Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

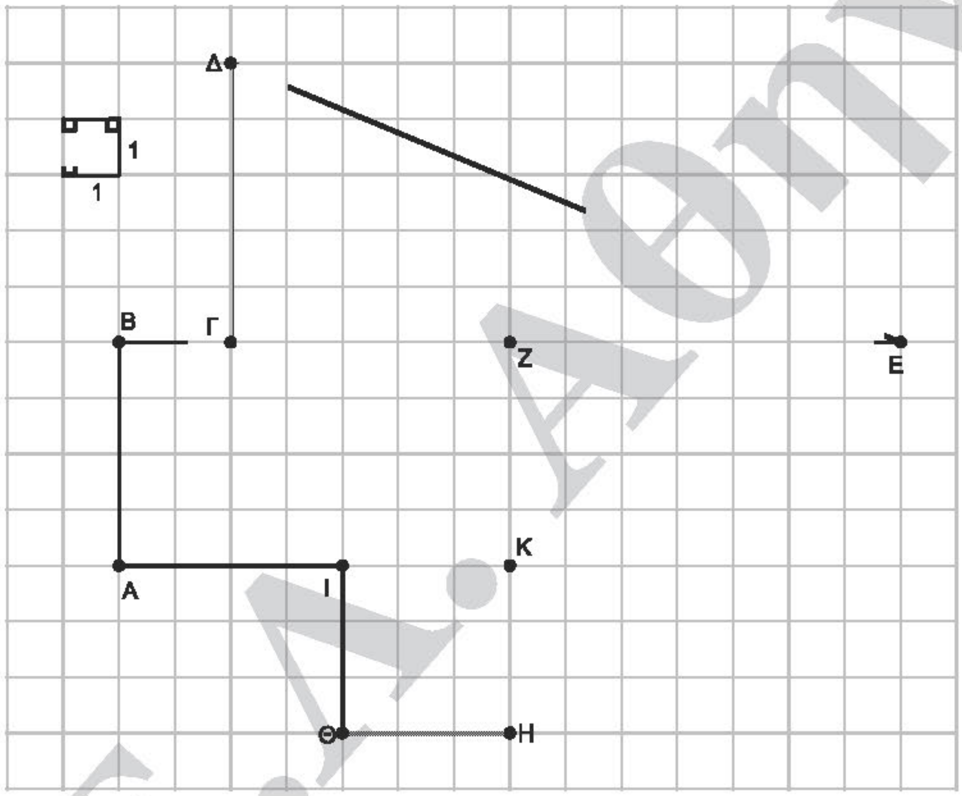
23

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα:

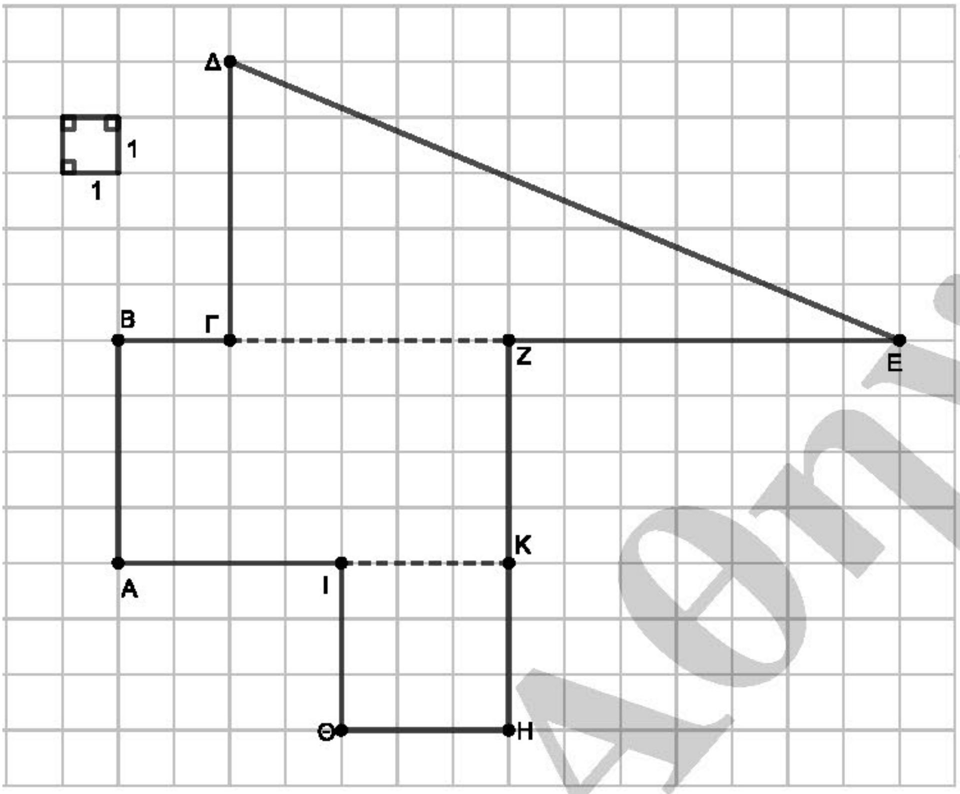
α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΕ. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΑ. (Μονάδες 15)



23 α

ΛΥΣΗ



α) Φέροντας το τμήμα ΓΖ, το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο με ΔΓ= 5 και ΓΕ=12. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $ΔΕ^2=ΔΓ^2+ΓΕ^2$ ή $ΔΕ^2=5^2+12^2$ ή $ΔΕ^2=25+144$ ή $ΔΕ^2=169$, άρα ΔΕ=13.

β) Το χωρίο αποτελείται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΕ, το ορθογώνιο ΒΖΚΑ και το τετράγωνο ΚΗΘΙ. Υπολογίζουμε τα εμβαδά τους ξεχωριστά.

(ΔΓΕ) = $\frac{1}{2}\cdot ΓΕ \cdot ΔΓ = \frac{1}{2}\cdot 12 \cdot 5 = 30$ τ.μ.

(ΒΖΚΑ) = ΒΖ·ΑΒ = 7·4 = 28 τ.μ.

(ΚΗΘΙ) = 3^2 = 9 τ.μ.

Άρα (ΑΒΓΔΕΖΗΘΙ) = (ΔΓΕ) + (ΒΖΚΑ) + (ΚΗΘΙ) = 30 + 28 + 9 = 67 τ.μ.

24

ΘΕΜΑ 2

Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 36 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

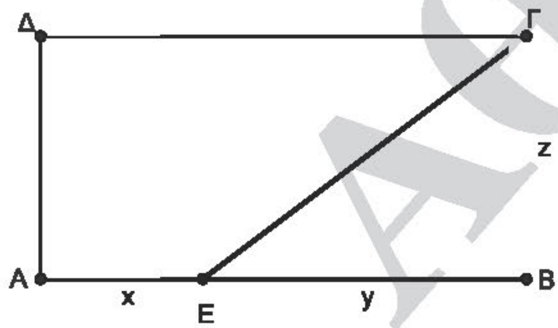
α) Να αποδείξετε ότι $x = 4$, $y = 8$ και $z = 6$. (Μονάδες 13)

β)

i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ.

