Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

1

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔΕΖΗ έχει πλευρά 1.

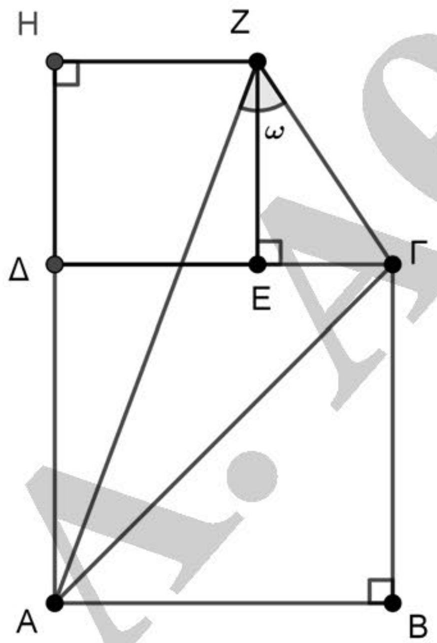
α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = 2. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i. $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$. (Μονάδες 7)

ii. $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2}$. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $A\hat{Z}\Gamma = \hat{\omega}$. (Μονάδες 5)



1 α

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 4 \text{ επομένως } ΑΓ = 2.$$

β)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΖ είναι $ΑΗ = ΑΔ + ΔΗ = \sqrt{2} + 1$, επομένως έχουμε:

$$ΑΖ^2 = ΑΗ^2 + ΗΖ^2 = (\sqrt{2}+1)^2 + 1^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}.$$

ii. Είναι $ΕΓ = ΔΓ - ΔΕ = \sqrt{2} - 1$. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΕΓ έχουμε:

$$ΖΓ^2 = ΖΕ^2 + ΕΓ^2 = 1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

γ) Από το β ερώτημα προκύπτει ότι

$$ΑΖ = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \text{ και } ΖΓ = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Στο τρίγωνο ΑΖΓ με εφαρμογή του νόμου των συνημιτόνων προκύπτει

$$ΑΓ^2 = ΑΖ^2 + ΖΓ^2 - 2ΑΖ \cdot ΖΓ \cdot συνω \text{ ή}$$

$$2^2 = 4 + 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4-2\sqrt{2}} \cdot συνω \text{ ή}$$

$$2 \cdot \sqrt{\left(4+2\sqrt{2}\right)\left(4-2\sqrt{2}\right)} \cdot συνω = 4 \text{ ή}$$

$$2 \cdot \sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} \cdot συνω = 4 \text{ ή}$$

$$συνω = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } \hat{ω} = 45^\circ.$$

2

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με $\alpha\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του. (Μονάδες 05)

β)

i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο ΒΔΖΗ έτσι ώστε το σημείο Α να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το κέντρο του τετραγώνου ΒΔΖΗ. (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΒΔΖΗ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)

γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου.

Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔΗ του τετραγώνου ΒΔΖΗ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το ΔΗΘΚ. Με πλευρά τη διαγώνιο ΗΚ του ΔΗΘΚ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του θα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, πόσες φορές ακόμη πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

2 α

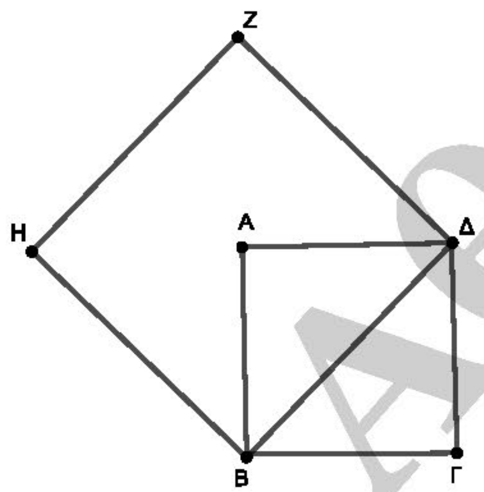
ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$ΒΔ^2=ΑΒ^2+ΑΔ^2$ ή $ΒΔ^2 = α^2 + α^2$ ή $ΒΔ^2 = 2α^2$, οπότε ΒΔ= $α\sqrt{2}$. Για το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, έχουμε (ΑΒΓΔ) = $α^2$.

β)

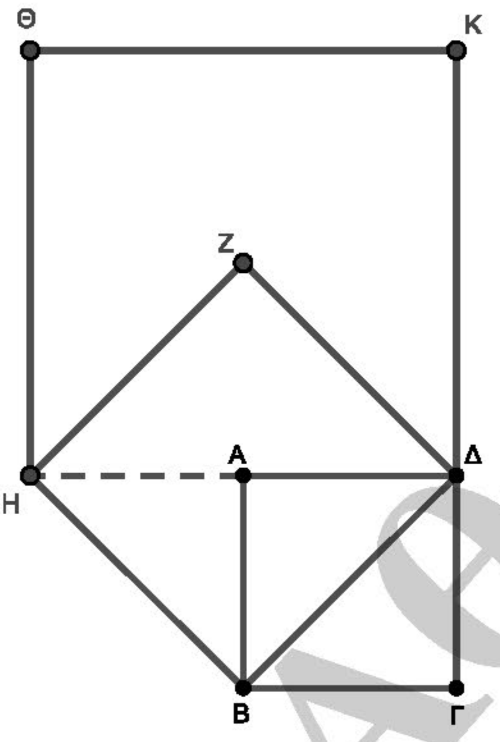
i.



Τα τμήματα ΔΑ και ΒΑ είναι κάθετα μεταξύ τους ως πλευρές του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. Η γωνία $Β\widehat{Δ}Α$ είναι 45^o αφού η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{Δ}$ του τετραγώνου. Επειδή $Β\widehat{Δ}Ζ = 90^o$ ως γωνία του τετραγώνου ΒΔΖΗ, $Α\widehat{Δ}Ζ = 45^o$. Οπότε το τμήμα ΔΑ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{Δ}$ του τετραγώνου, άρα το ΔΑ ανήκει στη διαγώνιο του τετραγώνου ΒΔΖΗ. Ομοίως η ΒΑ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{Β}$ του τετραγώνου ΒΔΖΗ και το ΒΑ ανήκει στην άλλη διαγώνιό του. Οι δύο διαγώνιες του τετραγώνου ΒΔΖΗ τέμνονται στο σημείο Α, δηλαδή το Α είναι το κέντρο του.

ii. Η πλευρά του τετραγώνου ΒΔΖΗ είναι ίση με $α\sqrt{2}$, οπότε για το εμβαδον του έχουμε: (ΒΔΖΗ) = $(α\sqrt{2})^2$ ή (ΒΔΖΗ) = $2α^2$. Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι το εμβαδό του ΑΒΓΔ είναι $α^2$, οπότε παρατηρούμε ότι (ΒΔΖΗ) = 2(ΑΒΓΔ).

γ)



Στο τετράγωνο ΒΔΖΗ η πλευρά του ισούται με $\alpha\sqrt{2}$. Επομένως η διαγώνιός του ΔΗ , σύμφωνα με το α) ερώτημα, θα είναι ίση με $\alpha\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2\alpha$. Επομένως η πλευρά του τετραγώνου ΔΗΘΚ είναι 2α, οπότε (ΔΗΘΚ) = $4\alpha^2$. Συγκρίνοντας το εμβαδό του τετραγώνου ΔΗΘΚ με το εμβαδό του ΒΔΖΗ παρατηρούμε ότι (ΔΗΘΚ) = 2(ΒΔΖΗ), όπως και (ΒΔΖΗ) = 2(ΑΒΓΔ). Επομένως (ΔΗΘΚ) = 2(ΒΔΖΗ) = 4(ΑΒΓΔ). Δηλαδή, σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, το νέο τετράγωνο έχει διπλάσιο εμβαδό από το προηγούμενό του. Το αρχικό τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με α, έχει εμβαδό α^2, το ΒΔΖΗ έχει εμβαδό $2\alpha^2$, το ΔΗΘΚ έχει εμβαδό $4\alpha^2$. Σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο του ΔΗΘΚ θα προκύψει τετράγωνο με εμβαδό $8\alpha^2$.
Επομένως για να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του θα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, θα πρέπει να κάνουμε τη διαδικασία αυτή συνολικά τέσσερις (4) φορές. Δηλαδή, μετά το τετράγωνο ΔΗΘΚ του σχήματος θα χρειαστεί να φτιάξουμε, όπως περιγράφηκε, δύο ακόμη τετράγωνα.

3

ΘΕΜΑ 4

Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

(Μονάδες 10)

β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που θα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου.

