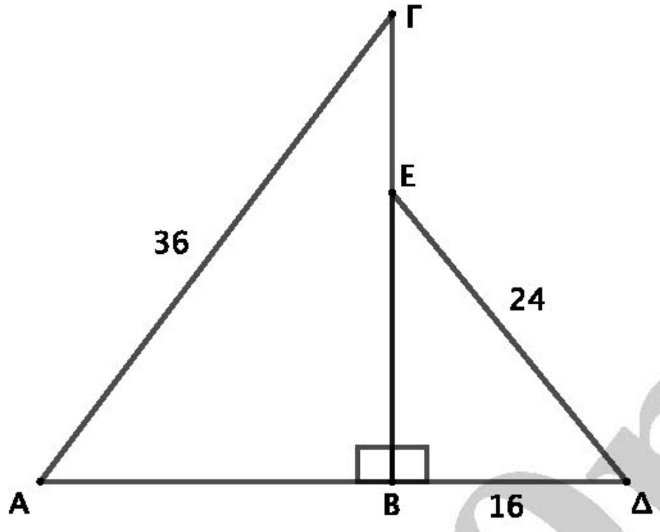
(Μονάδες 10)



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

14 α

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta}$ (από υπόθεση) και $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}E = 90^o$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{\Delta}$	$A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}E$	$A\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{E}B$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΔΒΕ	ΒΕ	ΕΔ	ΒΔ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{A\Gamma}{E\Delta} = \frac{AB}{B\Delta} \text{ ή } \frac{36}{24} = \frac{AB}{16} \text{ ή } AB = \frac{36.16}{24} = 24$$

60 ΓΕ.Λ. Αθηνών

15

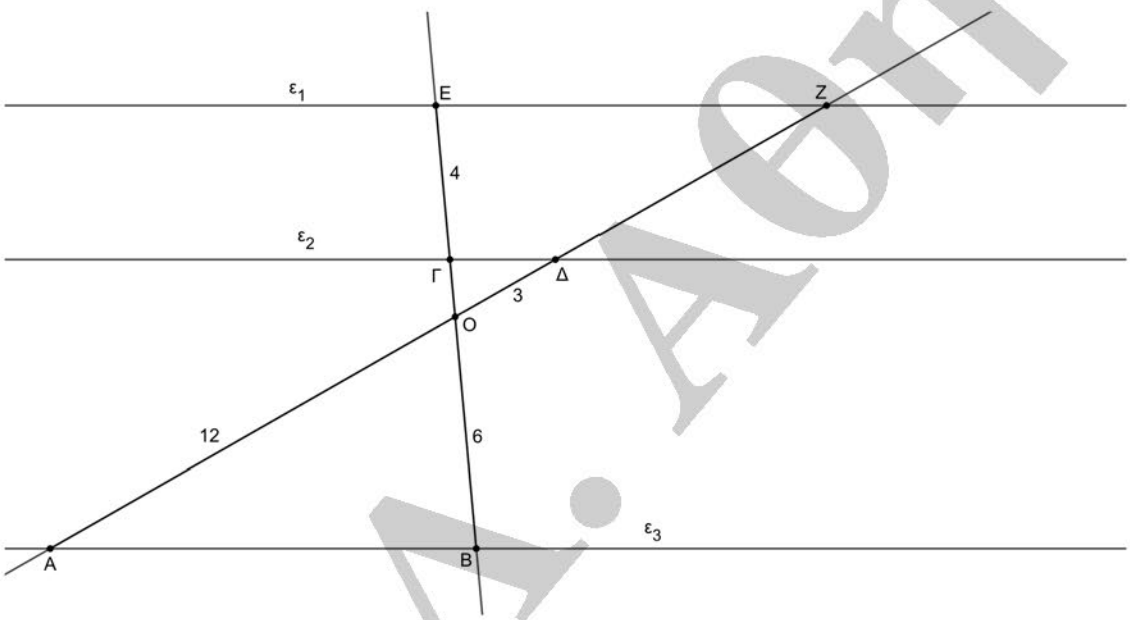
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$ είναι παράλληλες. Δίνονται ότι ΓΕ = 4, ΟΔ = 3, ΟΑ = 12, ΟΒ = 6.