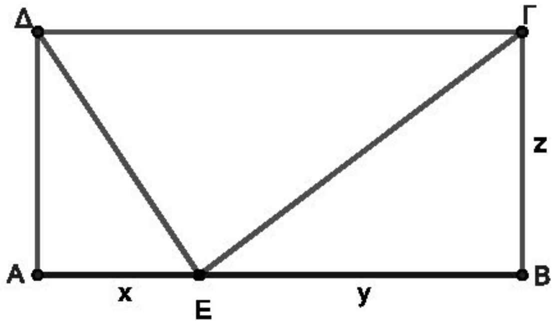
ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου ΓΔΕ προς το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 12)



24 α

ΛΥΣΗ



α) Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 36. Οπότε 2 ΑΒ + 2 ΒΓ = 36 ή 2 (x + y) + 2 z = 36 ή x + y + z = 18. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, άρα ισχύει $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} = \frac{18}{9} = 2$. Άρα x = 2·2 = 4, y = 4·2 = 8 και z = 3·2 = 6.

β)

i. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$ όπου η βάση έχει μήκος ΔΓ = ΑΒ = 4 + 8 = 12 και το ύψος είναι το κάθετο τμήμα από την κορυφή Ε προς την πλευρά ΔΓ που έχει μήκος ίσο με 6 , οπότε (ΓΕΔ) = $\frac{12 \cdot 6}{2}$ = 6·6 = 36.

ii. Το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι : (ΑΒΓΔ) = 12 · 6 = 72. Το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ είναι 36. Οπότε $\frac{(\Gamma E \Delta)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$. Δηλαδή το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ είναι το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

25

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΑΒ = 24, ΒΓ = 12 και σημείο Ε στην ευθεία ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ όταν :

i. Το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ.

ii. Το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου.

(Μονάδες 16)

β) Αφήνουμε το σημείο Ε να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β.

i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ αυξάνεται ή μειώνεται.

(Μονάδες 05)

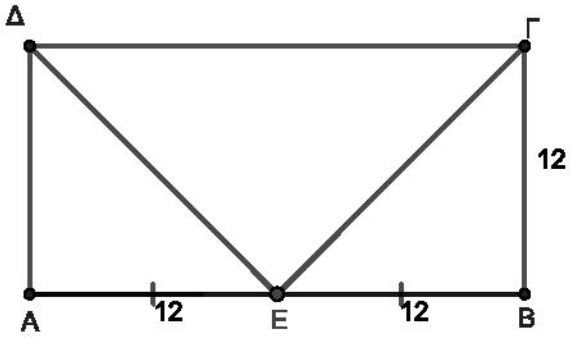
ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ στο ερώτημα β)i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 04)

25 α

ΛΥΣΗ

α)

i.

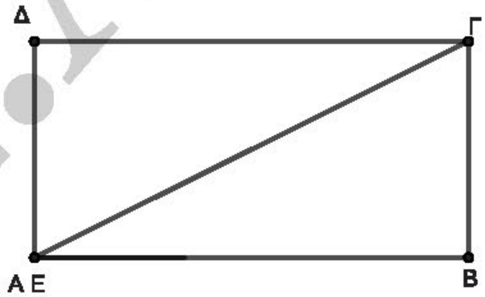


Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ορθογώνια με καθεμιά από τις κάθετες πλευρές τους 12. Οπότε είναι ίσα και ισχύει ΓΕ = ΔΕ. Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει $\Gamma\text{E}^2 = \Delta E^2 = 12^2 + 12^2 = 2 \cdot 12^2$. Οπότε ΓΕ = ΔΕ = $12\sqrt{2}$.

Η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ είναι ίση με $24 + 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 24 + 24\sqrt{2}$.

Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\frac{\beta\upsilon}{2}$, όπου η βάση έχει μήκος ΔΓ = ΑΒ = 24 και το ύψος είναι το κάθετο τμήμα από την κορυφή Ε προς την πλευρά ΔΓ που έχει μήκος όσο η απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ, δηλαδή ίσο με 12. Άρα (ΓΕΔ) = $\frac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

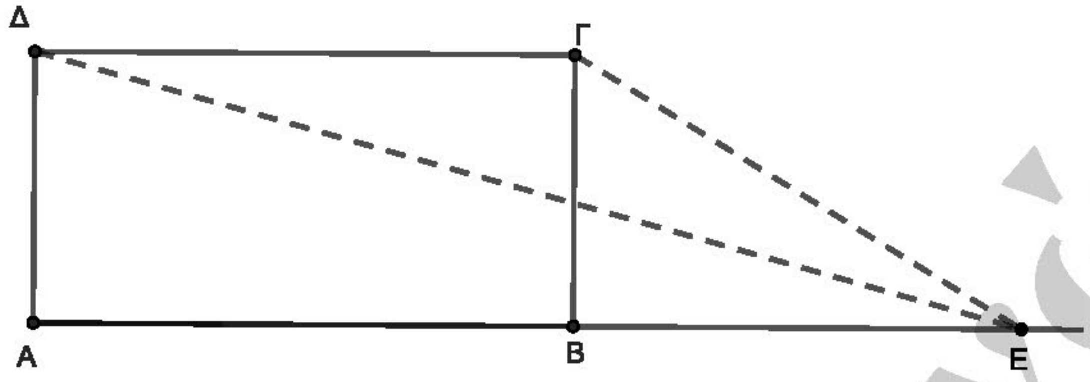
ii.



Αν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου τότε το τρίγωνο ΓΕΔ ταυτίζεται με το τρίγωνο ΓΑΔ. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με ΓΑ + ΑΔ + ΔΓ (1). Για την πλευρά ΓΑ που είναι υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε $\Gamma\text{A}^2 = \text{AB}^2 + \text{B}\Gamma^2$ ή $\Gamma\text{A}^2 = 24^2 + 12^2 = 2^2 \cdot 12^2 + 12^2 = 5 \cdot 12^2$ ή ΓΑ = $12\sqrt{5}$. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ από τη σχέση (1) ισούται με $12\sqrt{5} + 12 + 24 = 36 + 12\sqrt{5}$.

Το εμβαδό του τριγώνου όταν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α ισούται με το εμβαδό του τριγώνου ΓΑΔ που είναι ίσο με $\frac{\Delta\Gamma \cdot \text{A}\Delta}{2} = \frac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

β)



i. Αν το σημείο Ε κινηθεί πάνω στη ευθεία ΑΒ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΔΓ τότε η πλευρά ΔΓ παραμένει σταθερή αλλά οι δυο άλλες πλευρές του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται. Αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση της ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β, τα πλάγια τμήματα ΓΕ και ΔΕ συνεχώς μεγαλώνουν, αφού το ίχνος τους Ε απέχει ολοένα και περισσότερο από τα ίχνη Β και Α των κάθετων τμημάτων ΓΒ και ΔΑ αντίστοιχα. Οπότε η περίμετρος η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλεται και συνεχώς αυξάνεται.

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ, θα πάρουμε ως βάση τη σταθερή πλευρά του ΔΓ, οπότε το ύψος του προς τη ΔΓ ισούται με την απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που είναι σταθερή και ίση με 12. Το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ σε οποιαδήποτε θέση της κορυφής Ε πάνω στην ευθεία ΑΒ είναι ίσο με : $\frac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι: (ΑΒΓΔ) = 24 · 12 = 288.

Άρα (ΓΕΔ) = 144 = $\frac{288}{2} = \frac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.

Συμπερασματικά αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β απομακρυνόμενο από το σημείο Β, οι πλευρές ΓΕ και ΔΕ του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται, η περίμετρος μεταβάλλεται (αυξάνεται) όπως έχει προκύψει στο βi) αλλά το εμβαδό του τριγώνου μένει σταθερό και ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου.