(Μονάδες 08)

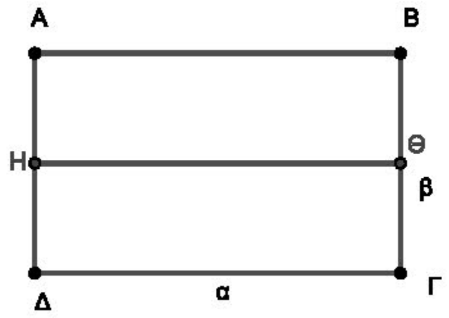
ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

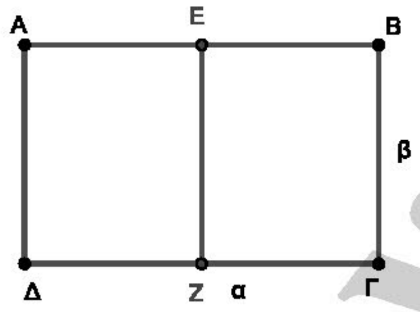
3 α

ΛΥΣΗ

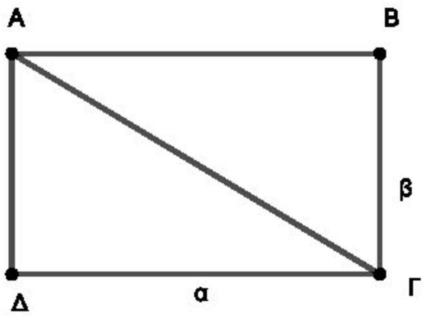
α)



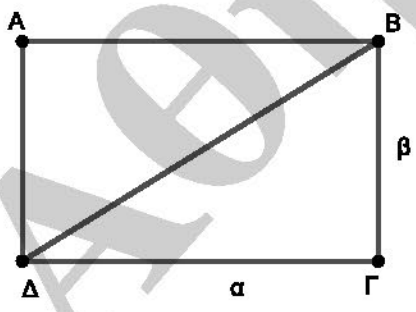
$1^η$ περίπτωση



$2^η$ περίπτωση



$3^η$ περίπτωση



$4^η$ περίπτωση

Κάποιοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να χωριστεί ένα ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία είναι είτε φέροντας τις μεσοπαράλληλες των απέναντι πλευρών του ορθογωνίου είτε τις διαγώνιές του. Οι δύο πρώτες περιπτώσεις όπως και η $3^η$ και $4^η$ θεωρούνται διαφορετικές αφού το χωρίο είναι κήπος και έχει σημασία ο προσανατολισμός του.

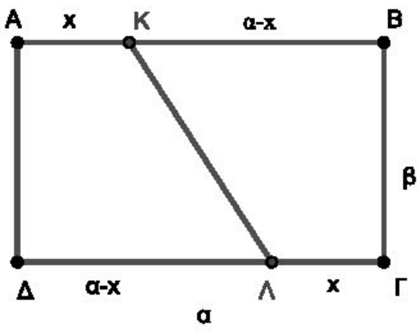
Αν ΑΒ = ΓΔ = α και ΑΔ = ΒΓ = β τότε (ΑΒΓΔ) = α·β.

Στην $1^η$ περίπτωση έχουμε (ΑΒΘΗ)=(ΗΘΓΔ) $=\alpha \cdot \frac{\beta}{2} = \frac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.

Στην $2^η$ περίπτωση έχουμε (ΑΕΖΔ)=(ΕΒΓΖ) $= \frac{\alpha}{2} \cdot \beta = \frac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.

Στην $3^η$ και $4^η$ περίπτωση τα τρίγωνα που δημιουργούνται από κάθε διαγώνιο γνωρίζουμε ότι είναι ίσα, άρα και ισοδύναμα με (ΑΒΓ)=(ΑΔΓ)=(ΑΒΔ)=(ΒΓΔ)$= \frac{1}{2}\alpha\cdot\beta = \frac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.

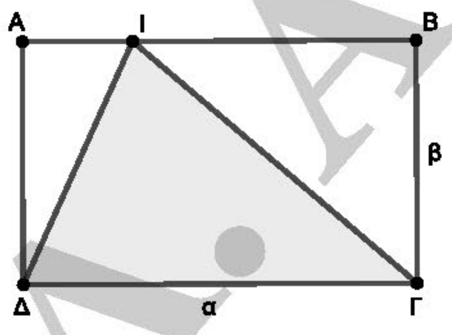
Ένας άλλος τρόπος που μπορεί επίσης να χωριστεί το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία είναι ο εξής:



Θεωρούμε ένα σημείο Κ στην πλευρά ΑΒ και ένα σημείο Λ στην απέναντι πλευρά ΓΔ τέτοια ώστε ΑΚ = ΓΛ. Αν ΑΚ =ΓΛ =x, τότε ΚΒ = ΛΔ = α – x. Τα δύο τραπέζια ΑΚΛΔ και ΓΛΚΒ έχουν ίσες τις βάσεις τους και το ύψος τους είναι η διάσταση ΑΔ του ορθογωνίου. Οπότε (ΑΚΛΔ) = (ΓΛΚΒ) = $\frac{+\alpha-x}{2}\cdot\beta = \frac{\alpha}{2}\cdot\beta = \frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{2}$.

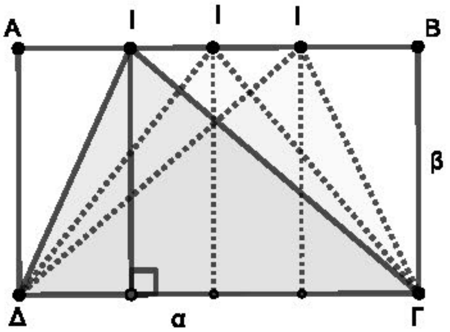
β)

i.



Έστω ότι το εσωτερικό σημείο μιας πλευράς του ορθογωνίου είναι το σημείο Ι, τότε οι απέναντι κορυφές είναι οι Γ και Δ. Οπότε σχηματίζεται το τρίγωνο ΙΔΓ που η πλευρά του ΔΓ είναι το μήκος α του ορθογωνίου και το ύψος προς αυτή είναι η απόσταση του Ι από τη ΔΓ, δηλαδή η άλλη διάσταση του ορθογωνίου που ισούται με β. Άρα (ΙΔΓ) = $\frac{1}{2}\alpha\cdot\beta = \frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{2}$.

ii.



Έστω ότι η θέση του σημείου Ι μεταβάλλεται και μπορεί να είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΑΒ. Σε κάθε τέτοια μετακίνηση του σημείου Ι, το τρίγωνο που σχηματίζεται έχει εμβαδό το μισό του αρχικού ορθογωνίου όπως αποδείχθηκε στο β) i. ερώτημα. Και οι θέσεις του Ι είναι τα άπειρα εσωτερικά σημεία της πλευράς ΑΒ.

4

ΘΕΜΑ 4

Σε τετράγωνο πλευράς α παίρνουμε σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε ΒΣ = ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α:

i. Το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ.

ii. Την περίμετρο του τριγώνου ΣΔΓ.

(Μονάδες 10)

β) Στην τάξη του Βρασίδα η καθηγήτρια των Μαθηματικών απέδειξε ότι αν το σημείο Σ' βρίσκεται στην προέκταση του ΑΒ προς το Β και κινείται απομακρυνόμενο από το σημείο Β, τότε οι πλευρές Σ'Γ και Σ'Δ μεγαλώνουν. Οπότε, αν το Σ' είναι δεξιότερα από το Σ, θα ισχύει ότι Σ'Γ > ΣΓ και Σ'Δ > ΣΔ.

Ο Βρασίδας ζήτησε το λόγο και διατύπωσε τον ισχυρισμό :

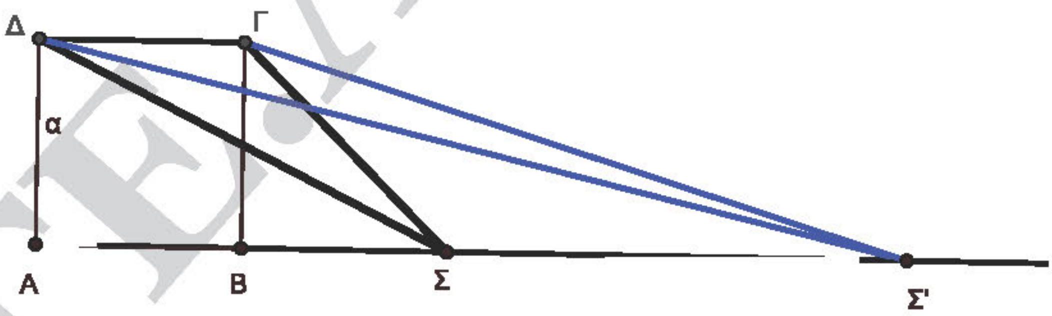
«Η *περίμετρος και το εμβαδό του τριγώνου Σ'ΔΓ είναι μεγαλύτερα από την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ*».

Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Βρασίδα:

i. σχετικά με τα εμβαδά των δύο τριγώνων; (Μονάδες 8)

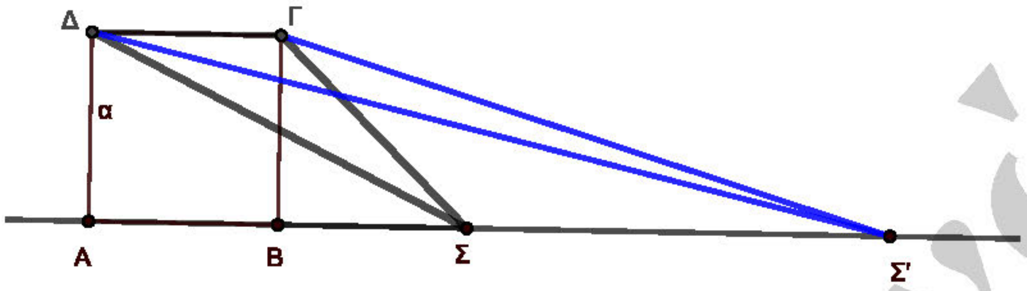
ii. σχετικά με την περίμετρο των δύο τριγώνων; (Μονάδες 7)

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



4 α

ΛΥΣΗ



α)

i. Για το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ μπορούμε να πάρουμε για βάση την πλευρά ΔΓ και για ύψος την κάθετη από το Σ προς τη ΔΓ, η οποία είναι ίση με α, οπότε (ΣΔΓ) = $\frac{\alpha \cdot \alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$, δηλαδή ισούται με το μισό του εμβαδού του αρχικού τετραγώνου.

ii. Για να υπολογίσουμε την περίμετρο του τριγώνου ΣΔΓ θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τα μήκη των πλευρών του ΣΔ και ΣΓ ως συνάρτηση του α.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΣΒΓ έχουμε $\Sigma\Gamma^2 = \Sigma\mathrm{B}^2 + \mathrm{B}\Gamma^2$ ή $\Sigma\Gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2$ ή $\Sigma\Gamma^2 = 2\alpha^2$ ή $\Sigma\Gamma = \alpha\sqrt{2}$.