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΟΓ και ΔΖ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ είναι όμοια. (Μονάδες 09)

γ) Αν ΟΓ = 1.5 και ΔΖ = 8, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΕΖ}{ΑΒ}$. (Μονάδες 06)



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών

15 α

ΛΥΣΗ

α) Φέρνουμε ε_4 // ε_2 που διέρχεται από το Ο. Τότε από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε_2, ε_4, ε_3 που τέμνονται από τις ΓΒ και ΔΑ, έχουμε: $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{O\Delta}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{O\Gamma}}$,

επομένως $\frac{12}{3} = \frac{6}{\mathrm{O\Gamma}}$, άρα $12 \cdot \mathrm{O\Gamma} = 6 \cdot 3$ ή ΟΓ = 1.5.

Από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε_2, ε_4, ε_1 που τέμνονται από τις ΟΕ και ΟΖ, έχουμε: $\frac{\mathrm{O\Gamma}}{\mathrm{\Gamma E}} = \frac{\mathrm{O\Delta}}{\mathrm{\Delta Z}}$, επομένως $\frac{1,5}{4} = \frac{3}{\mathrm{\Delta Z}}$, άρα $1,5 \cdot \mathrm{\Delta Z} = 4 \cdot 3$ ή ΔΖ = 8.

β) Τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουν:

$\mathrm{E\widehat{Z}O} = \mathrm{B\widehat{A}O}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΖΑ.

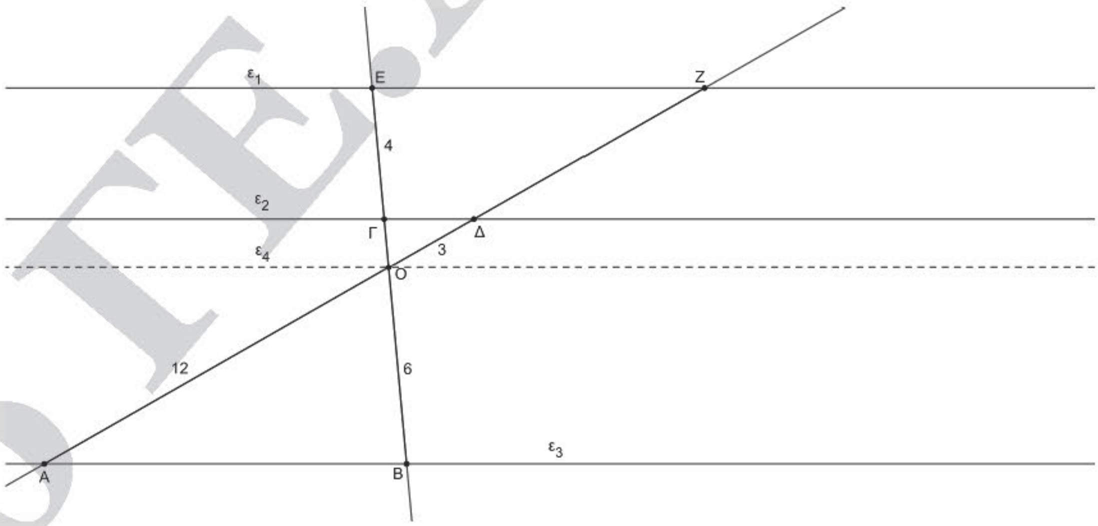
$\mathrm{Z\widehat{E}O} = \mathrm{A\widehat{B}O}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΕΒ.

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια επειδή έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουμε:

	Ίσες γωνίες		
	$\mathrm{E\widehat{Z}O} = \mathrm{B\widehat{A}O}$	$\mathrm{Z\widehat{E}O} = \mathrm{A\widehat{B}O}$	$\mathrm{E\widehat{O}Z} = \mathrm{B\widehat{O}A}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΟΒ	ΟΒ	ΟΑ	ΑΒ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΖΟΕ	ΟΕ	ΟΖ	ΕΖ

$\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{OZ}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{O\Delta} + \mathrm{\Delta Z}}{\mathrm{OA}} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$.



6ο ΓΕ.Λ. Αθηνών