26

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$ =90°.

Με πλευρά την υποτείνουσα ΒΓ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο ΒΓΔΕ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το Α και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ. Από τα σημεία Γ και Ζ φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Η.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου. (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

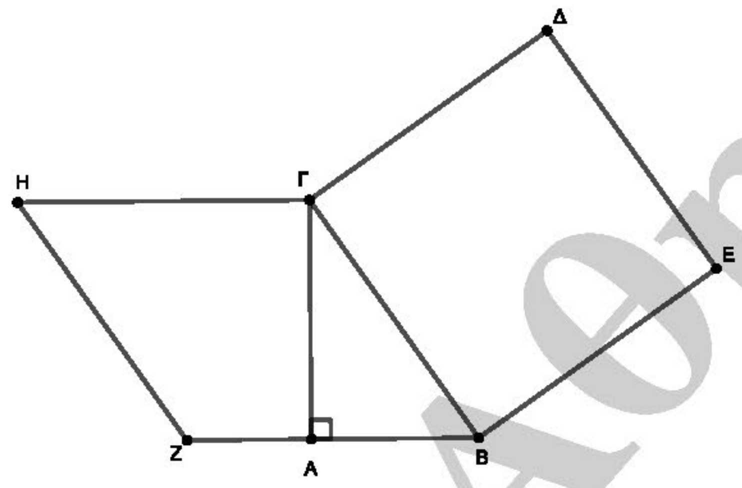
Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά».

Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

26 α

ΛΥΣΗ

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=90^{o}$ και ΒΓΔΕ το τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το Α και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ. Οι παράλληλες από το Γ στη ΒΖ και από το Ζ στη ΒΓ τέμνονται στο Η.



α) Το τετράπλευρο ΒΓΗΖ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΒΓ και ΒΖ είναι ίσες από την κατασκευή, οπότε το ΒΓΗΖ είναι ρόμβος με πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Άρα η περίμετρος του ρόμβου είναι ίση με 4·ΒΓ. Επίσης το τετράγωνο ΒΓΔΕ έχει πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου, άρα η περίμετρός του είναι ίση με 4·ΒΓ. Δηλαδή ο ρόμβος και το τετράγωνο έχουν ίσες περιμέτρους.

β) Για το εμβαδό του τετραγώνου έχουμε ότι (ΒΓΔΕ) = $ΒΓ^2$. Ενώ, για το εμβαδό του ρόμβου, αφού ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε: (ΒΓΗΖ) = ΒΖ·ΓΑ με ΓΑ η απόσταση των παραλλήλων πλευρών του ΒΖ και ΓΗ. Συγκρίνοντας τα δύο εμβαδά παρατηρούμε ότι, για το εμβαδό του τετραγώνου το τμήμα ΒΓ πολλαπλασιάζεται με το ΒΓ και για το εμβαδό του ρόμβου, το ΒΓ πολλαπλασιάζεται με το ΑΓ. Το τμήμα ΑΓ είναι κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και το τμήμα ΒΓ είναι υποτείνουσα. Όμως η κάθετη πλευρά είναι πάντα μικρότερη της υποτείνουσας, επομένως το εμβαδό του ρόμβου είναι μικρότερο από το εμβαδό του τετραγώνου και δεν γίνεται ποτέ τα δύο σχήματα να είναι ισεμβαδικά. Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι σωστός.

27

ΘΕΜΑ 4

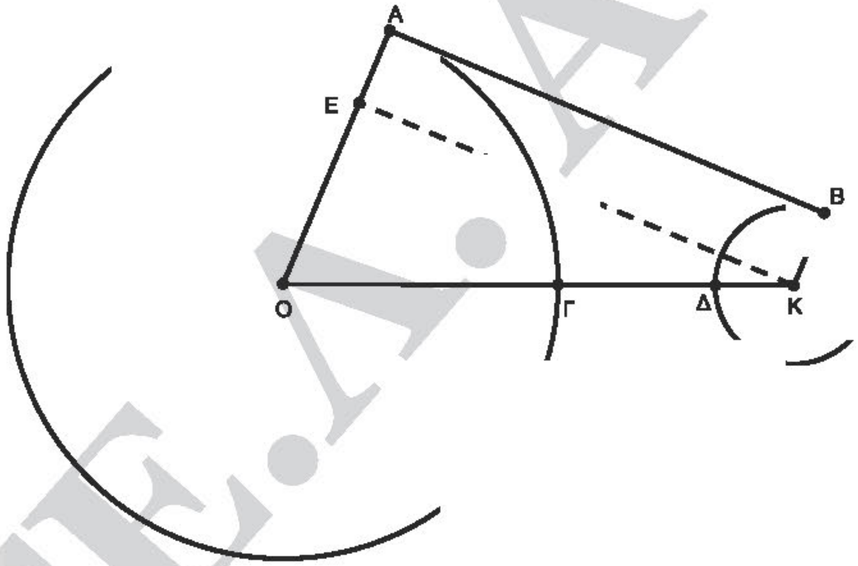
Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα Ο και Κ. Ο κύκλος με κέντρο Ο έχει ακτίνα R=7 ενώ ο κύκλος με κέντρο Κ έχει ακτίνα ρ=2. Το τμήμα ΑΒ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα ΚΕ είναι παράλληλο στο τμήμα ΑΒ με Ε σημείο του τμήματος ΟΑ. Η διάκεντρος ΟΚ τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (Κ,ρ) στο σημείο Δ.

α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι ΓΔ=4, τότε:

i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΟ. (Μονάδες 07)

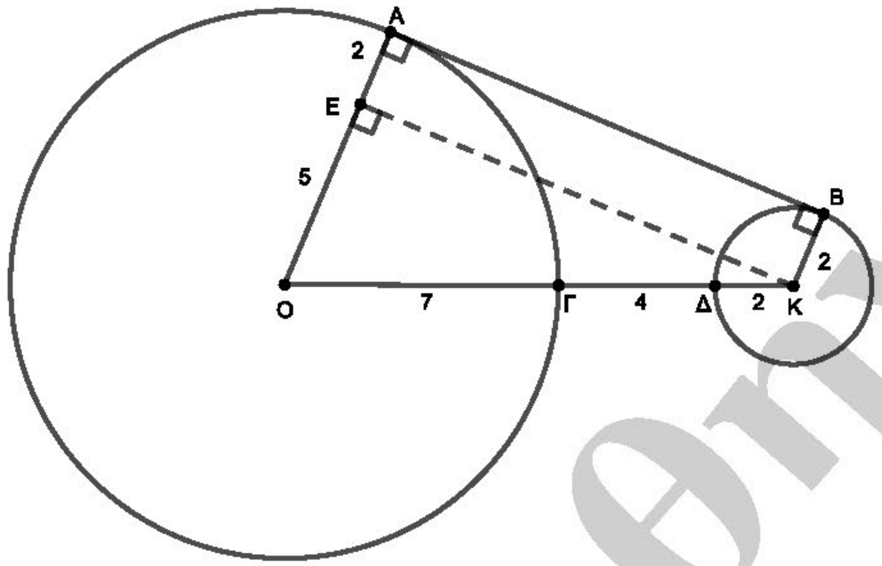
β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του ΑΒΚΕ να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ.; (Μονάδες 08)