Αντίστοιχα από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΣΔ έχουμε $\Sigma\Delta^2 = \Sigma\mathrm{A}^2 + \mathrm{A}\Delta^2$ ή $\Sigma\Delta^2 = (2\alpha)^2 + \alpha^2$ ή $\Sigma\Delta^2 = 5\alpha^2$ ή $\Sigma\Delta = \alpha\sqrt{5}$.

Οπότε η περίμετρος του τριγώνου ΣΔΓ είναι ίση με ΣΓ + ΣΔ + ΔΓ = $\alpha\sqrt{2} + \alpha\sqrt{5} + \alpha$.

β)

i. Τα τρίγωνα ΣΔΓ και Σ'ΔΓ έχουν κοινή πλευρά τη ΔΓ οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών τους προς την πλευρά αυτή .

Όμως τα ύψη αυτά εκφράζουν την απόσταση των παραλλήλων πλευρών του τετραγώνου, οπότε είναι ίσα μεταξύ τους και ίσα με την πλευρά α του τετραγώνου. Άρα $\frac{(\Sigma\Delta\Gamma)}{(\Sigma'\Delta\Gamma)} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$, οπότε τα εμβαδά των τριγώνων ΣΔΓ και Σ'ΔΓ είναι ίσα μεταξύ τους και το καθένα ίσο με το μισό του εμβαδού του τετραγώνου, όπως φαίνεται στο αi).

Συνεπώς ο ισχυρισμός του Βρασίδα σχετικά με τα εμβαδά των δυο τριγώνων δεν είναι σωστός.

Το τρίγωνο Σ'ΔΓ είναι ισεμβαδικό με το τρίγωνο ΣΔΓ.

ii. Σύμφωνα με αυτό που αποδείχθηκε στην τάξη ισχύει ότι : $Σ'Γ > ΣΓ$ και $Σ'Δ > ΣΔ$, άρα, $ΔΓ + Σ'Γ + Σ'Δ > ΔΓ + ΣΓ + ΣΔ$, οπότε η περίμετρος του τριγώνου $Σ'ΔΓ$ είναι μεγαλύτερη από την περίμετρο του τριγώνου $ΣΔΓ$.

Ο ισχυρισμός του Βρασίδα για τις περιμέτρους των δύο τριγώνων είναι σωστός.

5

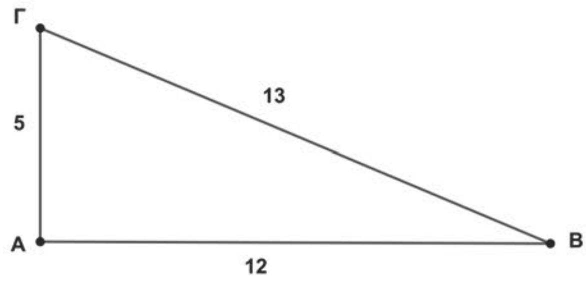
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 12, ΑΓ =5 και ΒΓ =13.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = 90^o$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος υ_α . (Μονάδες 9)



5 α

ΛΥΣΗ

α) Για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, αρκεί να αποδείξουμε ότι $B\Gamma \ = A\Gamma \ + AB$.

Έχουμε $B\Gamma \ = 13 \ = 169$ και $A\Gamma \ + AB \ = 5 \ + 12 \ = 25 + 144 = 169$. Άρα $B\Gamma \ = AB \ + A\Gamma$, οπότε $\hat{A} = 90^o$.

β) Επειδή $\hat{A} = 90^o$ έχουμε $(AB\Gamma) \ = \frac{1}{} AB \cdot A\Gamma = \frac{5 \cdot 12}{} = 30$.

γ) Ισχύει $(AB\Gamma) = \frac{1}{} \cdot \alpha \cdot \upsilon_\alpha$, άρα $\upsilon_\alpha = \frac{(AB\Gamma)}{\alpha} = \frac{2 \cdot 30}{13} = \frac{60}{13}$.

6

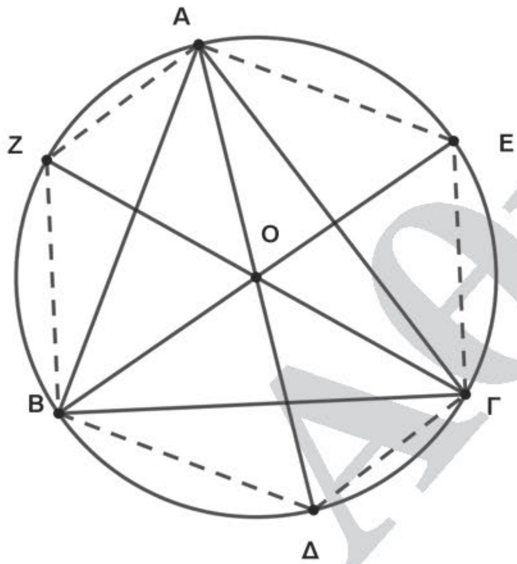
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Θεωρούμε τις διαμέτρους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι:

α) (ΑΟΒ) = (ΒΟΔ) και (ΑΟΓ) = (ΔΟΓ) (Μονάδες 8)

β) (ΒΔΓ) = (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) – (ΒΟΓ) (Μονάδες 8)

γ) (ΑΖΒΔΓΕ) = 2(ΑΒΓ) (Μονάδες 9)



6 α

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΟ είναι διάμεσος, οπότε χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΔ σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Επομένως (ΑΟΒ) = (ΒΟΔ).

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΓΔ η ΓΟ είναι διάμεσος, οπότε (ΑΟΓ) = (ΓΟΔ).

β) Από το α) ερώτημα έχουμε (ΑΟΒ) = (ΒΟΔ) (1)

και (ΑΟΓ) = (ΓΟΔ) (2).

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) = (ΒΟΔ) + (ΓΟΔ), οπότε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) = (ΒΟΓΔ).

Αφαιρώντας από τα δύο μέλη το (ΒΟΓ) έχουμε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) –(ΒΟΓ) = (ΒΔΓ).

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) –(ΒΟΓ) = (ΒΔΓ) (3).

Ομοίως αποδεικνύεται ότι (ΒΟΓ) + (ΑΟΒ) – (ΑΟΓ) = (ΓΕΑ) (4)

και (ΒΟΓ) + (ΑΟΓ) – (ΒΟΑ) = (ΑΖΒ) (5).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3), (4), (5) παίρνουμε (ΑΟΒ) + (ΒΟΓ) + (ΑΟΓ) = (ΔΒΓ) + (ΕΓΑ) + (ΖΑΒ), άρα (ΑΒΓ) = (ΒΔΓ) + (ΓΕΑ) + (ΑΖΒ).

Επομένως 2(ΑΒΓ) =(ΑΒΓ) + (ΔΒΓ) + (ΕΓΑ) + (ΖΑΒ) = (ΑΖΒΔΓΕ).

7

ΘΕΜΑ 4

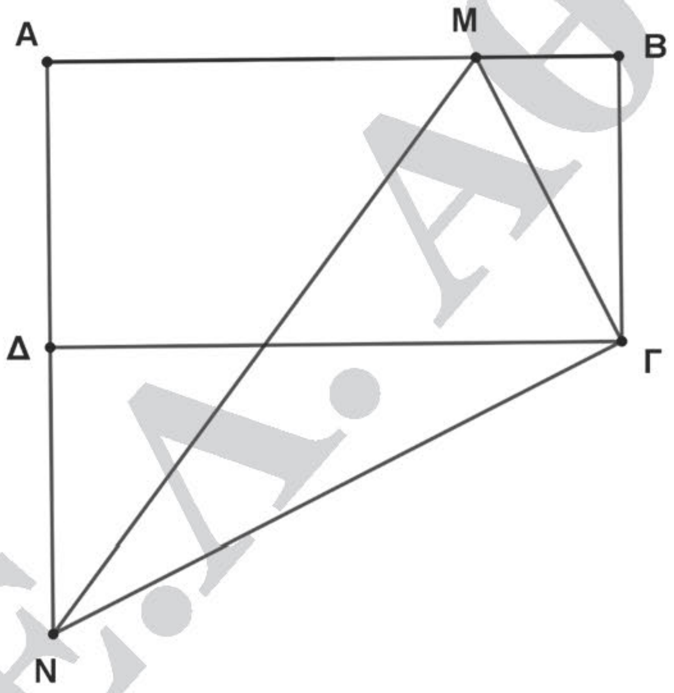
Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2α και ΑΔ = α. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Μ με ΜΒ = x και στην προέκταση της ΑΔ σημείο Ν με ΔΝ = 2x.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των α, x τα $ΜΓ^2$, $ΝΓ^2$ και $ΜΝ^2$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει των α, x τα εμβαδά των τριγώνων ΑΜΝ και ΓΜΝ. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ, πάνω στην ΑΒ ώστε τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΓΜΝ να είναι ισεμβαδικά. (Μονάδες 5)



7 α

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ = ΔΓ = 2α, ΑΔ = ΒΓ = α, ΜΒ = x και ΑΜ = $2\alpha - x$

α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΓ έχουμε: $\mathrm{M\Gamma}^2 = \mathrm{MB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 = \alpha^2 + \mathrm{x}^2$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΝΓ έχουμε:

$\mathrm{N\Gamma}^2 = \mathrm{N\Delta}^2 + \Delta\Gamma^2 = (2\mathrm{x})^2 + (2\alpha)^2 = 4\mathrm{x}^2 + 4\alpha^2$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΝ έχουμε:

$\mathrm{MN}^2 = \mathrm{AN}^2 + \mathrm{AM}^2 = (\alpha + 2\mathrm{x})^2 + (2\alpha - \mathrm{x})^2 = \alpha^2 + 4\mathrm{x}^2 + 4\alpha\mathrm{x} + 4\alpha^2 + \mathrm{x}^2 - 4\alpha\mathrm{x} =$

$5\alpha^2 + 5\mathrm{x}^2$.

