Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

1

ΘΕΜΑ 2

Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι : $\alpha=7$, $\beta=3$ και $\gamma=5$.

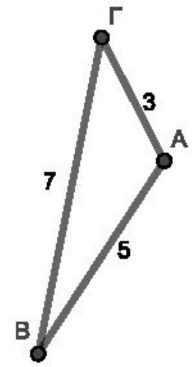
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)

1 α

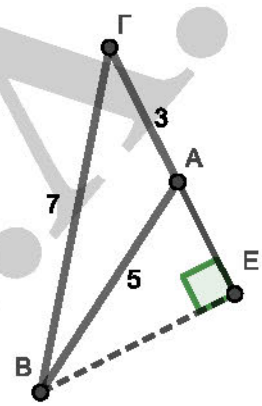
ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών ΑΒ = γ = 5, ΑΓ = β = 3 και ΒΓ = α =7. Συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του.



Παρατηρούμε ότι $\alpha^2 = 7^2 = 49$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$. Δηλαδή ισχύει ότι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία τη γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά α , δηλαδή αμβλεία είναι η γωνία Α.

β)

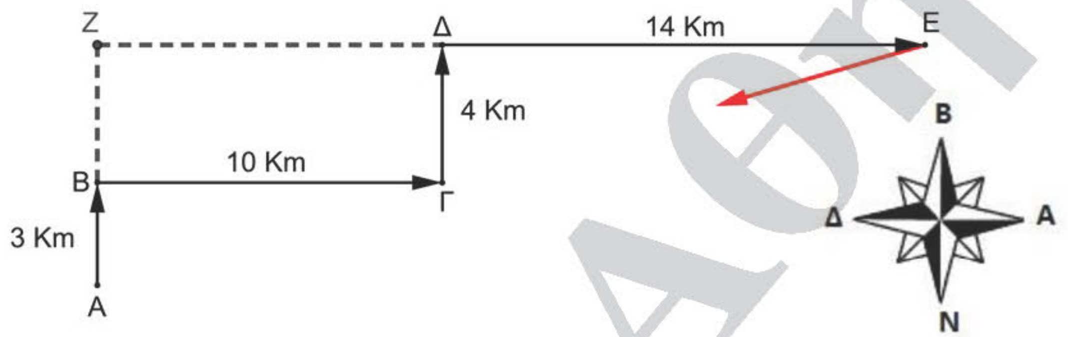


Για να σχεδιάσουμε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ φέρουμε κάθετο τμήμα από την κορυφή Β προς το φορέα της πλευράς ΑΓ. Αν Ε είναι το σημείο τομής της καθέτου αυτής με το φορέα της ΑΓ, τότε η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Από τη γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος για την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία έχουμε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\cdot\beta\cdot AE$ ή $7^2 = 3^2 + 5^2 + 2\cdot 3\cdot AE$ ή $49 = 34 + 6\cdot AE$ ή $49 - 34 = 6\cdot AE$ ή $15 = 6\cdot AE$ ή $AE = \frac{15}{6}$.

2

ΘΕΜΑ 4

Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



α)

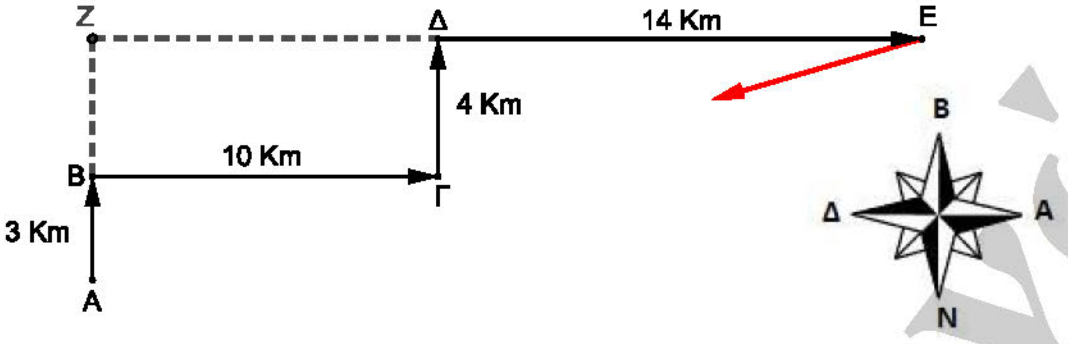
i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε; (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

2 α

ΛΥΣΗ



α)

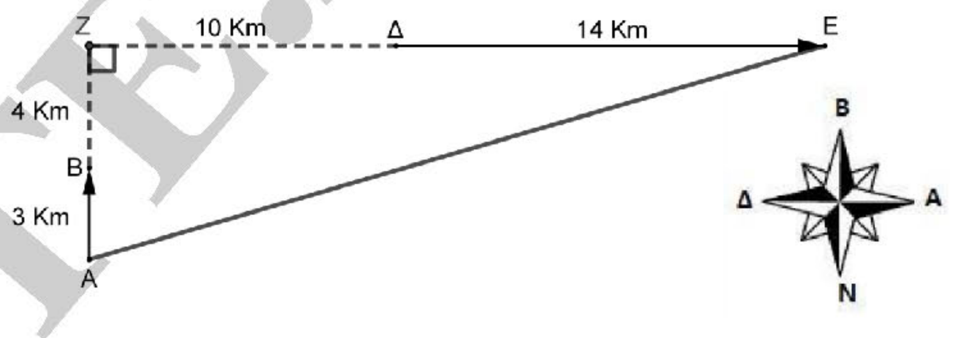
i. Το πρώτο κινητό που έκανε τη διαδρομή ΑΒΓΔΕ διάνυσε συνολικά (3+10+4+14) km = 31 km.

Για το δεύτερο κινητό που έκανε τη διαδρομή ΑΖΕ έχουμε:

ΑΖ//ΓΔ γιατί η κίνηση από το σημείο Α στο σημείο Ζ είναι βόρεια όπως και η κίνηση από το σημείο Γ στο σημείο Δ. Επίσης, η κίνηση από το σημείο Ζ στο σημείο Ε είναι ανατολικά όπως και η κίνηση από το σημείο Β στο σημείο Γ, άρα ΖΕ//ΒΓ. Στο τετράπλευρο ΒΓΔΖ οι απέναντι πλευρές τους είναι παράλληλες, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι γωνίες του είναι ορθές είναι ορθογώνιο.

Άρα ΒΖ=ΓΔ=4 και ΖΔ=ΒΓ=10. Η συνολική διαδρομή του δεύτερου κινητού είναι (7+10+14) km =31km

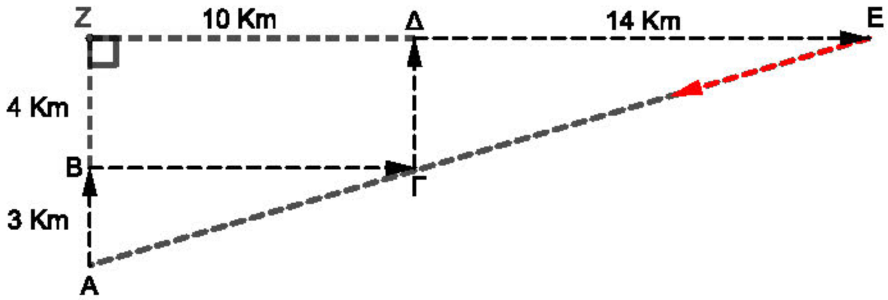
ii.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ με $\hat{Z}=90^o$ εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$EA^2 = AZ^2 + ZE^2$ ή $EA^2 = 7^2 + 24^2$, δηλαδή $EA^2 = 49 + 576$, οπότε $EA^2 = 625$ ή ΕΑ = 25 km.

β) Αν τα κινητά, κατά την επιστροφή τους από το σημείο Ε στο Α περάσουν από το σημείο Γ, τότε τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά.



Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή έχουμε ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

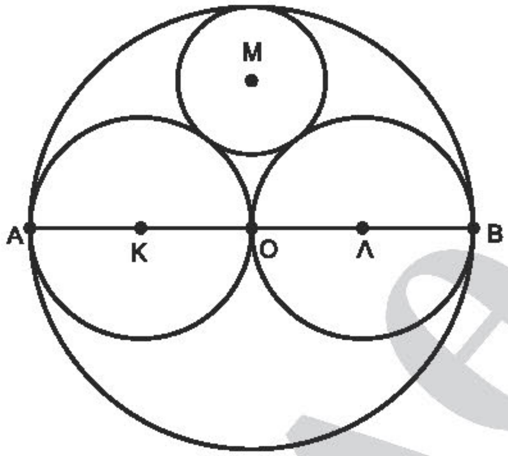
Το τρίγωνο ΓΔΕ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΕ και ΖΕ του ΑΖΕ και την παράλληλη ΓΔ προς την πλευρά του ΑΖ. Επομένως τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΑΖΕ έχουν πλευρές ανάλογες, άρα $\frac{\Gamma\Delta}{AZ}=\frac{\Delta E}{ZE}$ ή $\frac{4}{7}=\frac{14}{24}$ ή $\frac{4}{7}=\frac{7}{12}$ ή $48=49$, που είναι άτοπο.