27 α

ΛΥΣΗ

α)



i. Οι ακτίνες ΟΑ και ΚΒ είναι κάθετες στο εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ στα σημεία επαφής Α και Β. Το τμήμα ΚΕ είναι παράλληλο στο ΑΒ και αφού ΑΒ⊥ΟΑ, θα είναι και ΚΕ⊥ΟΑ. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΚΕ έχει 3 ορθές γωνίες και είναι ορθογώνιο. Επομένως ΑΕ=ΚΒ=2 και ΟΕ=ΟΑ-ΕΑ=7-2=5. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΚ η υποτείνουσά του ΟΚ είναι ΟΓ+ΓΔ+ΔΚ=7+4+2=13. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $KE^2=OK^2-OE^2$ ή $KE^2=13^2-5^2$ ή $KE^2=169-25$ ή $KE^2=144$, άρα ΚΕ=12. Άρα ΑΒ = ΚΕ =12.

ii. Στο τετράπλευρο ΑΒΚΟ είναι ΟΑ⊥ΑΒ και ΚΒ⊥ΑΒ, άρα ΟΑ//ΚΒ. Επίσης ΟΑ=7≠2=ΚΒ, άρα οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και άνισες, οπότε δεν είναι παραλληλόγραμμο. Άρα το ΑΒΚΟ είναι τραπέζιο, στο οποίο η μικρή του βάση είναι η ΚΒ, η μεγάλη βάση του η ΟΑ και το ύψος του είναι το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΑΒ. Οπότε (ΑΒΚΟ) = $\frac{KB+OA}{2}\cdot AB = \frac{2+7}{2}\cdot 12 = 54$ τ.μ.

β) Το ΑΒΚΕ είναι ορθογώνιο, άρα (ΑΒΚΕ) = ΑΒ·ΚΒ. Επειδή (ΑΒΚΕ) = $4\sqrt{14}$, έχουμε: $4\sqrt{14}$ = ΑΒ·2 άρα ΑΒ = $2\sqrt{14}$. Από το α) ερώτημα ΑΒ=ΚΕ, οπότε ΚΕ=$2\sqrt{14}$ και από το Π.Θ. στο τρίγωνο ΟΚΕ είναι: $OK^2 = OE^2+KE^2$ ή $OK^2=5^2+(2\sqrt{14})^2$, ή $OK^2 = 25+56$, ή $OK^2=81$, άρα ΟΚ=9. Για το τμήμα ΟΚ ισχύει ότι ΟΚ=ΟΓ+ΓΔ+ΔΚ, ή 9=7+ΓΔ+2, δηλαδή 9=9+ΓΔ, οπότε ΓΔ=0. Δηλαδή η διάκεντρος ΟΚ των δύο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους. Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

28

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

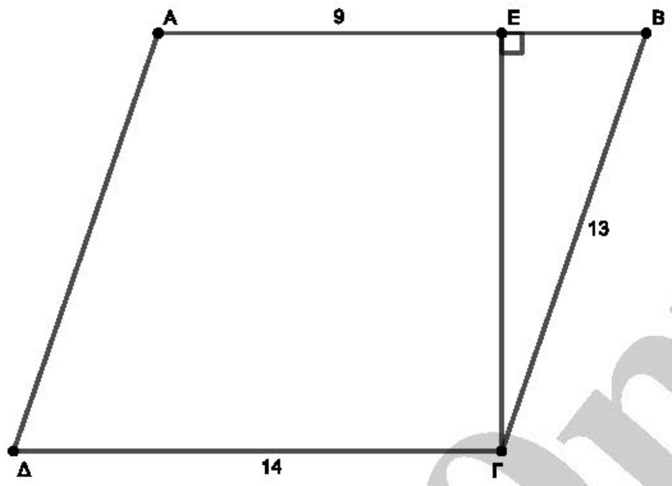
ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ.

(Μονάδες 12)

28 α

ΛΥΣΗ

Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Φέρουμε ΓΕ⊥ΑΒ.



α) ΑΒ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Για το τμήμα ΒΕ έχουμε: ΒΕ = ΑΒ – ΑΕ = 14 – 9 = 5. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$\Gamma E^2=\Gamma B^2-BE^2$ ή $\Gamma E^2=13^2-5^2$ ή $\Gamma E^2=169-25$ ή $\Gamma E^2=144$, άρα ΓΕ=12.

β)

i. Το μήκος ΓΕ είναι η απόσταση των απέναντι πλευρών ΑΒ και ΓΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Άρα (ΑΒΓΔ)= $AB\cdot\Gamma E=14\cdot 12$, δηλαδή (ΑΒΓΔ)=168 τ.μ.

ii. Το τραπέζιο ΑΕΓΔ είναι ορθογώνιο και οι βάσεις του είναι οι ΑΕ και ΓΔ. Άρα (ΑΕΓΔ)= $\frac{AE+\Gamma\Delta}{2}\cdot\Gamma E=\frac{9+14}{2}\cdot 12=23\cdot 6$, δηλαδή (ΑΕΓΔ)=138 τ.μ.

29

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ, ώστε ΑΒ > ΓΔ. Από τις κορυφές Γ κα Δ φέρουμε ΓΕ//ΑΔ και ΔΖ//ΓΒ, με Ε και Ζ σημεία στην πλευρά ΑΒ του τραπεζίου.

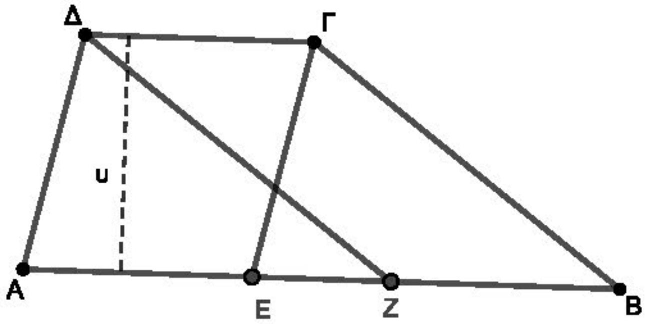
α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ. (Μονάδες 9)

β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)

γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά; (Μονάδες 8)

29 α

ΛΥΣΗ



α) Τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ έχουν τις απέναντι πλευρές τους ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμα. Για τα εμβαδά τους έχουμε :

(ΑΔΓΕ) = ΔΓ · υ (1), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου ή αλλιώς η απόσταση των βάσεών του.

(ΒΓΔΖ) = ΔΓ · υ (2), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ είναι ισεμβαδικά.

β) Το τετράπλευρο ΑΔΓΕ έχει περίμετρο Π_1 = ΑΔ + ΔΓ + ΓΕ + ΕΑ, αλλά οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες αφού είναι παραλληλόγραμμο, οπότε Π_1 = 2 · ΑΔ + 2 · ΔΓ.

Το τετράπλευρο ΒΓΔΖ είναι επίσης παραλληλόγραμμο οπότε έχει περίμετρο Π_2 = ΒΓ + ΔΓ + ΔΖ + ΖΒ = 2 · ΒΓ + 2 · ΔΓ.

γ) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ έχουν ίσα εμβαδά ανεξάρτητα από τη μορφή που έχει το αρχικό τραπέζιο. Για να έχουν και ίσες περιμέτρους θα πρέπει ΑΔ = ΒΓ, δηλαδή το αρχικό τραπέζιο να έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες, οπότε το τραπέζιο ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές.