β) Από το α) έπεται $\mathrm{M\Gamma}^2 + \Gamma\mathrm{N}^2 = \alpha^2 + x^2 + 4x^2 + 4\alpha^2 = 5a^2 + 5x^2 = \mathrm{MN}^2$,

κατά συνέπεια το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΜΝ.

γ) Από τα δεδομένα και το ερώτημα α) τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΓΜΝ είναι ορθογώνια οπότε:

$(\mathrm{AMN}) = \frac{1}{2}\mathrm{AM}\cdot\mathrm{AN} = \frac{1}{2}(2a - x)(a + 2x) = \frac{1}{2}(2a^2 + 4ax - ax - 2x^2) =$

$\frac{1}{2}(2a^2 + 3ax - 2x^2)$.

$(\mathrm{M\Gamma N}) = \frac{1}{2}\mathrm{M\Gamma}\cdot\Gamma\mathrm{N} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2}\cdot\sqrt{4a^2 + 4x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\,(a^2 + x^2) =$

$a^2 + x^2$.

δ) Λόγω του ερωτήματος β) έχουμε:

$(\mathrm{AMN}) = (\mathrm{MN\Gamma}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2a^2 + 3ax - 2x^2) = a^2 + x^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 3ax - 2x^2 = 2a^2 + 2x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 3ax \overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} x = \frac{3}{4}a$, οπότε ΑΜ = $\frac{3}{4}a$, άρα γνωστή η θέση του Μ.

8

ΘΕΜΑ 4

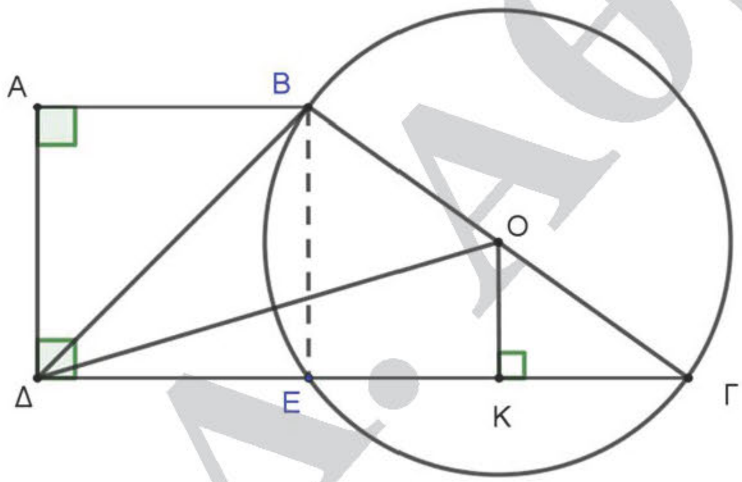
Έστω ΑΒΓΔ τραπέζιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, ΑΒ=5 , ΓΔ=13 και εμβαδόν (ΑΒΓΔ)=54. Ο κύκλος με διάμετρο τη ΒΓ τέμνει τη ΓΔ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = 6. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος των ΒΕ και ΒΓ. (Μονάδες 6)

γ) Αν ΟΚ είναι η κάθετη από το σημείο Ο στην ΕΓ, να αποδείξετε ότι ΟΚ=3, και να υπολογίσετε το μήκος της ΟΔ. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΟ. (Μονάδες 7)



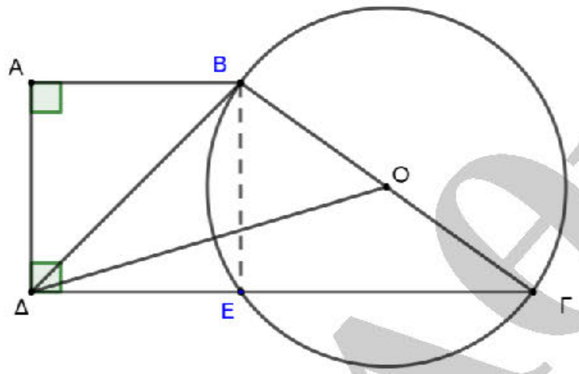
8 α

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι 54 είναι:

$$(ΑΒΓΔ)=\frac{(ΑΒ+ΓΔ)\cdot ΑΔ}{2} \Longrightarrow 54=\frac{(5+13)\cdot ΑΔ}{2} \Longrightarrow 54 = 9 \cdot ΑΔ \Longrightarrow ΑΔ=\frac{54}{9}=6$$

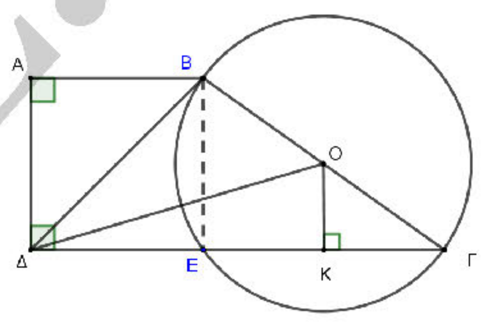
β)



Η γωνία $B\hat{E}Γ=90^o$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο), άρα και $B\hat{E}Δ=90^o$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχοντας σύμφωνα με την υπόθεση $\widehat{A} = \hat{Δ} = 90^o$ και $B\hat{E}Δ=90^o$, δηλαδή τρεις γωνίες ορθές, είναι ορθογώνιο και επομένως ΒΕ=ΑΔ (απέναντι πλευρές ορθογωνίου), άρα ΒΕ=6.

Ακόμη ΔΕ=ΑΒ=5, οπότε ΕΓ=ΔΓ-ΔΕ=13-5=8. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε $BΓ^2=BE^2+EΓ^2$= 36+64=100. Άρα ΒΓ=10.

γ)



Η κάθετος ΟΚ από το κέντρο Ο στη χορδή ΕΓ του κύκλου διχοτομεί τη χορδή, άρα το Κ είναι το μέσο του τμήματος ΕΓ. Το Ο ως κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της διαμέτρου ΒΓ.

Οπότε το ΟΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΕΓ του τριγώνου ΒΕΓ και άρα $ΟΚ = \frac{ΒΕ}{2} = 3$.

Αφού η ΟΚ είναι κάθετος στην ΕΓ, άρα θα είναι κάθετος και στην ΔΓ, οπότε το τρίγωνο ΔΟΚ είναι ορθογώνιο και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΟΚ έχουμε:

$ΔΟ^2=ΔΚ^2+ΟΚ^2 = 81+9 =90$. Άρα $ΔΟ=3\sqrt{10}$.

δ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΓ είναι $(ΒΔΓ) = \frac{ΔΓ.ΒΕ}{2} = \frac{13.6}{2} = 39$. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα και εφόσον η ΔΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΔΓ, άρα :

$$(ΒΔΟ) = \frac{(ΒΔΓ)}{2} = \frac{39}{2}.$$

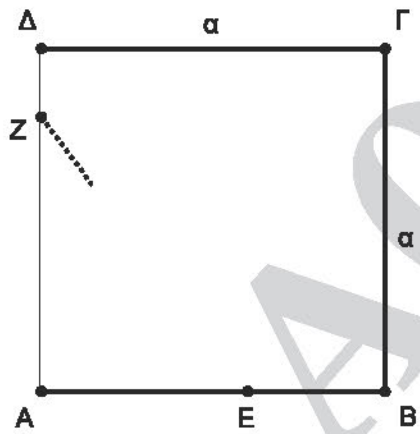
9

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $ΑΕ = \frac{3}{5}ΑΒ$, και στην πλευρά ΑΔ θεωρούμε σημείο Ζ έτσι ώστε $ΑΖ = \frac{4}{5}ΑΔ$.

α) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά, του τριγώνου ΑΕΖ και του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ είναι ίσο με 76 να υπολογίσετε το μήκος α της πλευράς του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 13)



9 α

ΛΥΣΗ

Από υπόθεση έχουμε ότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά α, επίσης το τμήμα ΑΕ ισούται με: ΑΕ = $\frac{3}{5}$ΑΒ, δηλαδή ΑΕ = $\frac{3}{5}$α και το τμήμα ΑΖ ισούται με: ΑΖ = $\frac{4}{5}$ΑΔ δηλαδή ΑΖ = $\frac{4}{5}$α.

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ ισούται με:

$(\mathrm{AEZ}) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AE} \cdot \mathrm{AZ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\alpha \cdot \frac{4}{5}\alpha = \frac{12}{50} \cdot \alpha^2 = \frac{6}{25} \cdot \alpha^2$

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ ισούται με: (ΑΒΓΔ) = α · α = α^2

β) Το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ υπολογίζεται αν από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΕ.

Από το α) έχουμε: $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \alpha^2$ και $(\mathrm{AEZ}) = \frac{6}{25} \cdot \alpha^2$

Άρα: $(\mathrm{EB\Gamma\Delta Z}) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) - (\mathrm{AZE}) = \alpha^2 - \frac{6}{25} \cdot \alpha^2 = \frac{19}{25} \cdot \alpha^2$.

Από υπόθεση το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ ισούται με 76, συνεπώς έχουμε:

$\frac{19}{25} \cdot \alpha^2 = 76$ ή $\alpha^2 = \frac{25 \cdot 76}{19}$ ή $\alpha^2 = \frac{25 \cdot 19 \cdot 4}{19}$ ή $\alpha^2 = 100$ ή $\alpha = 10$.