Επομένως, τα κινητά κατά την επιστροφή τους από το Ε δεν περνούν από το Γ.

3

ΘΕΜΑ 4

Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ο. Ένας τρίτος κύκλος (Μ,ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων Κ και Λ. Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των κύκλων με κέντρα Κ, Λ, Μ και Ο και στη στήλη Β τα μήκη των διακέντρων αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στην κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίσεις. (Μονάδες 06)

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Διάκεντρος	Μήκος
1. ΚΛ	i. R
2. ΛΜ	ii. 2R
3. ΟΜ	iii. R+ρ
	iv. 2R-ρ

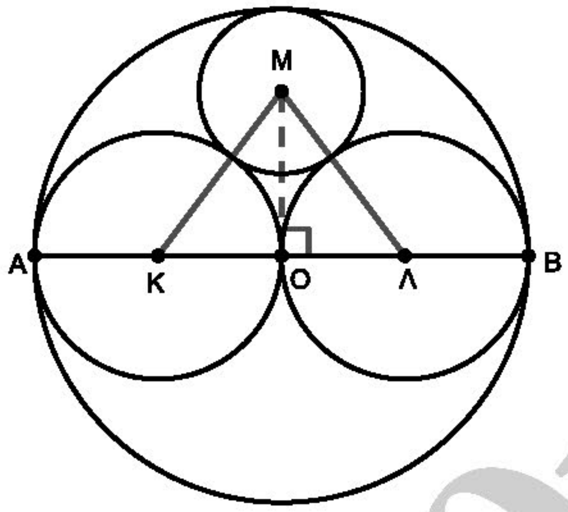
β)

i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα ΜΟ είναι το ύψος προς τη βάση του. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου Μ ως συνάρτηση του R, όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων Κ και Λ. (Μονάδες 13)

3 α

ΛΥΣΗ



α) 1 $\rightarrow$ ii., 2 $\rightarrow$ iii. , 3 $\rightarrow$ iv.

Δηλαδή ΚΛ=2R γιατί οι κύκλοι κέντρων Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους. Ομοίως ΛΜ= R+ρ γιατί οι κύκλοι κέντρων Λ και Μ εφάπτονται εξωτερικά. Τέλος ΟΜ=2R-ρ γιατί ο κύκλος κέντρου Ο με τον κύκλο κέντρου Μ εφάπτονται εσωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους θα ισούται με τη διαφορά των ακτινών τους.

β)

i. Οι κύκλοι (Κ,R) και (Μ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους θα ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους, δηλαδή ΚΜ = R+ρ = ΛΜ από το ερώτημα α). Άρα το τρίγωνο ΜΚΛ έχει δύο πλευρές ίσες, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΚΛ. Το σημείο Ο είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ γιατί ΟΚ=ΟΛ=R, επομένως το τμήμα ΜΟ είναι διάμεσος της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και ύψος, δηλαδή ΟΜ$\perp$ΚΛ.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΛ με $\widehat{O} = 90^\circ$ εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε: $OM^2 + O\Lambda^2 = \Lambda M^2$

$(2R-\rho)^2 + R^2 = (R+\rho)^2$

$4R^2 - 4R\rho + \rho^2 + R^2 = R^2 + 2R\rho + \rho^2$

$4R^2 = 6R\rho$

$2R = 3\rho$

$\rho = \frac{2R}{3}$.

4

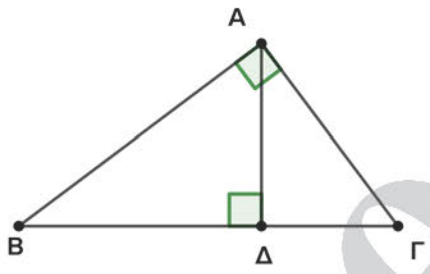
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{\text{A}} = 90^{o}$) με ΒΓ = 5 και ΑΒ = 4. Να υπολογίσετε:

α) την πλευρά ΑΓ. (Μονάδες 9)

β) την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) το ύψος ΑΔ. (Μονάδες 8)



4 α

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$A\Gamma \;\; = B\Gamma \;\; - AB \;\; = 5 \;\; - 4 \;\; = 25 - 16 = 9$, άρα $A\Gamma = 3$.

β) Έχουμε $AB \;\; = B\Delta \cdot B\Gamma$, οπότε $B\Delta = \frac{AB^2}{B\Gamma} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{5}}$.

γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $AB \;\; = A\Delta \;\; + B\Delta$, οπότε

$A\Delta \;\; = AB \;\; - B\Delta \;\; = 4 \;\; - \frac{16^2}{5^2} = 16 - \frac{\mathbf{16 \cdot 16}}{\mathbf{25}} = \frac{\mathbf{16 \cdot 25 - 16 \cdot 16}}{\mathbf{25}} =$

$\frac{\mathbf{16 \cdot (25-16)}}{\mathbf{25}} = \frac{\mathbf{16 \cdot 9}}{\mathbf{25}}$, άρα $B\Delta = \frac{\mathbf{4 \cdot 3}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}$.

5

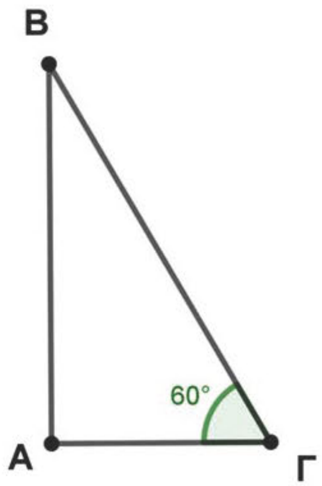
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 4, ΑΓ = 2 και $\widehat{\Gamma} = 60^o$.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)



5 α

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$\mathrm{B}^2 = \quad \Gamma^2 + \mathrm{B}\Gamma^2 - 2 \cdot \mathrm{A}\Gamma \cdot \mathrm{B}\Gamma \cdot \text{συν}\, \Gamma = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\mathbf{1}}{2} = 12\,,$$

άρα $\mathrm{AB} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

β) Έχουμε $\mathrm{B}\Gamma^2 = 16$ και $\quad \mathrm{B}^2 + \quad \Gamma^2 = 12 + 4 = 16.$

Επομένως $\mathrm{B}\Gamma^2 = \quad \mathrm{B}^2 + \quad \Gamma^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ.

γ) Επειδή $\widehat{\mathrm{A}} = 90^o$ έχουμε $(\mathrm{AB}\Gamma) = \frac{\mathbf{1}}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A}\Gamma = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

6

ΘΕΜΑ 4

Τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $\mathrm{A\Gamma}$ αντίστοιχα, ενός τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Δίνεται ότι $\mathrm{AB} = 9$, $\mathrm{A\Gamma} = 12$, $\mathrm{A\Delta} = 4$ και $\mathrm{AE} = 3$.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι $\mathrm{B\Gamma} = 15$, (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι:

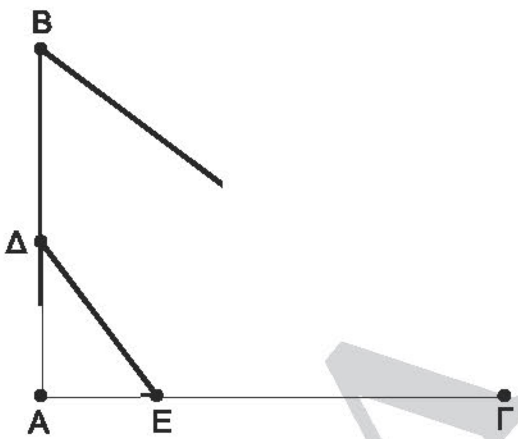
i. Το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

ii. $\Delta\mathrm{E} = 5$. (Μονάδες 6)