30

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο με πλευρά α και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε ΒΣ = ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α:

i. Το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ.

ii. Το μήκος της πλευράς ΣΓ του τριγώνου ΣΔΓ.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ' στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε ΒΣ' > ΒΣ. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

i. Το εμβαδό του τριγώνου Σ'ΔΓ με το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ.

ii. Το μήκος της πλευράς Σ'Γ με το μήκος της πλευράς ΣΓ των τριγώνων Σ'ΔΓ και ΣΔΓ αντίστοιχα.

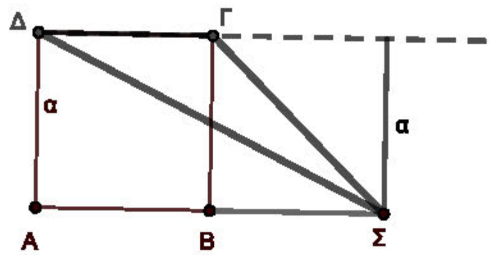
iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες ΣΓ και Σ'Γ.

(Μονάδες 15)

30 α

ΛΥΣΗ

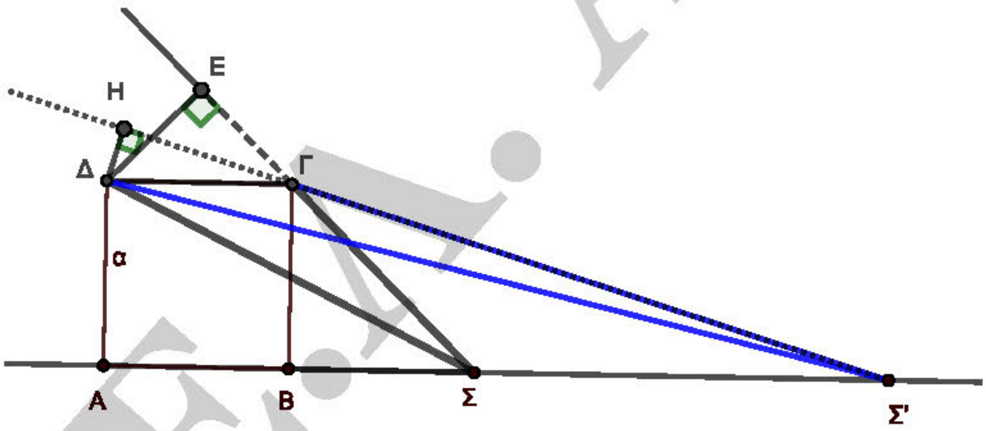
α)



i. Για να υπολογίσουμε το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ μπορούμε να πάρουμε ως βάση την πλευρά ΔΓ, οπότε το ύψος είναι η απόσταση της κορυφής Σ από την ευθεία ΔΓ που είναι ίση με α. Άρα (ΣΔΓ) = $\frac{1}{2}$·α·α = $\frac{\alpha^2}{2}$.

ii. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΣΒΓ έχουμε $\Sigma\Gamma^2$ = $\Sigma\mathrm{B}^2$ + $\mathrm{B}\Gamma^2$ ή $\Sigma\Gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2$ ή $\Sigma\Gamma^2 = 2\,\alpha^2$ ή ΣΓ = α$\sqrt{2}$.

β)



i. Τα τρίγωνα Σ'ΔΓ και ΣΔΓ έχουν κοινή βάση τη ΔΓ και ύψος ίσο με την απόσταση των παραλλήλων πλευρών ΑΒ και ΔΓ, αφού οι κορυφές τους Σ και Σ' βρίσκονται στην ευθεία ΑΒ // ΔΓ. Οπότε τα τρίγωνα αυτά έχουν και ίσα εμβαδά.

(Σ'ΔΓ) = (ΣΔΓ) = $\frac{1}{2}$·α·α = $\frac{\alpha^2}{2}$.

ii. Από το σημείο Γ έχουμε το κάθετο τμήμα ΓΒ προς την ευθεία ΑΒ και τα πλάγια ΓΣ και ΓΣ'. Τα ίχνη Σ και Σ' των πλάγιων τμημάτων ΓΣ και ΓΣ' αντίστοιχα είναι τέτοια ώστε οι αποστάσεις τους από το ίχνος Β του κάθετου ΓΒ να είναι άνισες και συγκεκριμένα ΒΣ’ > ΒΣ, οπότε και τα αντίστοιχα πλάγια είναι ομοίως άνισα δηλαδή ΓΣ’ > ΓΣ.

iii. Η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ΣΓ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔΕ και η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία Σ’Γ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔΗ. Ισχύει (Σ’ΔΓ) = $\frac{1}{2}\cdot$Σ’Γ $\cdot$ΔΗ και (ΣΔΓ) = $\frac{1}{2}\cdot$ΣΓ $\cdot$ΔΕ. Δείξαμε στο ερώτημα βi) ότι τα τρίγωνα Σ’ΔΓ και ΣΔΓ είναι ισεμβαδικά οπότε θα έχουμε:

$\frac{1}{2}\cdot$Σ’Γ $\cdot$ΔΗ = $\frac{1}{2}\cdot$ΣΓ $\cdot$ΔΕ ή Σ’Γ $\cdot$ΔΗ = ΣΓ $\cdot$ΔΕ ή $\frac{Σ'Γ}{ΣΓ} = \frac{ΔΕ}{ΔΗ}$ και επειδή Σ’Γ > ΣΓ θα έχουμε ΔΕ > ΔΗ. Δηλαδή η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία Σ’Γ είναι μικρότερη από την απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ΣΓ.

31
ΘΕΜΑ 3

Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα μήκη των πλευρών του είναι $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α, τότε:

i. να υπολογίσετε το ΔΒ. (Μονάδες 9)

ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)

31 α

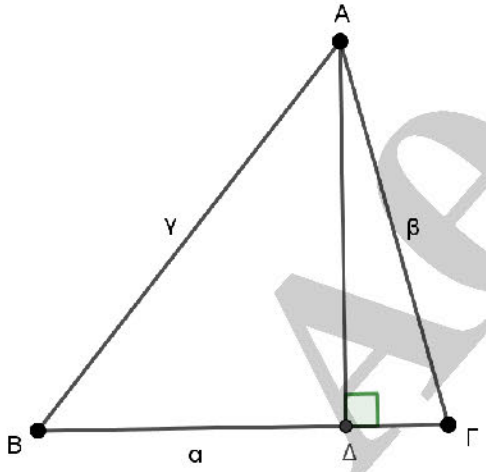
ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε: $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$, οπότε η πλευρά γ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Θα συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων.

Είναι: $\gamma^2 = 5^2 = 25$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 4^2 + \sqrt{17}^2 = 16 + 17 = 33$.

Οπότε $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$ άρα η $\hat{\Gamma} < 90^0$, επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, εφόσον απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του.

β)



i. Λόγω του ερωτήματος (α), η γωνία Γ είναι οξεία. Οπότε από τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι:

   $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\cdot\Delta\Gamma$ ή $25 = 33 - 2\cdot4\cdot\Delta\Gamma$ ή $8\cdot\Delta\Gamma = 8$ ή $\Delta\Gamma = 1$.

   Οπότε $\Delta B = B\Gamma - \Delta\Gamma = 4 - 1 = 3$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι:

   $A\Delta^2 = \beta^2 - \Delta\Gamma^2$ ή $A\Delta^2 = \sqrt{17}^2 - 1^2$ ή $A\Delta^2 = 16$, οπότε $A\Delta = 4$.

   Έτσι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\cdot B\Gamma\cdot A\Delta = \frac{1}{2}\cdot4\cdot4 = 8$.