10

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και έστω $Δ$ η προβολή του σημείου $Β$ πάνω στην ευθεία $ΑΓ$. Έστω $ΑΔ = 3$ και $ΔΓ = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΒΔ = 4$. (Μονάδες 6)

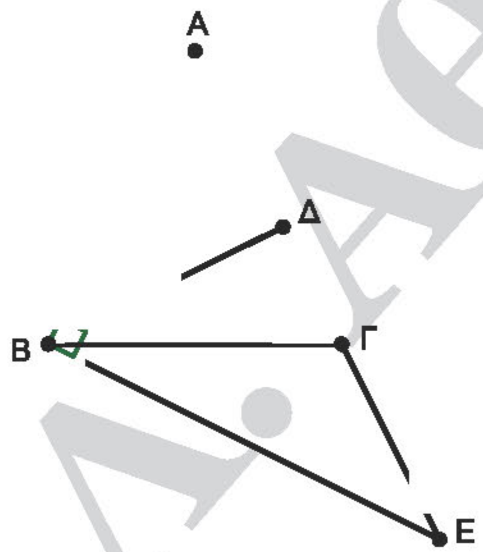
ii. $(ΑΒΓ) = 10$. (Μονάδες 6)

β) Έστω ότι η κάθετη της $ΑΒ$ στο σημείο $Β$, τέμνει την προέκταση της $ΑΓ$ στο σημείο $Ε$.

Να βρείτε:

i. Το μήκος του $ΔΕ$. (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΒΓΕ$. (Μονάδες 7)



10 α

ΛΥΣΗ

α) i) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο με $\widehat{\Delta} = 90°$,

$AB = A\Gamma = A\Delta + \Delta\Gamma = 3 + 2 = 5$

και $A\Delta = 3$.

Επομένως από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε

$B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2$

$B\Delta^2 = 5^2 - 3^2$

$B\Delta^2 = 16$

$B\Delta = 4$.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{A\Gamma \cdot B\Delta}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \ .$$

β) i) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ορθογώνιο με $A\widehat{B}E = 90°$, άρα για το ύψος του ΒΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΕ , θα έχουμε

$B\Delta^2 = \Delta A \cdot \Delta E$

$4^2 = 3 \cdot \Delta E$

$\Delta E = \frac{16}{3}$.

ii) Είναι $\Gamma E = \Delta E - \Delta\Gamma = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΕ είναι

$$(B\Gamma E) = \frac{\Gamma E \cdot B\Delta}{2} = \frac{\frac{10}{3} \cdot 4}{2} = \frac{20}{3} .$$

11

ΘΕΜΑ 2

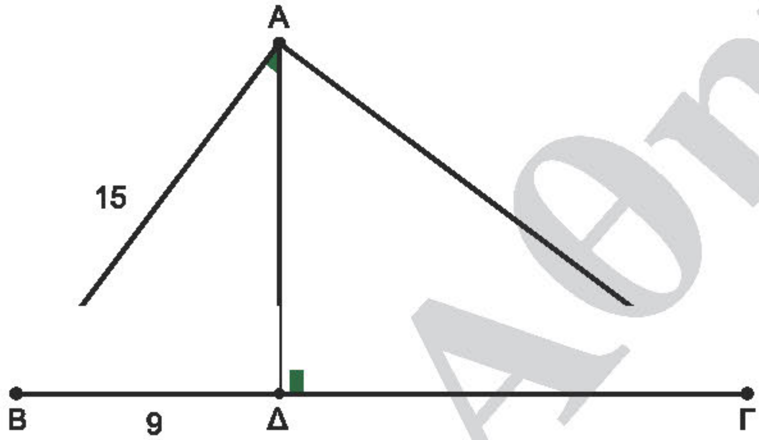
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 90°$ και έστω Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Έστω επίσης $\mathrm{AB} = 15$ και $\Delta\mathrm{B} = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{B\Gamma} = 25$, (Μονάδες 9)

ii. $\mathrm{A\Gamma} = 20$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)



11 α

ΛΥΣΗ

α) i) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{\mathrm{A}} = 90°$), όπου είναι $\mathrm{AB} = 15$ και $\Delta\mathrm{B} = 9$, έχουμε

$\mathrm{AB}^2 = \Delta\mathrm{B} \cdot \mathrm{B\Gamma}$ ή $15^2 = 9 \cdot \mathrm{B\Gamma}$ ή $\mathrm{B\Gamma} = \frac{225}{9}$ ή $\mathrm{B\Gamma} = 25$.

ii) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{\mathrm{A}} = 90°$), όπου είναι $\mathrm{AB} = 15$ και $\mathrm{B\Gamma} = 25$, έχουμε

$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 - \mathrm{AB}^2$ ή $\mathrm{A\Gamma}^2 = 25^2 - 15^2$ ή $\mathrm{A\Gamma}^2 = 625 - 225$ ή $\mathrm{A\Gamma}^2 = 400$ ή $\mathrm{A\Gamma} = 20$.

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, το εμβαδόν του είναι

$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma}}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$.

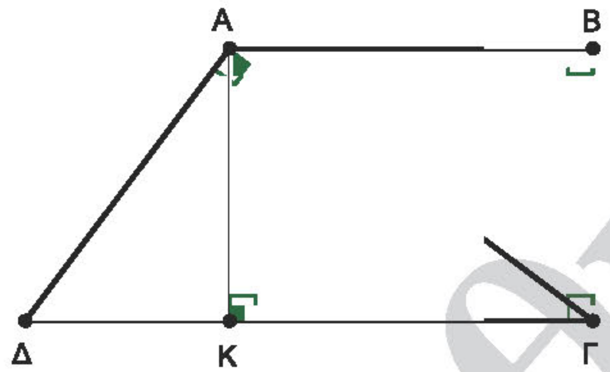
12

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma} = 90°$ και στο οποίο η πλευρά ΑΔ και η διαγώνιος ΑΓ είναι κάθετες. Έστω Κ η προβολή της κορυφής Α στην πλευρά ΓΔ , $\mathrm{K}\Delta = 9$ και $\mathrm{K}\Gamma = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AK} = 12$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 13)



12 α

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ το ΑΚ είναι το ύψος του, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΔΓ και οι προβολές των κάθετων πλευρών ΑΔ και ΑΓ στην υποτείνουσα ΔΓ είναι αντίστοιχα $ΚΔ = 9$ και $ΚΓ = 16$. Άρα

$ΑΚ^2 = ΚΔ \cdot ΚΓ$ ή $ΑΚ^2 = 9 \cdot 16$ ή $ΑΚ^2 = 144$ ή $ΑΚ^2 = 12^2$ ή $ΑΚ = 12$.

β) Το τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει ύψος $ΑΚ = 12$ και βάσεις

$ΔΓ = ΚΔ + ΚΓ = 9 + 16 = 25$ και

$ΑΒ = ΚΓ = 16$, αφού το ΑΒΓΚ είναι ορθογώνιο $\left(\widehat{Β} = \widehat{Γ} = \widehat{Κ} = 90°\right)$.

Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι

$(ΑΒΓΔ) = \frac{(ΔΓ+ΑΒ)\cdot ΑΚ}{2} = \frac{(25+16)\cdot 12}{2} = 246$.

13

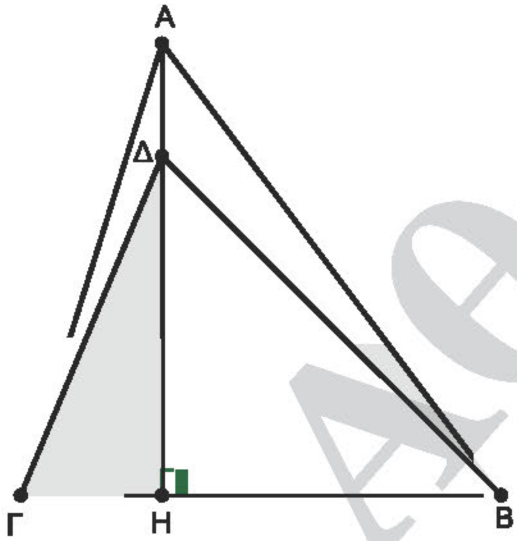
ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ του σχήματος το $ΑΗ$ είναι ύψος και το $Δ$ σημείο του $ΑΗ$. Δίνονται $ΑΒ = 20,\ ΒΗ = 12,\ ΓΗ = 5$ και ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΔ$ είναι $(ΑΒΔ) = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΗ = 16$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = 4$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΓΔΗ$. (Μονάδες 6)



13 α

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο AHB $(\hat{H} = 90°)$, είναι $AB = 20$ και $BH = 12$, άρα από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 = 16^2$ ή $AH = 16$.

β) Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση ΑΔ του τριγώνου ΑΒΔ είναι το $BH = 12$, και επειδή το εμβαδόν του είναι $(AB\Delta) = 24$, θα έχουμε

$(AB\Delta) = \frac{A\Delta \cdot BH}{2}$ ή $24 = \frac{A\Delta \cdot 12}{2}$ ή $6A\Delta = 24$ ή $A\Delta = 4$.

γ) Το τρίγωνο $\Gamma\Delta H$ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $\Delta H = AH - A\Delta = 16 - 4 = 12$ και $\Gamma H = 5$.

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta H$ είναι $(\Gamma\Delta H) = \frac{H\Gamma \cdot H\Delta}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$.