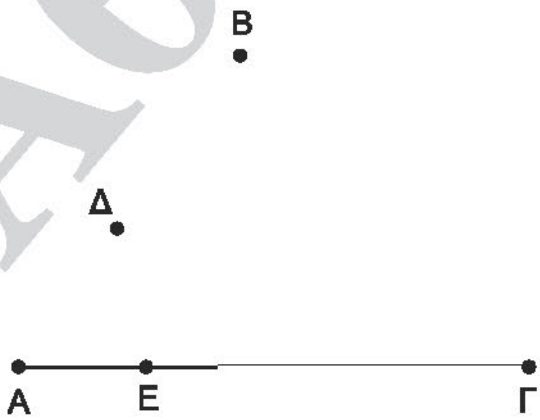
β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι $\mathrm{B\Gamma} = 10$, (Σχήμα 2). Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ δεν είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

ii. $\Delta\mathrm{E} = \frac{10}{3}$. (Μονάδες 6)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

6 α

ΛΥΣΗ

α)

i. Στο τρίγωνο $\quad B\Gamma$ είναι $AB = 9$, $A\Gamma = 12$ και $B\Gamma = 15$, άρα έχουμε
$B\Gamma^2 = 15^2 = 225$ και $\quad B^2 + \quad \Gamma^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$,
άρα $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$.
Επομένως από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι $\widehat{\ } = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $\quad B\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

ii. Επειδή $\widehat{\ } = 90^\circ$, το τρίγωνο $\quad \Delta E$ είναι ορθογώνιο, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $\Delta E^2 = \quad \Delta^2 + \quad E^2$ ή $\Delta E^2 = 4^2 + 3^2$ ή $\Delta E^2 = 25$ ή $\Delta E^2 = 5^2$ ή $\Delta E = 5$.

β)

i. Στο τρίγωνο $\quad B\Gamma$ είναι $AB = 9$, $A\Gamma = 12$ και $B\Gamma = 10$, άρα έχουμε
$\quad \Gamma^2 = 12^2 = 144$ και $\quad B^2 + B\Gamma^2 = 9^2 + 10^2 = 81 + 100 = 181$
άρα $A\Gamma^2 < \quad B^2 + B\Gamma^2$, οπότε $\widehat{B} < 90^\circ$. Η οξεία γωνία $\widehat{B}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου $\quad B\Gamma$ αφού βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά την $A\Gamma$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο και όχι ορθογώνιο.

ii. Τα τρίγωνα $\quad \Delta E$ και $A\Gamma B$ έχουν
$\frac{\mathbf{A\Delta}}{\mathbf{A\Gamma}} = \frac{4}{12} = \frac{\mathbf{1}}{3}$, $\frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{AB}} = \frac{3}{9} = \frac{\mathbf{1}}{3}$ και τη γωνία $\widehat{A}$ κοινή,
άρα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

Άρα τα τρίγωνα $\quad \Delta E$ και $\quad \Gamma B$ θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ανάλογες με λόγο $\frac{\mathbf{1}}{3}$.

Επομένως $\frac{\mathbf{\Delta E}}{\mathbf{B\Gamma}} = \frac{\mathbf{1}}{3}$ ή $\frac{\mathbf{\Delta E}}{10} = \frac{\mathbf{1}}{3}$ ή $\Delta E = \frac{10}{3}$.

7

ΘΕΜΑ 2

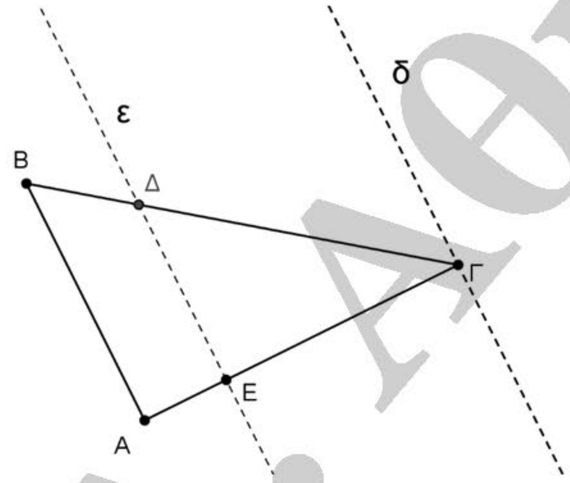
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 9, ΓΑ = 12 και ΓΒ = 15 και ευθείες ε, δ παράλληλες στην ΑΒ, όπως αυτές του σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του. (Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τις πλευρές ΓΑ, ΓΒ σε σημεία Ε και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε ΕΑ = 4 και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ, τότε να υπολογίσετε

i. το τμήμα ΔΒ, (Μονάδες 8)

ii. τις πλευρές του τριγώνου ΔΕΓ. (Μονάδες 9)



7 α

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η μεγαλύτερη πλευρά του είναι η ΓΒ =15. Θα εξετάσουμε αν το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του ΑΒ και ΑΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς ΓΒ.

$$ΓΒ^2 = 15^2 = 225$$

$$ΑΒ^2 + ΓΑ^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

Άρα $ΑΒ^2 + ΓΑ^2 = ΓΒ^2$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο $\widehat{Α}=90^o$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓΒ = 15.

β)

i. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε, δ και ΑΒ που τέμνουν τις ΓΑ και ΓΒ θα ισχύει η αναλογία $\frac{ΓΔ}{ΓΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΑ} = \frac{ΓΒ}{ΓΑ}$ ή $\frac{ΓΔ}{ΓΕ} = \frac{ΔΒ}{4} = \frac{15}{12}$, αφού ΓΑ = 12 και ΓΒ = 15 και ΕΑ = 4 από τα δεδομένα. Οπότε από την ισότητα $\frac{ΔΒ}{4} = \frac{15}{12}$ έχουμε ότι $12 \cdot ΔΒ = 4 \cdot 15$ ή ΔΒ = 5.

ii. Είναι ΓΔ = ΓΒ – ΔΒ = 15 – 5 = 10 και ΓΕ = ΓΑ – ΕΑ = 12 – 4 = 8.

Το τρίγωνο ΔΕΓ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΓΑ και ΓΒ του τριγώνου ΑΒΓ και την ευθεία ε που είναι παράλληλη στην πλευρά του ΑΒ, οπότε θα έχει πλευρές ανάλογες στις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή θα ισχύει $\frac{ΓΔ}{ΓΒ} = \frac{ΓΕ}{ΓΑ} = \frac{ΕΔ}{ΑΒ}$ (1) όπου ΑΒ = 9, ΓΑ = 12, ΓΔ = 10 και ΓΕ = 8.

Οπότε η σχέση (1) γίνεται $\frac{10}{15} = \frac{8}{12} = \frac{ΕΔ}{9}$ και από την ισότητα $\frac{10}{15} = \frac{ΕΔ}{9}$ προκύπτει ότι ΕΔ = 6.

8

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι $ΒΓ = α$, $ΑΓ = β$ και $ΑΒ = γ$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $α = 2R$.

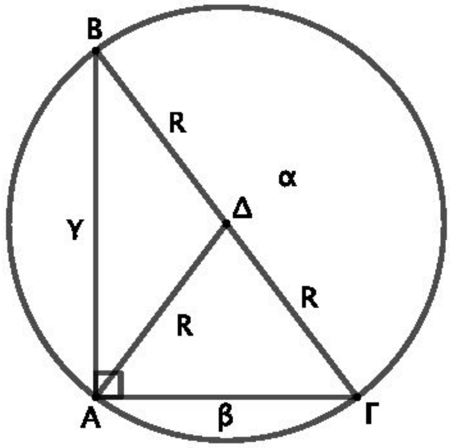
(Μονάδες 12)

β) $α^2 + β^2 + γ^2 = 8R^2$.

(Μονάδες 13)

8 α

ΛΥΣΗ



α) Στο σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αφού η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{A}$ είναι ορθή, τότε θα βαίνει σε ημικύκλιο. Επομένως, η υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. Άρα $ΒΓ = α = 2R$.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2 \quad ή \quad α^2 = β^2 + γ^2$$

Οπότε:

$$α^2 + β^2 + γ^2 = α^2 + α^2 = 2α^2 = 2 \cdot (2R)^2 = 2 \cdot 4R^2 = 8R^2$$

9

ΘΕΜΑ 4

Τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση λ%, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάστε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α, 8β και 6γ. (Μονάδες 7)

9 α

ΛΥΣΗ

α) Αφού τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, τότε έχουμε την αναλογία:

$$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{3}$$

Αν ονομάσουμε τους ίσους λόγους κ (κ > 0), τότε έχουμε:

$$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{3}=\kappa \;\text{ ή }\; \begin{Bmatrix} \dfrac{\alpha}{5}=\kappa \\ \dfrac{\beta}{4}=\kappa \\ \dfrac{\gamma}{3}=\kappa \end{Bmatrix} \;\text{ ή }\; \begin{Bmatrix} \alpha=5\kappa \\ \beta=4\kappa \\ \gamma=3\kappa \end{Bmatrix}$$

Αφού κ > 0 το μεγαλύτερο μήκος είναι εκείνο που έχει μέτρο 5κ, τότε:

$$\alpha^2=(5\kappa)^2=25\kappa^2$$

$$\beta^2+\gamma^2=(4\kappa)^2+(3\kappa)^2=16\kappa^2+9\kappa^2=25\kappa^2$$

συγκρίνοντας τις παραπάνω ισότητες έχουμε: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, δηλαδή τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχηματίζουν τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α.