32

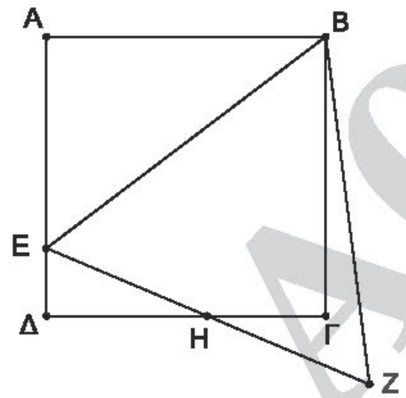
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3 και σημείο Ε της πλευράς ΑΔ, ώστε ΑΕ $= 4-\sqrt{3}$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία ΒΕ και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΕΖ. Οι ΓΔ και ΕΖ τέμνονται στο σημείο Η και ΔΗ $=\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΕ $= 2\sqrt{7-2\sqrt{3}}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε το Η είναι το μέσο της ΕΖ. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)



32 α

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι

$$\mathrm{BE}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AE}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\mathrm{AB} = 3$, $\mathrm{AE} = 4 - \sqrt{3}$, οπότε

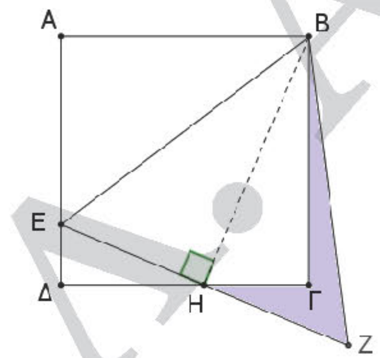
$$\mathrm{BE}^2 = 3^2 + (4-\sqrt{3})^2 \text{ ή } \mathrm{BE}^2 = 28 - 8\sqrt{3} = 4(7-2\sqrt{3}) \text{ ή } \mathrm{BE} = 2\sqrt{7-2\sqrt{3}}.$$

β) Είναι $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{A}\Delta - \mathrm{AE} = 3 - \left(4-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 1$. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΗ έχουμε ότι $\mathrm{EH}^2 = \Delta\mathrm{E}^2 + \Delta\mathrm{H}^2$. Όμως $\Delta\mathrm{H} = \sqrt{3}$ από τα δεδομένα και $\Delta\mathrm{E} = \sqrt{3} - 1$, οπότε

$$\mathrm{EH}^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \text{ ή } \mathrm{EH}^2 = 7 - 2\sqrt{3} \text{ ή } \mathrm{EH} = \sqrt{7-2\sqrt{3}} \quad (1).$$

Από την ισότητα (1) και το ερώτημα α) προκύπτει ότι $\mathrm{BE} = 2\mathrm{EH}$. Από τα δεδομένα το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισόπλευρο οπότε $\mathrm{EZ} = \mathrm{BE}$. Επομένως $\mathrm{EZ} = 2\mathrm{EH}$, δηλαδή το Η είναι το μέσο της ΕΖ.

γ)



Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου ισούται με τη διαφορά του εμβαδού του τριγώνου ΒΓΗ από το τρίγωνο ΒΖΗ, δηλαδή $(\mathrm{BZH}) - (\mathrm{B\Gamma H})$.

Το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α ισούται με $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$. Η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ ισούται με $2\sqrt{7-2\sqrt{3}}$, επομένως

$$(\mathrm{BEZ}) = \frac{4(7-2\sqrt{3})\sqrt{3}}{4} \text{ ή } (\mathrm{BEZ}) = 7\sqrt{3} - 6.$$

Το σημείο Η είναι το μέσο της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ, οπότε

$$(\mathrm{BZH}) = \frac{(\mathrm{BEZ})}{2} = \frac{7\sqrt{3}-6}{2} \quad (2).$$

Το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου ΒΓΗ είναι $(\mathrm{B\Gamma H}) = \frac{\mathrm{B\Gamma}\cdot\Gamma\mathrm{H}}{2}$ με $\mathrm{B\Gamma} = 3$ και $\Gamma\mathrm{H} = \Gamma\Delta - \Delta\mathrm{H} = 3 - \sqrt{3}$, οπότε

$$(\mathrm{B\Gamma H}) = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2} = \frac{9-3\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

Από τις ισότητες (2) και (3) προκύπτει ότι

$$(\mathrm{BZH}) - (\mathrm{B\Gamma H}) = \frac{7\sqrt{3}-6}{2} - \frac{9-3\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}-15}{2}.$$

33

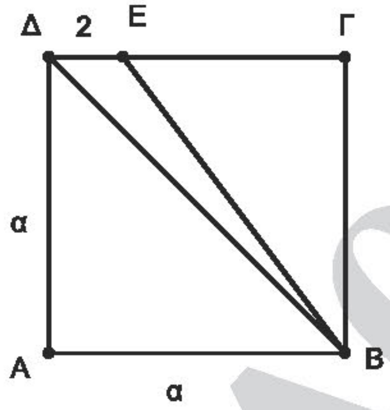
ΘΕΜΑ 2

Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς του ΔΓ έτσι ώστε

ΔΕ = 2. Αν γνωρίζουμε ότι: (ΒΕΔ) = $\frac{(ΑΒΓΔ)}{8}$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ. (Μονάδες 12)



33 α

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΕ ισούται με: (ΒΔΕ) = $\frac{1}{2}\cdot$ ΔΕ ·ΒΓ= $\frac{1}{2}$ ·2·α=α.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ ισούται με: (ΑΒΓΔ)= α^2.

Από την υπόθεση έχουμε: (ΒΕΔ) = $\frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{8}$, άρα α = $\frac{\alpha^2}{8}$ ή 8α = α^2 ή 8 = α.

Άρα η πλευρά του τετραγώνου είναι α = 8.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ΒΓ = α = 8, ΔΕ = 2 οπότε η ΓΕ = ΓΔ – ΔΕ = 8 – 2 = 6.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $BE^2 = B\Gamma^2 + \Gamma E^2$ ή

$BE^2 = 8^2 + 6^2$ ή $BE^2 = 64 + 36 = 100$ ή ΒΕ = 10.

34

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με υποτείνουσα $ΒΓ = 10$ και έστω ότι $Δ$ είναι η προβολή της κορυφής $Α$ στην $ΒΓ$.

α) Αν $ΔΒ = 2$ να υπολογίσετε:

i. το ύψος $ΑΔ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, (Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 5)

β) Υποθέστε ότι το σημείο $Α$ κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $ΒΓ$.

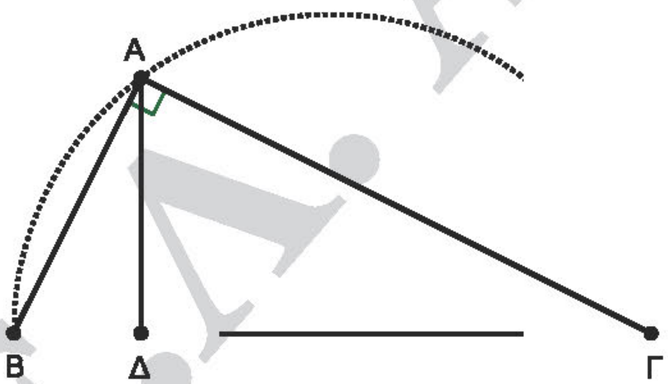
i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $(ΑΒΓ) = 5ΑΔ$.