14

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Δ εσωτερικό της πλευράς του ΒΓ. Έστω Μ το μέσο Μ του τμήματος ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ΑΒΜ) = \frac{1}{2}(ΑΒΔ)$ (Μονάδες 8)

ii. $(ΑΒΜ) + (ΜΔΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$ (Μονάδες 9)

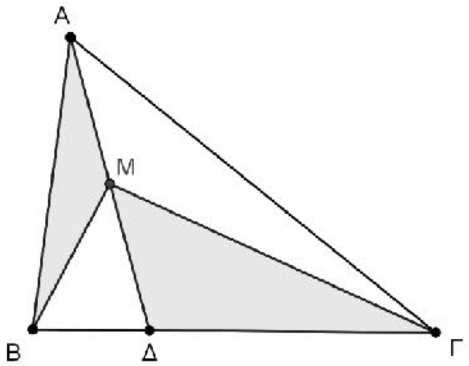
β) Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Δ τέτοια ώστε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΔΓ να έχουν ίσα εμβαδά. Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου Δ για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΜ και ΜΔΓ είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου ΑΒΜ και ΜΔΓ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

14 α

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, Δ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσο του τμήματος ΑΔ.



α)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΜ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΒΔ θα έχουν ίσα εμβαδά γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις ΜΑ και ΜΔ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή Β στον φορέα της πλευράς ΑΔ. Οπότε (ΑΒΜ) = (ΜΒΔ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΔ), δηλαδή (ΑΒΜ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΔ) (1).

ii. Στο τρίγωνο ΑΓΔ η ΓΜ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΜΓΔ θα έχουν ίσα εμβαδά, γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις ΜΑ και ΜΔ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή Γ στον φορέα της πλευράς ΑΔ. Οπότε (ΑΓΜ) = (ΜΔΓ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΓΔ), δηλαδή (ΜΔΓ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΓΔ) (2).

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη θα έχουμε ότι:

$$(ΑΒΜ) + (ΜΔΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΔ) + \frac{1}{2}(ΑΓΔ) = \frac{1}{2}[(ΑΒΔ) + (ΑΓΔ)] = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$$

β) Αν είναι (ΑΒΜ) = (ΜΔΓ) , τότε από τις σχέσεις (1) και (2) θα ισχύει:

$$\frac{1}{2}(ΑΒΔ) = \frac{1}{2}(ΑΓΔ) \text{ ή } (ΑΒΔ) = (ΑΓΔ)$$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος από την κοινή τους κορυφή Α στον φορέα των βάσεων τους ΒΔ και ΔΓ. Επομένως για να έχουν ίσα εμβαδά αρκεί να έχουν ίσες βάσεις, δηλαδή ΒΔ = ΔΓ. Αυτό θα συμβαίνει όταν το Δ είναι το μέσο της ΒΓ.

Όταν το σημείο Δ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε (ΑΒΜ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΔ) = $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ) = $\frac{1}{4}$ (ΑΒΓ). Όμοια (ΜΔΓ) = $\frac{1}{4}$ (ΑΒΓ).

$$\text{Δηλαδή } (ΑΒΜ) = (ΜΔΓ) = \frac{1}{4}(ΑΒΓ)$$

15

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες $\widehat{A} = 20^0$, $\widehat{B} = 100^0$, και η διχοτόμος ΑΕ της γωνίας του $\widehat{A}$. Από το Β φέρνουμε την κάθετη προς την ΑΕ και έστω Ζ , Δ τα σημεία τομής της καθέτου με τις ΑΕ, ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

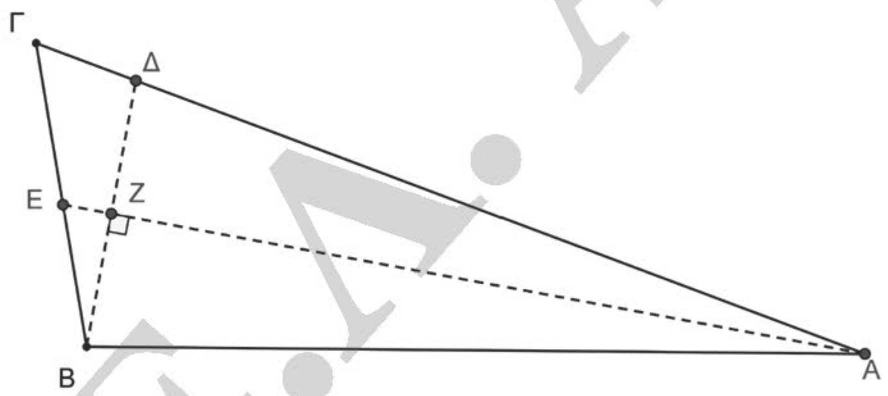
i. $\Gamma\widehat{B}\Delta = \widehat{A} = 20^0$ (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ, να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες .

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ. Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά.

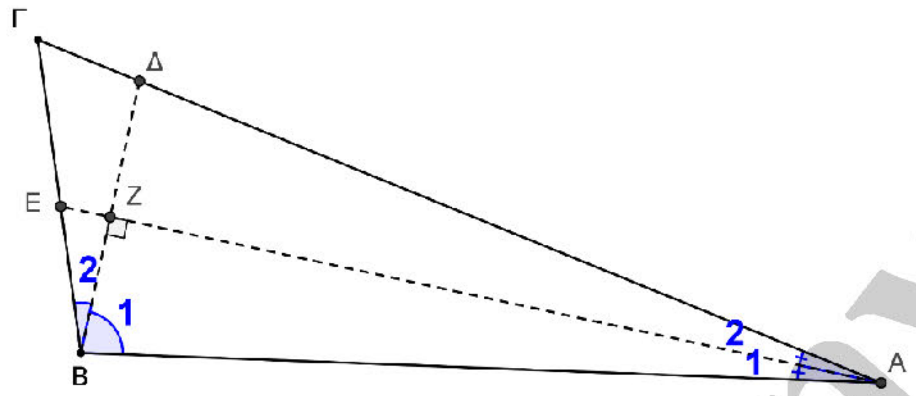
(Μονάδες 5)



15 α

ΛΥΣΗ

α)



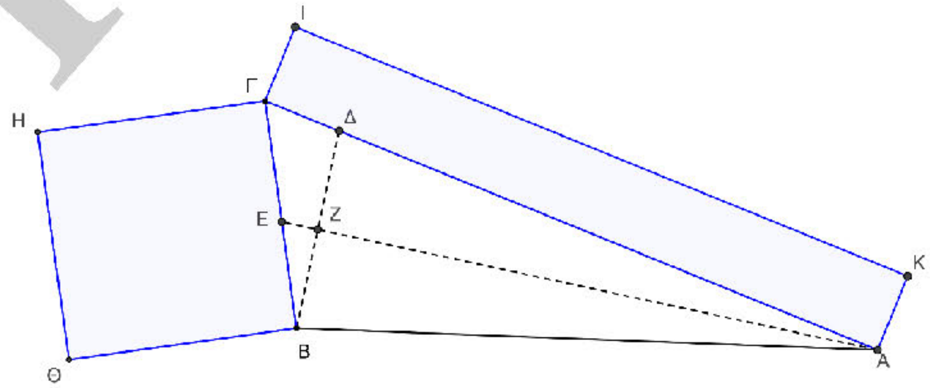
i. Αφού η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$, τότε $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{20^0}{2} = 10^0$.

Επειδή το τρίγωνο ΒΖΑ είναι ορθογώνιο, αφού η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΕ, οι γωνίες του $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_1$ είναι συμπληρωματικές και θα ισχύει $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 90^0$ με $\widehat{A}_1 = 10^0$. Επομένως $\widehat{B}_1 = 90^0 - 10^0$ ή $\widehat{B}_1 = 80^0$.

Είναι $\Gamma\widehat{B}A = \widehat{B} = 100^0$, οπότε θα είναι $\widehat{B}_2 = \Gamma\widehat{B}A - \widehat{B}_1$ με $\widehat{B}_1 = 80^0$. Επομένως $\widehat{B}_2 = 100^0 - 80^0 = 20^0$ ή $\Gamma\widehat{B}\Delta = 20^0$. Συνεπώς $\Gamma\widehat{B}\Delta = \widehat{A} = 20^0$.

ii. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν $\Gamma\widehat{B}\Delta = \widehat{A}$, από το i. ερώτημα και τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ κοινή, οπότε θα είναι όμοια γιατί έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\Gamma\widehat{\Delta}B = A\widehat{B}\Gamma$. Συνεπώς, τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών είναι οι ΓΔ, ΒΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma\widehat{B}\Delta$ και $\widehat{A}$, οι ΒΔ, ΑΒ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ (κοινή) και οι ΒΓ, ΑΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma\widehat{\Delta}B$ και $A\widehat{B}\Gamma$.

β)



Έστω ΒΓΗΘ είναι το τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ΑΓΙΚ είναι το ορθογώνιο με διαστάσεις την ΑΓ και το τμήμα ΓΔ.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΗΘ είναι (ΒΓΗΘ) = $\mathrm{B\Gamma}^2$ και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΓΙΚ είναι (ΑΓΙΚ) = ΑΓ· ΓΔ.

Τα εμβαδά των τετραπλεύρων θα είναι ίσα αν ισχύει η σχέση;

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{A\Gamma}\cdot \Gamma\Delta \text{ ή αν ισχύει } \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{B\Gamma}} \quad (1)$$

Από το ερώτημα α) ii. τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών τους θα είναι ίσοι, δηλαδή θα ισχύει $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}}$. Επομένως, θα ισχύει ότι $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{B\Gamma}}$, άρα και $\mathrm{B\Gamma}^2$ = ΑΓ· ΓΔ.

Συνεπώς, ισχύει η σχέση (1), άρα τα τετράπλευρα ΒΓΗΘ και ΑΓΙΚ έχουν ίσα εμβαδά.

16

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος παριστάνει την κάτοψη ενός κτήματος με $AB = 60$ m, $BΓ = 80$ m, $\hat{Δ} = 60^o$, $\hat{B} = 90^o$ και $AΔ = ΓΔ$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.