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχεδιαστούν πάνω σε ένα χαρτί που φωτοτυπηθεί με μεγέθυνση λ%, τότε τα μέτρα αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων θα πολλαπλασιαστούν επί $\frac{\lambda}{100}$ (λ>100). Έτσι προκύπτουν νέα ευθύγραμμα τμήματα με μήκη που έχουν μέτρα:

$$\frac{\lambda}{100}\cdot\alpha,\; \frac{\lambda}{100}\cdot\beta \;\text{ και }\; \frac{\lambda}{100}\cdot\gamma.$$

Για τα νέα ευθύγραμμα τμήματα ισχύει:

$$(\frac{\lambda}{100}\cdot\beta)^2+(\frac{\lambda}{100}\cdot\gamma)^2=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\beta^2+\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\gamma^2=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2(\beta^2+\gamma^2)=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\alpha^2=(\frac{\lambda}{100}\cdot\alpha)^2$$

δηλαδή ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, συνεπώς σχηματίζουν πάλι νέο ορθογώνιο τρίγωνο.

γ) Επειδή τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, έχουμε από το (α) ερώτημα ότι:

$$\alpha=5\kappa,\; \beta=4\kappa \text{ και } \gamma=3\kappa$$

Έστω ότι σχηματίζεται τρίγωνο με τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν μήκη με μέτρα 10α, 8β και 6γ, τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα και θα έχουμε:

$$10\alpha<8\beta+6\gamma \Leftrightarrow 10\cdot5\kappa<8\cdot4\kappa+6\cdot3\kappa \Leftrightarrow 50\kappa<32\kappa+18\kappa$$

$$\Leftrightarrow 50\kappa<50\kappa, \text{ άτοπο}$$

επομένως δεν σχηματίζεται τέτοιο τρίγωνο.

10

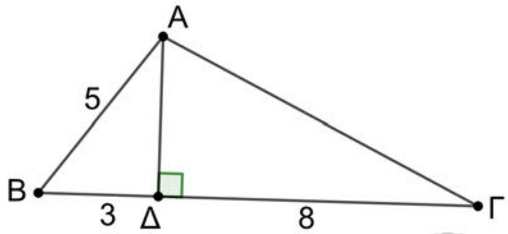
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 και ΑΔ το ύψος του από την κορυφή Α. Αν ΒΔ = 3 και ΓΔ = 8 να αποδείξετε ότι:

α) $\text{Α}\Delta = 4$. (Μονάδες 07)

β) $\text{Α}\Gamma = \sqrt{80}$. (Μονάδες 08)

γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)



10 α

ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $\Delta = 90^\circ$ οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$A B^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ ή $A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2$ ή $A\Delta^2 = 5^2 - 3^2$ ή $A\Delta^2 = 16$ ή $A\Delta = 4$.

β) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο με $\Delta = 90^\circ$ οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = 4^2 + 8^2$ ή $A\Gamma^2 = 16 + 64$ ή $A\Gamma^2 = 80$ ή $A\Gamma = \sqrt{80}$.

γ) Για τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$AB = 5$, $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = 3 + 8 = 11$ και $A\Gamma = \sqrt{80}$. Επίσης $B\Gamma^2 = 121$ και $A\Gamma^2 = (\sqrt{80})^2 = 80$.

Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ είναι η ΒΓ, εφόσον $B\Gamma^2 > A\Gamma^2$.

Συνεπώς η $\hat{A}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ, εφόσον βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά του ΒΓ.

Επιπλέον $AB^2 + A\Gamma^2 = 25 + 80 = 105$ και $B\Gamma^2 = 121$ οπότε είναι $B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2$, άρα η γωνία $\hat{A} > 90^\circ$ επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

11

ΘΕΜΑ 2

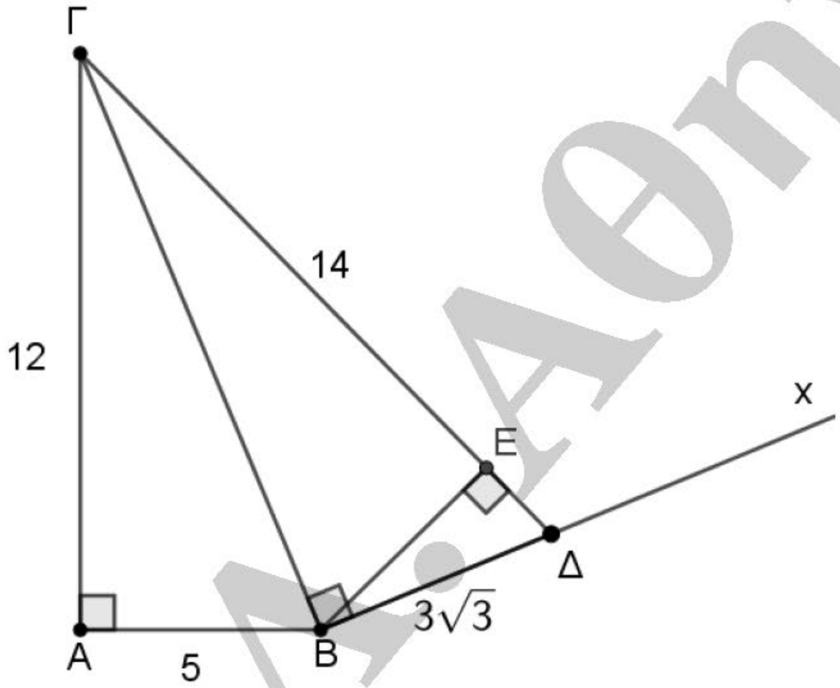
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$, ΑΓ = 12 και ΑΒ = 5.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 13. (Μονάδες 08)

β) Φέρουμε ημιευθεία Bx κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Β και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΔΓ = 14, όπως φαίνεται στο σχήμα.

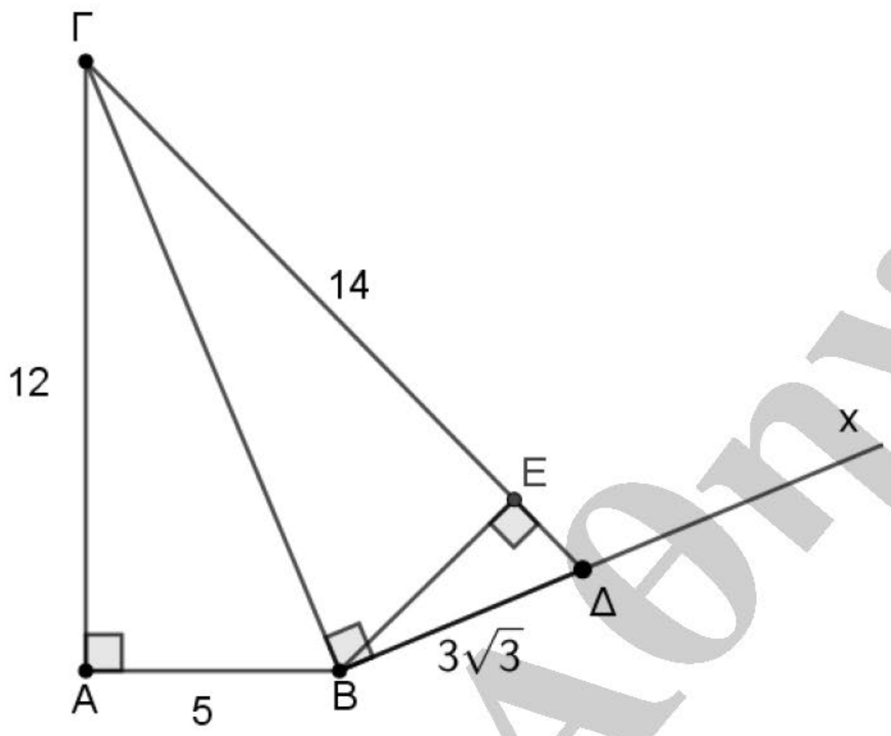
i. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = $3\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε την προβολή της ΒΔ στην ΔΓ. (Μονάδες 09)