(Μονάδες 7)

ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του $Α$ πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $ΒΓ$, το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



34 α

ΛΥΣΗ

α) i. Είναι $\Delta B = 2$ οπότε $\Delta\Gamma = B\Gamma - \Delta B = 10 - 2 = 8$. Όμως σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα. Επομένως

$$A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma \quad \text{ή} \quad A\Delta^2 = 2 \cdot 8 \quad \text{ή} \quad A\Delta^2 = 16 \quad \text{ή} \quad A\Delta = 4\,.$$

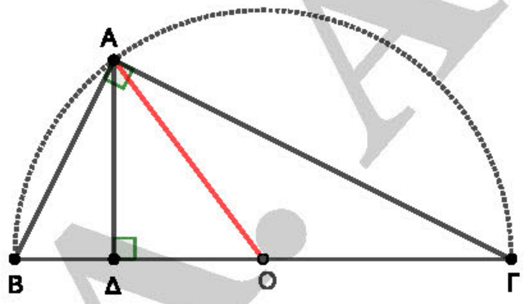
ii. Είναι $B\Gamma = 10$ και $A\Delta = 4$ οπότε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad (AB\Gamma) = \frac{10 \cdot 4}{2} \quad \text{ή} \quad (AB\Gamma) = 20.$$

β) i. Καθώς το σημείο A κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$, η βάση του τριγώνου $B\Gamma$ παραμένει σταθερή και ίση με 10, ενώ το αντίστοιχο ύψος $A\Delta$ μεταβάλλεται. Επομένως μεταβάλλεται και το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, το οποίο θα είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad (AB\Gamma) = \frac{10 \cdot A\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad (AB\Gamma) = 5A\Delta.$$

ii. Έστω O το κέντρο του κύκλου με διάμετρο τη $B\Gamma$.



- Το A ανήκει στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα $\frac{B\Gamma}{2} = 5$. Επομένως $OA = 5$ (1).
- Το Δ είναι η προβολή του A στη $B\Gamma$ και το O σημείο της $B\Gamma$. Επομένως $A\Delta \leq AO$ (2).
- $(AB\Gamma) = 5A\Delta$ (από το β(i))

  $\leq 5AO$ (από την (2))

  $= 25$ (από την (1)) .

Επομένως $(AB\Gamma) \leq 25$, οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής.

35

ΘΕΜΑ 2

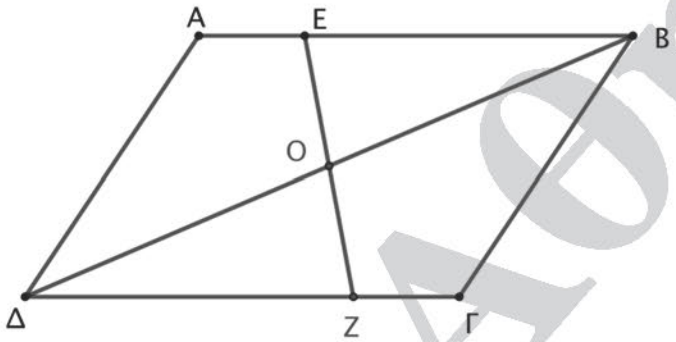
Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από το κέντρο Ο φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) (ΔΟΖ) = (ΒΟΕ).

(Μονάδες 10)

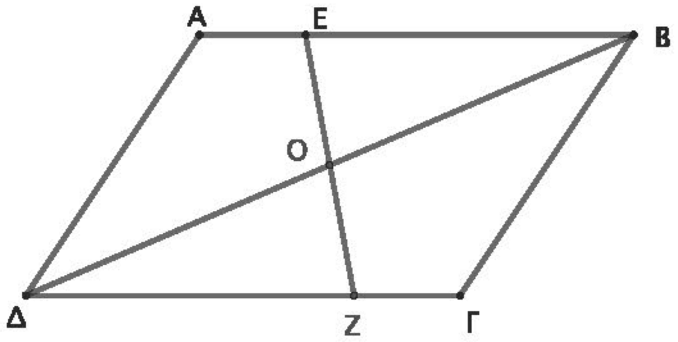
β) (ΔΟΕΑ) = (ΒΓΖΟ).

(Μονάδες 15)



35 α

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ είναι ίσα διότι έχουν:

ΔΟ=ΒΟ (το Ο είναι μέσο της ΔΒ)

$\Delta\hat{O}Z = B\hat{O}E$ (ως κατακορυφήν)

$Z\hat{\Delta}O = E\hat{B}O$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ τεμνόμενων από τη ΒΔ)

Επομένως, τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ θα είναι ισοδύναμα, δηλαδή (ΔΟΖ) = (ΒΟΕ).

β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΒΔ είναι ίσα, οπότε:

$$(\mathrm{A\Delta B}) = (\mathrm{\Gamma B\Delta})$$

Από το σχήμα έχουμε ότι (ΑΔΒ) = (ΔΟΕΑ) + (ΒΟΕ) και (ΓΒΔ) = (ΒΓΖΟ) + (ΔΟΖ).

Οπότε, είναι:

$$(\mathrm{\Delta OEA}) + (\mathrm{BOE}) = (\mathrm{B\Gamma ZO}) + (\mathrm{\Delta OZ})$$

Αφού (ΒΟΕ) = (ΔΟΖ), τότε είναι (ΔΟΕΑ) = (ΒΓΖΟ).

36

ΘΕΜΑ 4

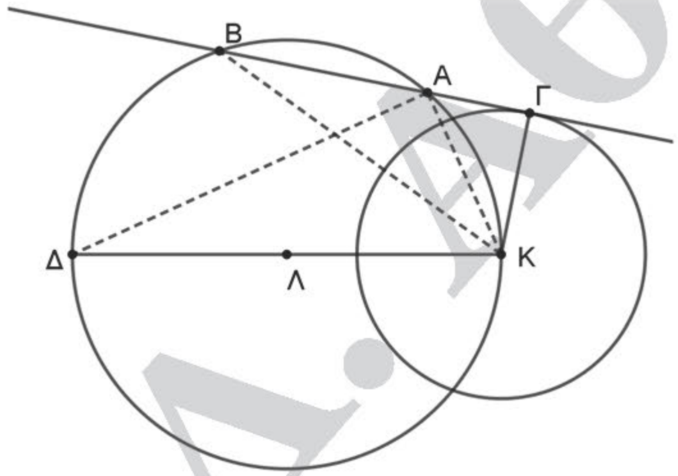
Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα R=10, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα ρ=6. Η εφαπτομένη του κύκλου (Κ,ρ) στο σημείο του Γ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στα σημεία Α και Β. Η προέκταση της ΚΛ προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια. (Μονάδες 8)

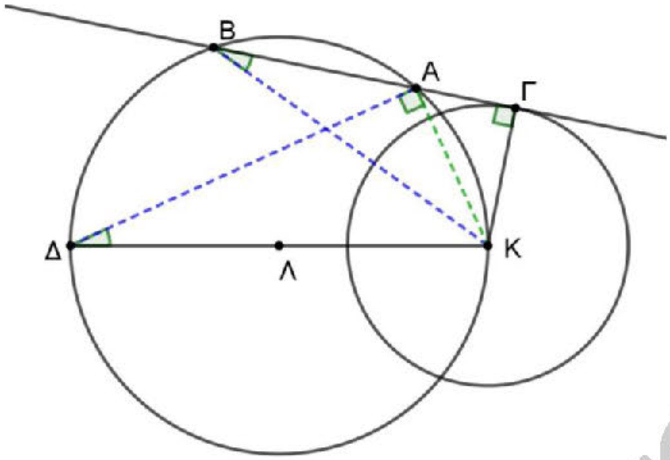
ii. ΚΑ·ΚΒ=120 (Μονάδες 9)