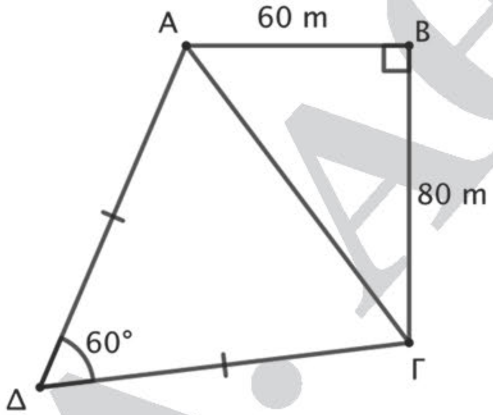
(Μονάδες 09)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 04)

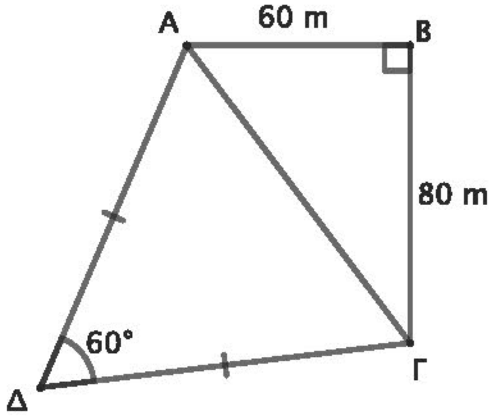
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ. Πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν του κτήματος;

(Μονάδες 12)



16 α

ΛΥΣΗ



α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$$

$$\text{ΑΓ}^2 = 60^2 + 80^2$$

$$\text{ΑΓ}^2 = 3600 + 6400$$

$$\text{ΑΓ}^2 = 10000$$

Επομένως, ΑΓ $=$ 100 m.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\hat{\Delta} = 60^o$. Οπότε, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο με ΑΔ $=$ ΑΓ $=$ ΓΔ $=$ 100 m.

γ) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ} = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 80 = 2400\ \ \text{m}^2$$

Το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΓ είναι:

$$(\text{ΑΔΓ}) = \frac{\text{ΑΓ}^2\sqrt{3}}{4} = 2500 \cdot \sqrt{3}\ \ \text{m}^2$$

Το συνολικό εμβαδόν του κτήματος θα είναι:

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΑΒΓ}) + (\text{ΑΔΓ}) = (2400 + 2500 \cdot \sqrt{3}\ )\ \text{m}^2$$

17

ΘΕΜΑ 2

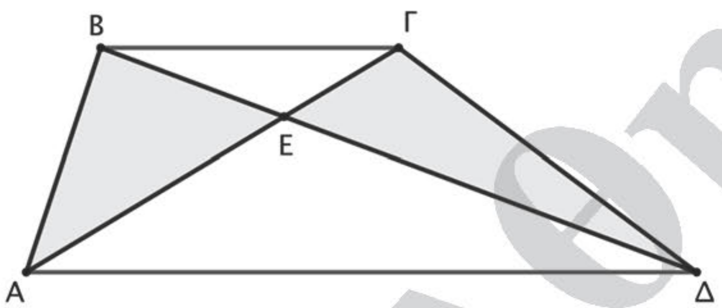
Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) και έστω Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ισοδύναμα.

(Μονάδες 13)

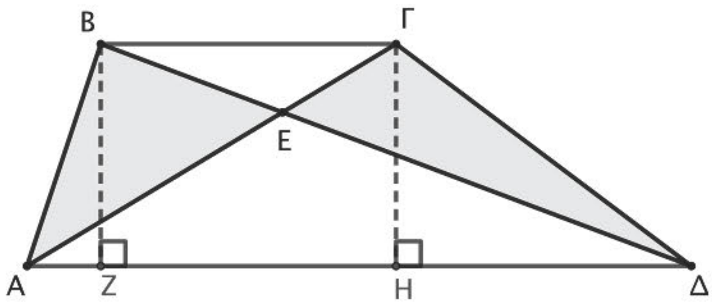
β) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων τριγώνων ΑΒΕ και ΔΓΕ.

(Μονάδες 12)



17 α

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν κοινή βάση ΑΔ. Επίσης, τα ύψη τους ΒΖ και ΓΗ είναι ίσα με το ύψος του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Οπότε, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ θα είναι ισοδύναμα, δηλαδή:

$$(ΑΒΔ) = (ΑΓΔ) \quad (1)$$

β) Έχουμε ότι:

$$(ΑΒΔ) = (ΑΒΕ) + (ΑΕΔ) \quad \text{και} \quad (ΑΓΔ) = (ΑΕΔ) + (ΔΓΕ)$$

Αντικαθιστώντας στην ισότητα (1) έχουμε:

$$(ΑΒΕ) + (ΑΕΔ) = (ΑΕΔ) + (ΔΓΕ)$$

Οπότε:

$$(ΑΒΕ) = (ΔΓΕ)$$

δηλαδή, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ισοδύναμα.

18

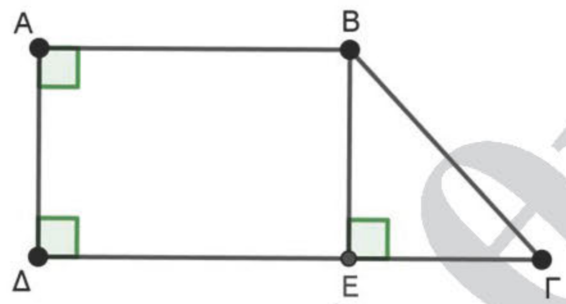
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, με $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^0$ και ΑΔ = 4, ΑΒ = 5, Δ Γ= 8. Από την κορυφή Β του τραπεζίου, φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην πλευρά ΔΓ.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΓ. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ του τραπεζίου. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma\Delta)}$. (Μονάδες 8)



18 α

ΛΥΣΗ

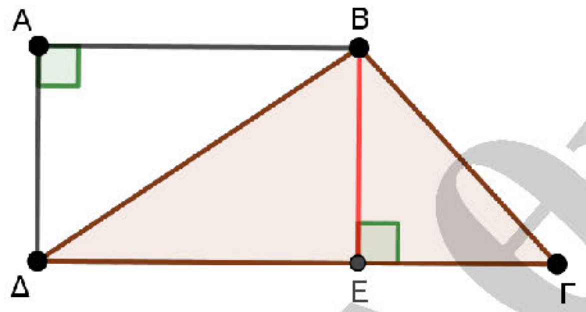
α) Από τα δεδομένα έχουμε: $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^0$ και ΑΔ=4, ΑΒ=5, ΔΓ=8.

Το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο (έχει τρείς γωνίες ορθές), οπότε ΒΕ = ΑΔ = 4 και ΔΕ = ΑΒ = 5. Άρα η ΕΓ = ΔΓ – ΔΕ = 8 – 5 = 3.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΒΕ^2 + ΕΓ^2$ ή $ΒΓ^2 = 4^2 + 3^2$ ή $ΒΓ^2 = 25$, άρα ΒΓ = 5.

γ)



Λόγω του ερωτήματος (α) είναι:

- $(ΒΔΓ) = \frac{1}{2}ΔΓ \cdot ΒΕ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$
- $(ΑΒΓΔ) = \frac{ΑΒ+ΔΓ}{2} \cdot ΑΔ = \frac{5+8}{2} \cdot 4 = 26$

οπότε: $\frac{(ΒΔΓ)}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$.

19

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές $\alpha = 40,\ \beta = 25,\ \gamma = 25$ και αντίστοιχα ύψη υ_α , υ_β , υ_γ. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $Ε = 300$ και τα ύψη του είναι $\upsilon_\alpha = 15$ και $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma = 24$. (Μονάδες 7)

iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη υ_α , υ_β , υ_γ είναι οξυγώνιο. (Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

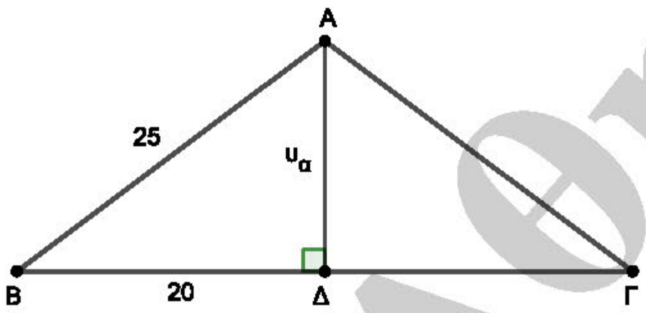
19 α

ΛΥΣΗ

α) i) Θα συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του τριγώνου $ΑΒΓ$ με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του.

Είναι $\alpha^2 = 40^2 = 1600$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 25^2 + 25^2 = 1250$, άρα $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ οπότε $\hat{A} > 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ θα είναι αμβλυγώνιο.

ii) Το ύψος $\upsilon_\alpha = ΑΔ$ από την κορυφή $Α$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι και διάμεσος, οπότε $ΒΔ = \frac{\alpha}{2} = \frac{40}{2} = 20$.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΒ$ ($\hat{Δ} = 90^\circ$), έχουμε

${\upsilon_\alpha}^2 = \gamma^2 - ΒΔ^2$ ή ${\upsilon_\alpha}^2 = 25^2 - 20^2$ ή ${\upsilon_\alpha}^2 = 225$ ή $\upsilon_\alpha = 15$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 15 = 300$.

Επίσης $E = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta$ ή $\upsilon_\beta = \frac{2E}{\beta} = \frac{600}{25} = 24$ και $E = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$ ή $\upsilon_\gamma = \frac{2E}{\gamma} = \frac{600}{25} = 24$.

iii) Είναι $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma = 24$ και $\upsilon_\alpha = 15$.

Είναι ${\upsilon_\beta}^2 < {\upsilon_\gamma}^2 + {\upsilon_\alpha}^2$ ή $24^2 < 24^2 + 15^2$ ή $0 < 15^2$ που ισχύει.