11 α

ΛΥΣΗ



α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \text{ ή } B\Gamma^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169, \text{ άρα } B\Gamma = \sqrt{169} = 13$$

β)

i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΔΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$\Delta\Gamma^2 = B\Gamma^2 + B\Delta^2 \text{ ή } B\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 - B\Gamma^2 = 14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27$$

Άρα ΒΔ = $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$.

ii. Φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην ΔΓ, οπότε η προβολή του ΒΔ στην ΔΓ είναι η ΔΕ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ ισχύει ότι:

$$B\Delta^2 = \Delta E \cdot \Delta\Gamma \text{ ή } \left(3\sqrt{3}\right)^2 = \Delta E \cdot 14 \text{ ή } 27 = 14\Delta E \text{ ή } \Delta E = \frac{27}{14}$$

12

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $B\widehat{A}\Gamma = 30^o$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $B\Gamma = 2$, τότε:

α) Να υπολογίσετε:

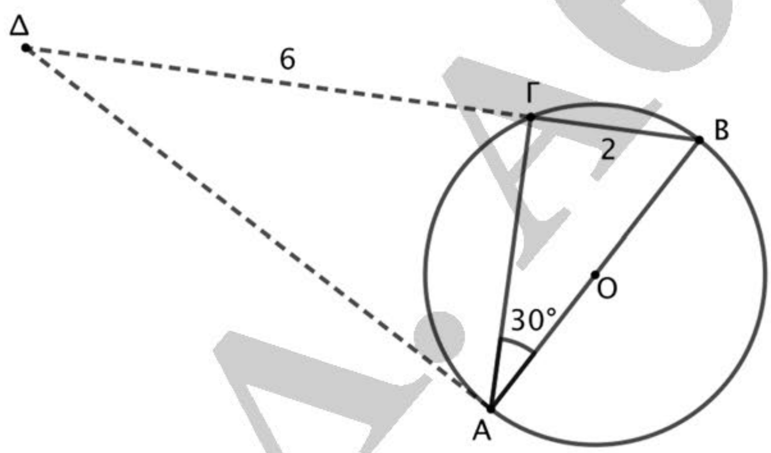
i. Την ακτίνα R.

ii. Το μήκος της πλευράς ΑΓ.

(Μονάδες 16)

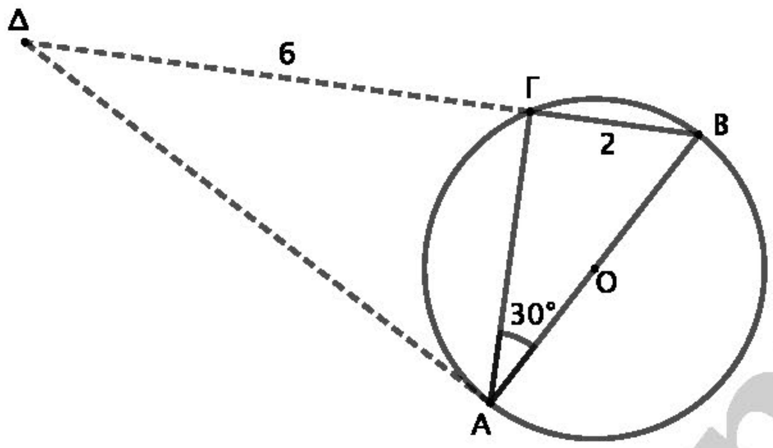
β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 6$. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)



12 α

ΛΥΣΗ



α)

i. Η γωνία $B\hat{\Gamma}A$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ, οπότε είναι ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\hat{A}\Gamma = 30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ, δηλαδή

$$B\Gamma = \frac{AB}{2} \quad ή \quad 2 = \frac{2R}{2} \quad ή \quad R = 2$$

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2$$

$$A\Gamma^2 = 4^2 - 2^2$$

$$A\Gamma^2 = 16 - 4$$

$$A\Gamma^2 = 12$$

$$A\Gamma = \sqrt{12}$$

β) Η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή ως παραπληρωματική της ορθής γωνίας $B\hat{\Gamma}A$. Αρχικά, υπολογίζουμε το μήκος του τμήματος ΑΔ. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ. Έχουμε διαδοχικά:

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2$$

$$A\Delta^2 = \sqrt{12}^2 + 6^2$$

$$A\Delta^2 = 12 + 36$$

$$A\Delta^2 = 48$$

$$A\Delta = \sqrt{48}$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΔ με μήκη πλευρών $AB = 4$, $\Delta B = 8$, $A\Delta = \sqrt{48}$. Έχουμε:

$\Delta B^2 = 8^2 = 64$

$AB^2 + A\Delta^2 = 4^2 + \sqrt{48}^2 = 16 + 48 = 64$

Αφού είναι $\Delta B^2 = AB^2 + A\Delta^2$, συμπεραίνουμε ότι $B\widehat{A}\Delta = 90^o$. Επομένως, το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α.

13

ΘΕΜΑ 3

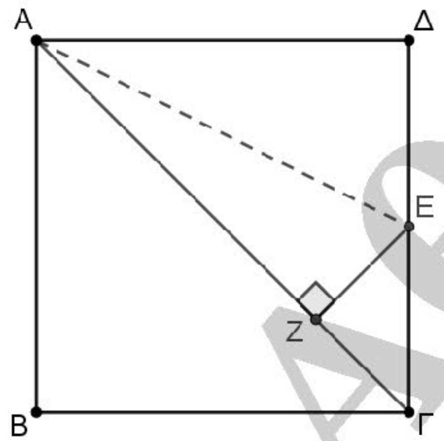
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και έστω Ε το μέσο της ΔΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΓ = α\sqrt{2}$. (Μονάδες 09)

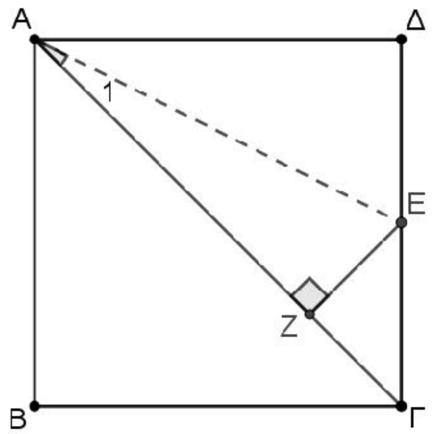
ii. $ΑΕ = α\frac{\sqrt{5}}{2}$. (Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος ΑΕ στην ΑΓ. (Μονάδες 07)



13 α

ΛΥΣΗ



α)

i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ:

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$, άρα ΑΓ = $\alpha\sqrt{2}$.

ii. ΔΕ = $\dfrac{\Delta\Gamma}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ:

$A E^2 = A\Delta^2 + \Delta E^2 = \alpha^2 + \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{4} = \dfrac{5\alpha^2}{4}$, άρα ΑΕ = $\alpha\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

β) Η προβολή του ΑΕ στην ΑΓ είναι το τμήμα ΑΖ.

Η γωνία $\hat{A}_1$ είναι οξεία γωνία επειδή οι πλευρές της περιέχονται στην ορθή γωνία $B\hat{A}\Delta$ του τετραγώνου.

ΕΓ = $\dfrac{\Delta\Gamma}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$.

Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΕΓ:

$E\Gamma^2 = AE^2 + A\Gamma^2 - 2\cdot A\Gamma \cdot AZ$ ή $\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\alpha\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\alpha\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot\alpha\sqrt{2}\cdot AZ$ ή

$\dfrac{\alpha^2}{4} = \dfrac{5\alpha^2}{4} + 2\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{2}\cdot AZ$ ή $\alpha^2 = 5\alpha^2 + 8\alpha^2 - 8\alpha\sqrt{2}\cdot AZ$ ή

$8\alpha\sqrt{2}\cdot AZ = 5\alpha^2 + 8\alpha^2 - \alpha^2 = 12\alpha^2$ ή $AZ = \dfrac{12\alpha^2}{8\alpha\sqrt{2}} = \dfrac{3\alpha}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\alpha\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{3\alpha\sqrt{2}}{4}$.

14

ΘΕΜΑ 2

Στα παρακάτω τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα ύψη του ΔΚ και ΖΙ.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….

ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….

iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά ……..

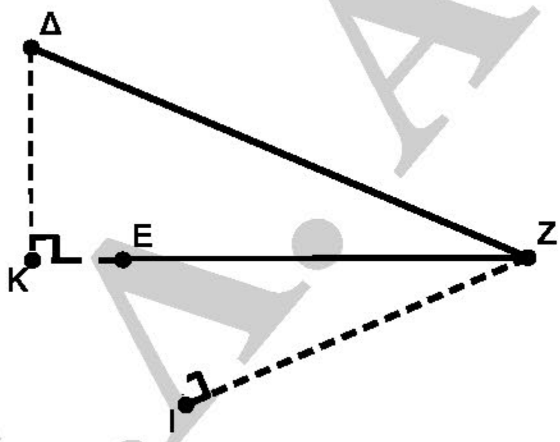
v. $ΔΖ^2 = ΔΕ^2 + \ldots + 2 \cdot ΕΖ \cdot \ldots$

vi. $ΕΖ^2 = \ldots + ΔΖ^2 - 2 \cdot \ldots \cdot ΔΙ$

(Μονάδες 15)

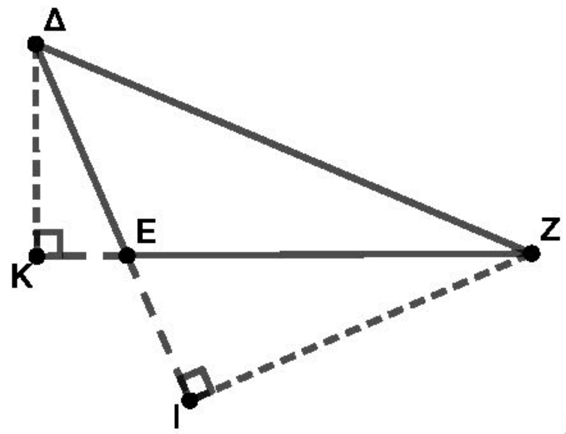
β) Αν ΔΕ = 2, ΕΖ = 4 και ΔΖ = 5, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ.

(Μονάδες 10)



14 α

ΛΥΣΗ



α)

i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα **ΚΕ**

ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα **ΚΖ**

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς **ΔΖ** στην πλευρά **ΔΕ**

iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς **ΕΖ** στην πλευρά **ΔΕ**

v. $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \mathbf{EZ^2} + 2\cdot EZ\cdot \mathbf{KE}$

vi. $EZ^2 = \mathbf{\Delta E^2} + \Delta Z^2 - 2\cdot \mathbf{\Delta E}\cdot \Delta I$

β) Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΔΕ.

Η γωνία $E\hat{\Delta}Z$ είναι οξεία γιατί ανήκει στο ίδιο τρίγωνο με τη γωνία $\Delta\hat{E}Z$, η οποία είναι αμβλεία, αφού τα ύψη ΖΙ και ΔΚ που αντιστοιχούν στις πλευρές της ΔΕ και ΕΖ αντίστοιχα, βρίσκονται εκτός του τριγώνου. Επομένως, εφαρμόζουμε το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΔΕΖ για την πλευρά ΕΖ και έχουμε:

$EZ^2 = \Delta E^2 + \Delta Z^2 - 2\cdot\Delta E\cdot\Delta I$ ή $16=4+25-2\cdot 2\cdot\Delta I$ ή $4\Delta I=13$ ή $\Delta I = \frac{13}{4}$.

15

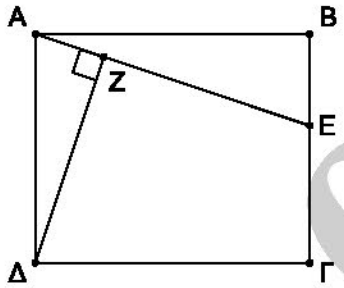
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $ΑΒ = 6$ και το Ε σημείο της πλευράς ΒΓ, ώστε $ΒΕ = 2$. Έστω ΔΖ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = 2\sqrt{10}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 9)

γ) Αν $ΔΖ = ΖΕ$, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ. (Μονάδες 8)



15 α

ΛΥΣΗ

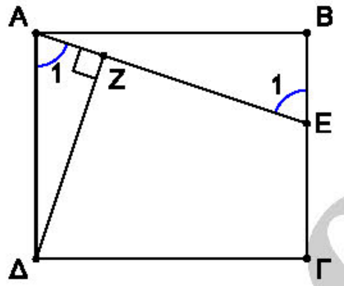
α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι

$$\text{ΑΕ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΕ}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\text{ΑΒ} = 6$, $\text{ΒΕ} = 2$, οπότε

$$\text{ΑΕ}^2 = 6^2 + 2^2 \text{ ή } \text{ΑΕ}^2 = 40 \text{ ή } \text{ΑΕ} = 2\sqrt{10}.$$

β)



Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ έχουν:

- $\hat{\text{Α}}_1 = \hat{\text{Ε}}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ.
- $\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Ζ}} = 90^o$, γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και η ΔΖ κάθετη στην ΑΕ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Επομένως θα ισχύει

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΑΖ}} \text{ (1).}$$

γ) Είναι $\text{ΑΒ} = 6$, $\text{ΒΕ} = 2$ και $\text{ΑΕ} = 2\sqrt{10}$, οπότε η (1) γίνεται

$$\frac{6}{\text{ΔΖ}} = \frac{2\sqrt{10}}{\text{ΑΔ}} = \frac{2}{\text{ΑΖ}} \text{ (2).}$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\text{ΔΖ} = \text{ΖΕ}$, έτσι η ισότητα $\frac{6}{\text{ΔΖ}} = \frac{2}{\text{ΑΖ}}$ γίνεται $\frac{6}{\text{ΖΕ}} = \frac{2}{\text{ΑΖ}}$ και με ιδιότητα των αναλογιών προκύπτει ότι

$$\frac{6}{\text{ΖΕ}} = \frac{2}{\text{ΑΖ}} = \frac{6+2}{\text{ΖΕ}+\text{ΑΖ}} = \frac{8}{\text{ΑΕ}} = \frac{8}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \text{ (3).}$$

Από τις ισότητες (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\frac{2\sqrt{10}}{\text{ΑΔ}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \text{ ή } 4\text{ΑΔ} = 2(\sqrt{10})^2 \text{ ή } \text{ΑΔ} = 5.$$

16

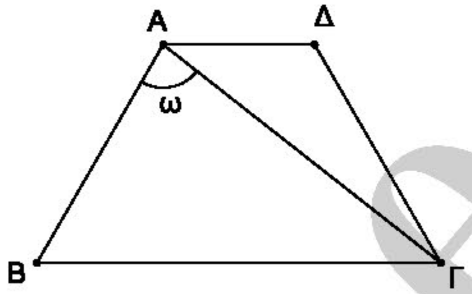
ΘΕΜΑ 2

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι $ΑΔ = 3$, $ΑΒ = ΓΔ = 5$, $ΒΓ = 8$ και $\hat{Δ} = 120^o$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 7$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $συνω = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία $Β\hat{Α}Γ$. (Μονάδες 15)

Δίνεται ότι $συν120^o = -\frac{1}{2}$.



16 α

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΓΔ ισχύει

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 - 2ΑΔ \cdot ΓΔ \cdot συν\hat{Δ}.$$

Όμως $ΓΔ = 5$, $ΑΔ = 3$ και $\hat{Δ} = 120^o$, άρα $ΑΓ^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3συν120^o$ ή

$ΑΓ^2 = 25 + 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ ή $ΑΓ^2 = 49$ ή $ΑΓ = 7$.

Β) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot συνω.$$

Όμως $ΑΒ = 5$, $ΒΓ = 8$ και $ΑΓ = 7$, άρα

$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot συνω \quad ή \quad 64 = 74 - 70συνω \quad ή \quad 70συνω = 10$$

επομένως $συνω = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$.

17

ΘΕΜΑ 2

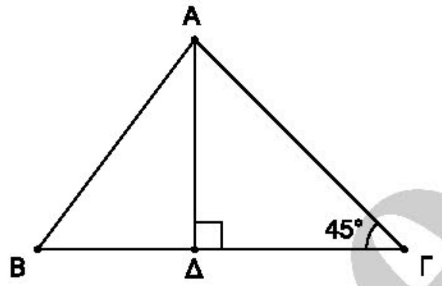
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{B\Gamma} = 7$, $\hat{\Gamma} = 45^o$ και ύψος $\mathrm{A\Delta} = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma\Delta = 4$. (Μονάδες 5)

ii. $\mathrm{A\Gamma} = 4\sqrt{2}$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ. (Μονάδες 12)



17 α

ΛΥΣΗ

α) i. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο με $Α\hat{Δ}Γ = 90^o$, γιατί το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ είναι κάθετο στη ΒΓ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ οι οξείες γωνίες του $Γ\hat{Α}Δ$ και $\hat{Γ} = 45^o$ είναι συμπληρωματικές, άρα $Γ\hat{Α}Δ + 45^o = 90^o$ ή $Γ\hat{Α}Δ = 45^o$.

Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, γιατί έχει δύο γωνίες ίσες, τις $\hat{Γ} = Γ\hat{Α}Δ = 45^o$. Οπότε θα είναι $ΑΔ = ΓΔ$ ως πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΔ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες του $\hat{Γ}, Γ\hat{Α}Δ$. Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι $ΑΔ = 4$, άρα $ΓΔ = 4$.

ii. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι

$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2$.

Όμως $ΑΔ = ΓΔ = 4$, άρα $ΑΓ^2 = 4^2 + 4^2$ ή $ΑΓ^2 = 32$ ή $ΑΓ = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

β) Είναι $ΒΔ = ΒΓ - ΓΔ = 7 - 4 = 3$. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι $ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2$.

Όμως $ΑΔ = 4$ και $ΒΔ = 3$, άρα $ΑΒ^2 = 4^2 + 3^2$ ή $ΑΒ^2 = 25$ ή $ΑΒ = 5$.

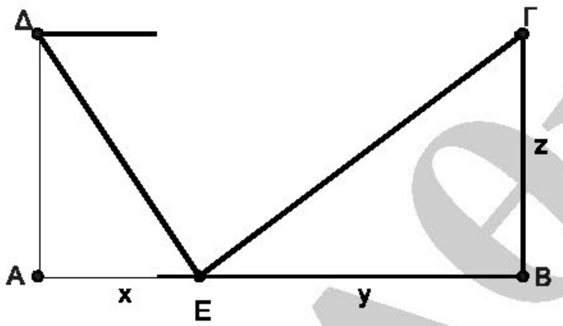
18

ΘΕΜΑ 2

Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

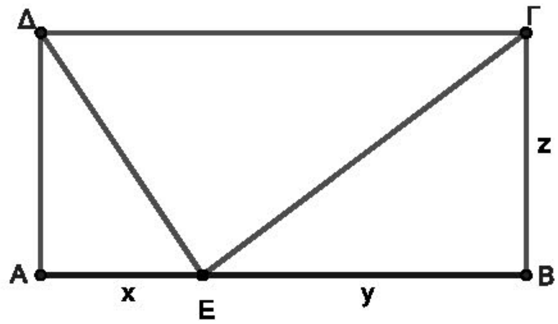
α) Να αποδείξετε ότι $x = 8$, $y = 16$ και $z = 12$. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ. (Μονάδες 12)



18 α

ΛΥΣΗ



α) Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 72. Οπότε 2 ΑΒ + 2 ΒΓ = 72 ή 2 (x + y) + 2 z = 72 ή x + y + z = 36. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, άρα ισχύει $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} = \frac{36}{9} = 4$. Άρα x = 2·4 = 8, y = 4·4 = 16 και z = 3·4 = 12.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΒΕ έχουμε $ΓΕ^2 = y^2 + z^2$ ή $ΓΕ^2 = 16^2+12^2$, οπότε $ΓΕ^2 = 400$ ή ΓΕ = 20. Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΔΑΕ για την υποτείνουσα ΔΕ έχουμε $ΔΕ^2 = ΑΕ^2 + ΔΑ^2$ ή $ΔΕ^2 = 8^2 + 12^2 = 208$, οπότε ΔΕ = $\sqrt{208} = \sqrt{16 \cdot 13} = 4\sqrt{13}$. Άρα η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΓ ισούται με : ΔΕ + ΕΓ + ΔΓ = $4\sqrt{13} + 20 + (8 + 16) = 44 + 4\sqrt{13}$.

19

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΗ και ΒΘ.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα …….

ii. Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ……

iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….

iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά ……..

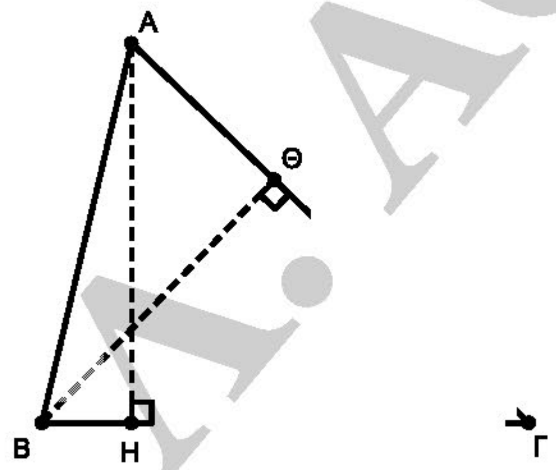
v. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + \ldots - 2 \cdot ΒΓ \cdot \ldots$

vi. $ΒΓ^2 = \ldots + ΑΓ^2 - 2 \cdot \ldots \cdot ΑΘ$

(Μονάδες 15)

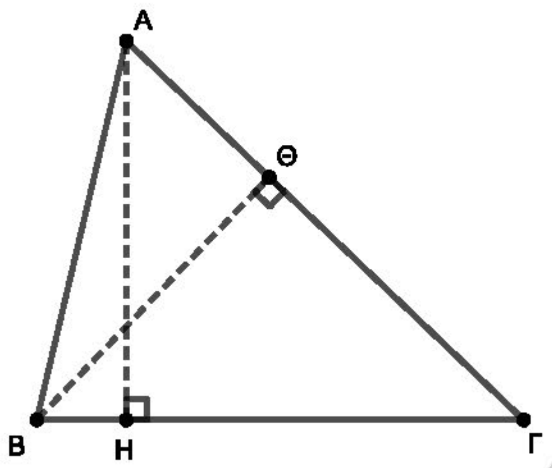
β) Αν ΑΒ = 4, ΒΓ=5 και ΑΓ = 6, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΘ.

(Μονάδες 10)



19 α

ΛΥΣΗ



α)

i. Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα **ΘΓ**

ii. Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα **ΒΗ**

iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς **ΑΓ** στην πλευρά **ΒΓ**

iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς **ΑΒ** στην πλευρά **ΑΓ**

v. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + \mathbf{ΒΓ^2} - 2\cdot ΒΓ\cdot \mathbf{ΒΗ}$

vi. $ΒΓ^2 = \mathbf{ΑΒ^2} + ΑΓ^2 - \mathbf{2ΑΓ}\cdot ΑΘ$

β) Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην ΑΓ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΒΓ έχουμε:

i. $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ\cdot ΑΘ$ ή $25=16+36-2\cdot 6\cdot ΑΘ$ ή $12ΑΘ=27$, άρα $ΑΘ = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$.

20

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$, $AB = 6$ και $A\Gamma = 3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε $A\Delta = 4$. Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ.

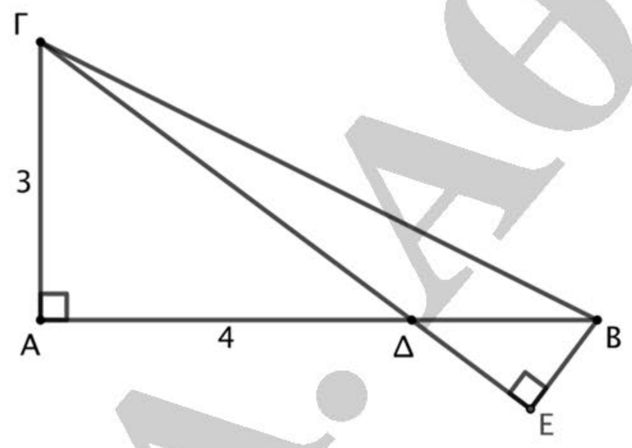
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

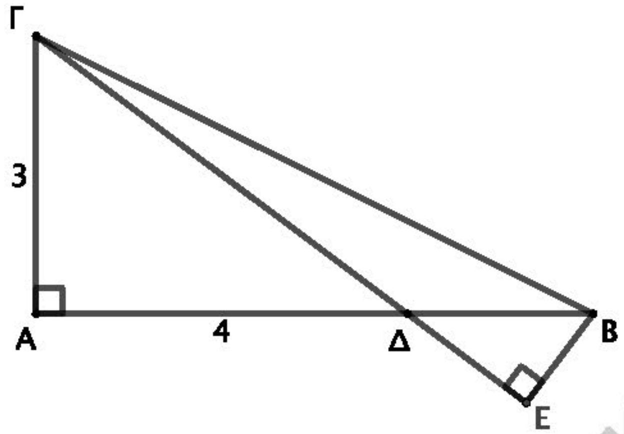
γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 8)



20 α

ΛΥΣΗ



α) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$ΔΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΔ^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

Άρα, $ΓΔ = 5$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ έχουν $Α\hat{Δ}Γ = Ε\hat{Δ}Β$ (ως κατακορυφήν) και $\hat{Α} = \hat{Ε} = 90^o$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

γ) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{Α} = \hat{Ε}$	$Α\hat{Δ}Γ = Ε\hat{Δ}Β$	$Α\hat{Γ}Δ = Ε\hat{Β}Δ$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΓ	ΓΔ	ΑΓ	ΑΔ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΕΔΒ	ΔΒ	ΕΒ	ΕΔ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{ΑΓ}{ΕΒ} = \frac{ΓΔ}{ΔΒ} \text{ ή } \frac{3}{ΕΒ} = \frac{5}{2} \text{ ή } ΕΒ = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$$

21

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5, ΒΓ= $\sqrt{41}$ και ΑΓ = 8.