Άρα το τρίγωνο με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $ΑΒΓ$, είναι οξυγώνιο.

β) Έστω α, β, γ οι πλευρές οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου$ΑΒΓ$ με $\beta = \gamma$ και υ_α, υ_β, υ_γ τα αντίστοιχα ύψη. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο, η αμβλεία γωνία θα είναι η $\hat{A}$. Τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ ή $\alpha^2 > 2\beta^2$ ή $\frac{\alpha}{\beta} > \sqrt{2}$ ή $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ (1).

Είναι $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$, άρα $\frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$ και επειδή $\beta = \gamma$ προκύπτει $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$.

Επομένως το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $ΑΒΓ$, είναι ισοσκελές.

Επίσης είναι $\frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\alpha}$ άρα η από την (1) έχουμε $\frac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\alpha} > 1$ ή $\upsilon_\beta > \upsilon_\alpha$ άρα $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma > \upsilon_\alpha$. Επομένως ${\upsilon_\beta}^2 < {\upsilon_\gamma}^2 + {\upsilon_\alpha}^2$ ή $0 < {\upsilon_\alpha}^2$ που ισχύει. Άρα το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $ΑΒΓ$, είναι οξυγώνιο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

20

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΒΓ = $\sqrt{3}$, ΑΒ = $\sqrt{2}$, ΑΓ = 1.

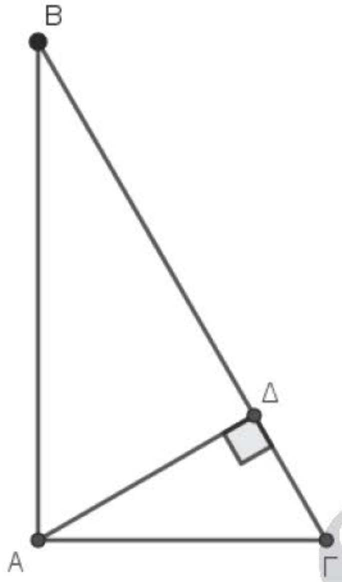
α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = 90^o$. (Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ. (Μονάδες 09)

20 α

ΛΥΣΗ



α)

Έχουμε:

$B\Gamma^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

$AB^2 + A\Gamma^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$

Επομένως, είναι $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, άρα η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΒΓ είναι ορθή, δηλαδή $\widehat{A} = 90^o$.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

γ) Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Το εμβαδόν του τριγώνου μπορεί να δοθεί και από τον τύπο

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}B\Gamma\cdot A\Delta$$

Στο ερώτημα β) βρήκαμε ότι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot A\Delta \quad \text{ή} \quad \sqrt{2} = \sqrt{3}\cdot A\Delta \quad \text{ή} \quad A\Delta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

21

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΓΔ = 2ΑΒ. Δίνεται επίσης ότι το σημείο Κ είναι μέσο της ΓΔ και Μ τυχαίο σημείο στην ΑΔ.

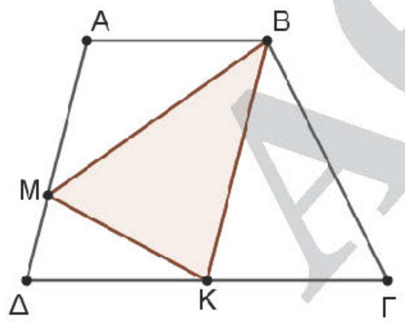
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ΒΚΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΚΔ)$ (Μονάδες 09)

ii. $(ΒΜΚ) = (ΒΚΓ)$ (Μονάδες 09)

β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο Μ κινείται πάνω στο εσωτερικό της ΑΔ, τότε ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓΔ) και (ΜΒΚ) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)



21 α

ΛΥΣΗ

α) Φέρουμε την ΒΚ. Επειδή ΓΔ = 2ΑΒ και Κ μέσο της ΓΔ, θα έχουμε ΑΒ =//ΔΚ, οπότε το ΑΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο και ΒΚ=//ΑΔ.

i. Φέρουμε την ΒΕ κάθετη στην ΓΔ. Τότε το ΒΕ είναι ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΒΚΓ αλλά και του παραλληλογράμμου ΑΒΚΔ. (ΑΒΚΔ) = ΔΚ·ΒΕ και (ΒΚΓ) = $\frac{\text{ΚΓ}\cdot\text{ΒΕ}}{2}$.

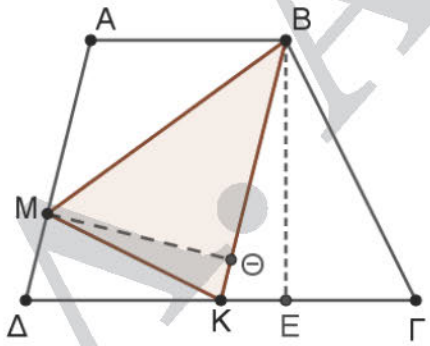
Όμως επειδή το Κ είναι μέσο της ΔΓ, έχουμε ΔΚ = ΚΓ.

Έτσι έχουμε (ΒΚΓ) = $\frac{\text{ΔΚ}\cdot\text{ΒΕ}}{2}=\frac{(\text{ΑΒΚΔ})}{2}$.

ii. Φέρουμε το ύψος ΜΘ του τριγώνου ΒΜΚ.

Τότε θα έχουμε (ΒΜΚ) = $\frac{\text{ΒΚ}\cdot\text{ΜΘ}}{2}=\frac{(\text{ΑΒΚΔ})}{2}$. Από το i ερώτημα έχουμε ότι

(ΒΚΓ) = $\frac{(\text{ΑΒΚΔ})}{2}$. Επομένως (ΒΚΓ) = (ΒΜΚ).



β)

Από το α.ii) έχουμε ότι 2(ΒΜΚ) = (ΑΒΚΔ) και (ΒΜΚ) = (ΒΚΓ).

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε 3(ΒΜΚ)= (ΑΒΚΔ) + (ΒΚΓ) = (ΑΒΓΔ),

δηλαδή $\frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{(\text{ΒΜΚ})}=3$.

Άρα, η προς διερεύνηση πρόταση είναι σωστή. Ο λόγος των εμβαδών είναι σταθερός και ίσος με 3.

22

ΘΕΜΑ 2

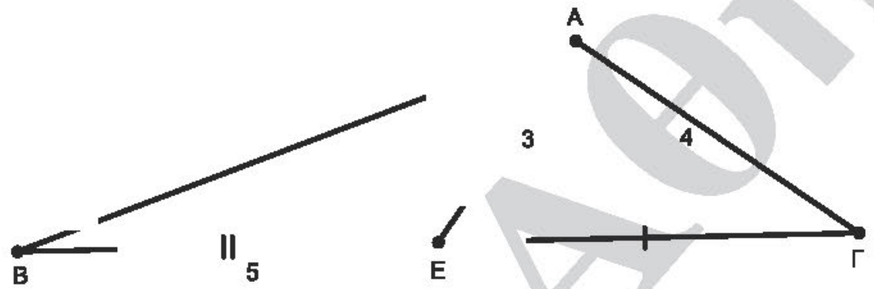
Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ έχει μήκος 3 και η πλευρά ΑΓ είναι ίση με 4. Αν ΒΕ=5, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΑΕ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΓ. (Μονάδες 10)

β)

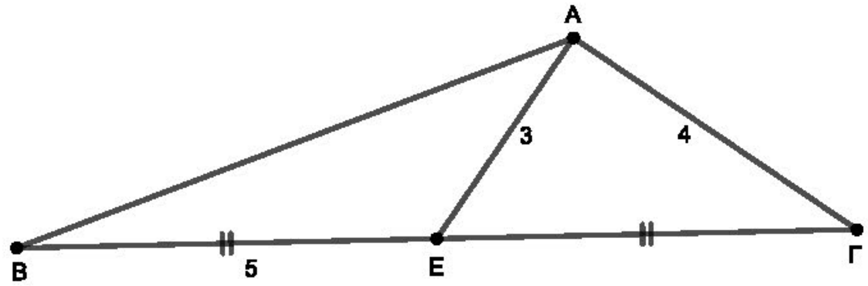
i. Να δικαιολογήσετε γιατί (ΑΒΕ)=(ΑΓΕ). (Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)



22 α

ΛΥΣΗ



α) Το τμήμα ΒΕ είναι το μισό της πλευράς ΒΓ, αφού η ΑΕ είναι διάμεσος στην πλευρά ΒΓ, άρα ΕΓ=5. Στο τρίγωνο ΑΓΕ μεγαλύτερη πλευρά του είναι η ΓΕ και θα εξετάσουμε αν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του. Δηλαδή αν $ΓΕ^2=ΑΓ^2+ΑΕ^2 \Leftrightarrow 5^2=4^2+3^2 \Leftrightarrow 25=16+9 \Leftrightarrow 25=25$ που ισχύει. Άρα το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο με $Ε\widehat{Α}Γ = 90^o$, οπότε $ΑΕ \perp ΑΓ$.

β)

i. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, άρα (ΑΒΕ) = (ΑΓΕ).

ii. Το ΑΓΕ είναι ορθογώνιο τρίγωνο, άρα το εμβαδό του θα ισούται με το ημιγινόμενο των κάθετων πλευρών του, δηλαδή $(ΑΓΕ) = \frac{}{2} \cdot ΑΕ \cdot ΑΓ = \frac{}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ τ.μ.

Από το β) i. ερώτημα έχουμε ότι (ΑΒΕ)=(ΑΓΕ), άρα (ΑΒΓ)=2(ΑΓΕ). Βρήκαμε ότι (ΑΓΕ)=6, επομένως (ΑΒΓ) = 2·6 =12 τ.μ.