α) Να σχεδιάσετε την προβολή ΑΔ, της ΑΒ στην ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 13)

β) Αν ΑΔ = 3, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΒΔ. (Μονάδες 12)

21 α

ΛΥΣΗ

α) Φέρουμε το ύψος ΒΔ. Η προβολή της ΑΒ στην ΑΓ είναι η ΑΔ.

Εφαρμόζοντας το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για την οξεία γωνία Α, έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΔ$. Αντικαθιστούμε τα γνωστά τμήματα,

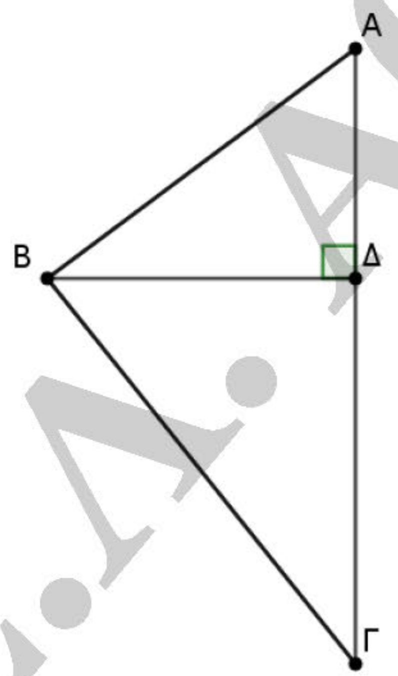
$\sqrt{41}^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot ΑΔ$, άρα $16ΑΔ = 25 + 64 - 41 = 48$, άρα ΑΔ = 3

β) ΑΔ = 3.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$ΑΒ^2 = ΒΔ^2 + ΑΔ^2$. Αντικαθιστώντας έχουμε: $5^2 = ΒΔ^2 + 3^2$, άρα $ΒΔ^2 = 25 - 9 = 16$,

άρα ΒΔ = 4.



22

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔE έχουν μήκη αντίστοιχα $12, 16, 8$ και 10, οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ορθές και τα σημεία A, Γ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.

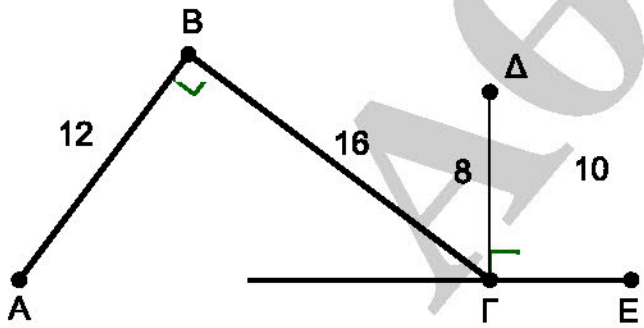
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών AB και $E\Delta$ είναι το Z και ZH είναι το ύψος του τριγώνου ZAE από την κορυφή του Z. Να αποδείξετε ότι:

i $EH = 13$ (Μονάδες 6)

i



22 α

ΛΥΣΗ

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($B = 90°$), έχουμε

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \text{ ή } ΑΓ^2 = 12^2 + 16^2 \text{ ή } ΑΓ^2 = 400 \text{ ή } ΑΓ = 20.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΓΔΕ$ ($Γ = 90°$), έχουμε

$$ΓΕ^2 = ΔΕ^2 - ΓΔ^2 \text{ ή } ΓΕ^2 = 10^2 - 8^2 \text{ ή } ΓΕ^2 = 36 \text{ ή } ΓΕ = 6.$$

Επομένως το μήκος του τμήματος $ΑΕ$ είναι $ΑΕ = ΑΓ + ΓΕ = 20 + 6 = 26$.

β) Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι $ΑΓ = 20$ και $ΓΕ = 6$, άρα τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΓΔ$ έχουν:

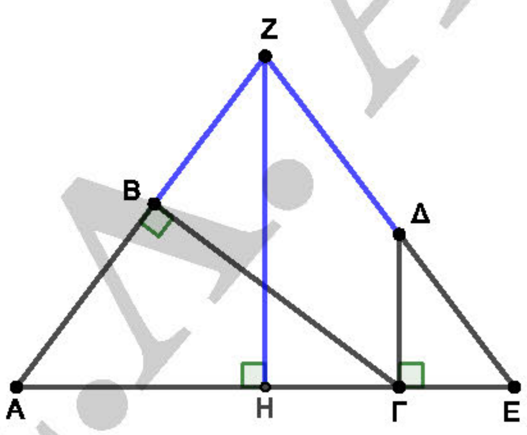
$$\frac{ΑΒ}{ΓΕ} = \frac{12}{6} = 2,$$

$$\frac{ΒΓ}{ΓΔ} = \frac{16}{8} = 2,$$

$$\frac{ΑΓ}{ΔΕ} = \frac{20}{10} = 2,$$

οπότε είναι όμοια, αφού έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ)



i) Αφού τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΓΔ$ είναι όμοια, θα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, άρα $\hat{A} = \hat{E}$, οπότε το τρίγωνο $ΖΑΕ$ είναι ισοσκελές με βάση την $ΑΕ$. Επειδή το $ΖΗ$ είναι ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε το σημείο $Η$ είναι το μέσο της $ΑΕ$. Επομένως θα είναι

$$ΗΕ = \frac{ΑΕ}{2} = \frac{26}{2} = 13.$$

ii) Είναι $ΔΓ \parallel ΖΗ$, ως κάθετες στην $ΑΕ$, οπότε από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο $ΓΔΕ$ θα έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου $ΗΖΕ$. Επομένως έχουμε

$$\frac{ΔΓ}{ΖΗ} = \frac{ΓΕ}{ΗΕ} \text{ ή } \frac{8}{ΖΗ} = \frac{6}{13} \text{ ή } ΖΗ = \frac{52}{3}.$$

23

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΒ = 8$, $ΑΓ = 6$ και $ΒΓ = 11$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 15)

23 α

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε:

$$Β\Gamma^2 = 11^2 = 121$$

και

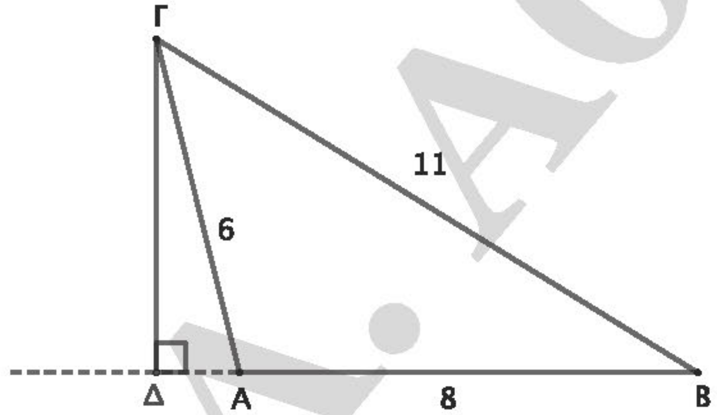
$$ΑΒ^2 + Α\Gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

Αφού είναι

$$Β\Gamma^2 > ΑΒ^2 + Α\Gamma^2$$

συμπεραίνουμε ότι $\widehat{Α} > 1L$, οπότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) Έστω Δ η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην ΑΒ. Τότε, η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ είναι το τμήμα ΑΔ, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Αφού η γωνία $\widehat{Α}$ είναι αμβλεία, σύμφωνα με το γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα θα είναι:

$$Β\Gamma^2 = ΑΒ^2 + Α\Gamma^2 + 2ΑΒ.Α\Delta$$

Οπότε:

$$121 = 64 + 36 + 16Α\Delta \text{ ή } 21 = 16Α\Delta$$

Άρα, το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ είναι:

$$Α\Delta = \frac{21}{16}$$