β) Αν είναι ΚΒ=15, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΚ. (Μονάδες 8)



36 α

ΛΥΣΗ



α)

i. Οι γωνίες $K\hat{B}\Gamma$ και $K\hat{\Delta}A$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου (Λ,R) που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΚΑ, άρα είναι ίσες. Η ευθεία ΓΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Κ,ρ) στο σημείο του Γ, επομένως η γωνία $K\hat{\Gamma}B$ είναι ορθή. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ,R) και η γωνία $K\hat{A}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθή. Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ έχουν $K\hat{\Gamma}B= K\hat{A}\Delta$ (ορθές) και $K\hat{B}\Gamma= K\hat{\Delta}A$, επομένως έχοντας δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.

ii. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ,R), άρα $K\Delta=2\cdot R=20$ και η ΚΓ είναι ακτίνα του κύκλου (Κ,ρ), άρα $K\Gamma=\rho=6$. Εφόσον τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια, έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή $\frac{K\Gamma}{KA}=\frac{KB}{K\Delta}=\frac{\Gamma B}{\Delta A}$. Από την ισότητα $\frac{K\Gamma}{KA}=\frac{KB}{K\Delta}$ έχουμε ότι $\frac{6}{KA}=\frac{KB}{20}$ ή $KA\cdot KB=120$.

β) Αφού είναι ΚΒ=15 και $KA\cdot KB=120$ τότε $15\cdot KA=120$, άρα ΚΑ=8. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΑΓ έχουμε $K\Gamma^2+\Gamma A^2=KA^2$ ή $36+ \Gamma A^2=64$ ή $\Gamma A^2=28$ ή $\Gamma A=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$.Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΚ είναι $(A\Gamma K)=\frac{K\Gamma\cdot AK}{2}=\frac{6\cdot 2\sqrt{7}}{2}=6\sqrt{7}$.

37

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=8 , ΑΓ=12 και γωνία $\widehat{A} = 60^o$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ)=$24\sqrt{3}$.

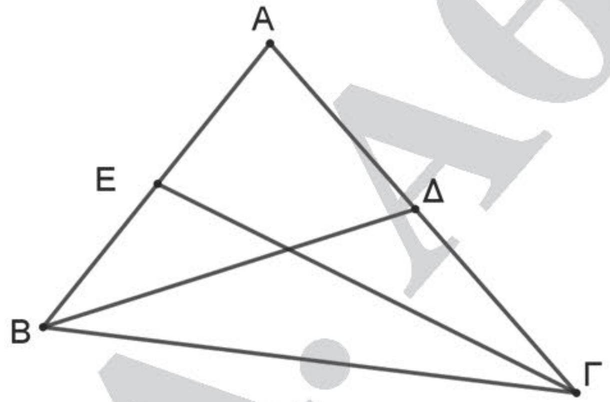
(Μονάδες 13)

β) Αν ΒΔ και ΓΕ διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΕΓ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 4)

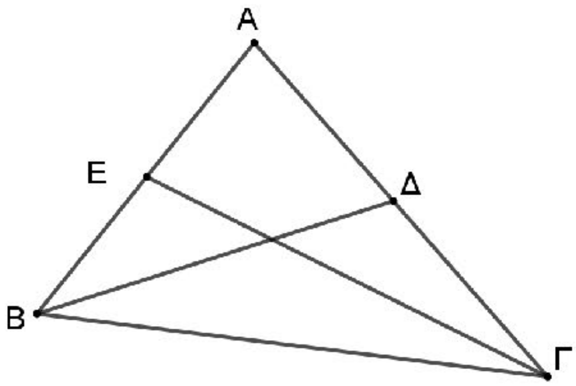
ii. Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΓΒ είναι ισοδύναμα με (ΕΒΓ)=(ΔΓΒ)=$12\sqrt{3}$

(Μονάδες 8)



37 α

ΛΥΣΗ



α) Είναι (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ ·ΑΒ·ΑΓ·ημΑ= $\frac{1}{2}$ ·8·12· $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $24\sqrt{3}$.

β)

i. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος του τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα . Αφού η ΓΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, άρα (ΒΕΓ)=(ΑΕΓ).

ii. Αφού (ΒΕΓ)=(ΑΕΓ) και (ΒΕΓ)+(ΑΕΓ)=(ΑΒΓ), άρα (ΒΕΓ) = $\frac{1}{2}$·(ΑΒΓ)= $\frac{1}{2}$ ·$24\sqrt{3}$=$12\sqrt{3}$. Ομοίως αφού η ΒΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ είναι (ΔΒΓ)= $\frac{1}{2}$ ·(ΑΒΓ) = $12\sqrt{3}$, οπότε (ΔΒΓ)=(ΕΒΓ)= $12\sqrt{3}$.

38

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 2, ΑΓ = 3 και $\widehat{A} = 60^o$. Να υπολογίσετε:

α) το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 9)

β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) το ύψος $υ_α$. (Μονάδες 8)

38 α

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\mathrm{Β\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma} \cdot \text{συν}A = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 7\,,$$

επομένως $\mathrm{B\Gamma} = \sqrt{7}$.

β) Έχουμε $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma} \cdot \text{ημ}A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

γ) Έχουμε $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \upsilon_\alpha$, άρα $\upsilon_\alpha = \frac{2(\mathrm{AB\Gamma})}{\alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$.

39

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = 8$, $ΒΓ = 7$ και $\widehat{Α} = 60°$.

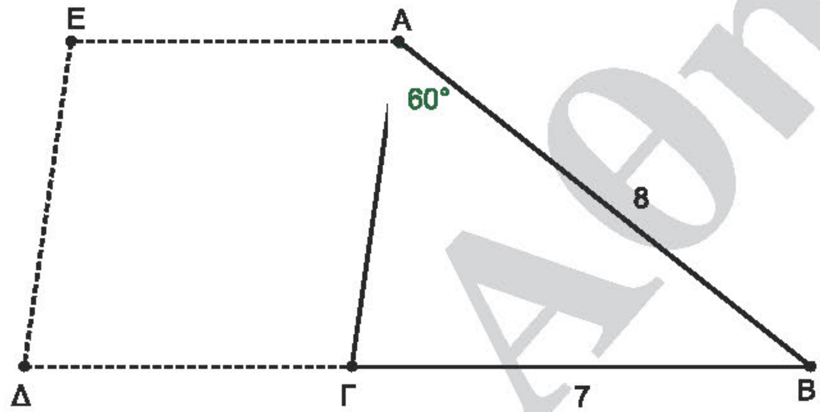
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 3$ ή $ΑΓ = 5$. (Μονάδες 6)

β) Έστω ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι οξυγώνιο όπως στο παρακάτω σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 5$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(ΑΒΓ) = 10\sqrt{3}$. (Μονάδες 6)

iii. Προεκτείνουμε τη $ΒΓ$ κατά τμήμα $ΓΔ = ΑΓ$ και σχηματίζουμε τον ρόμβο $ΑΓΔΕ$. Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου $ΑΓΔΕ$. (Μονάδες 7)



39 α

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $ΑΒ = 8$, $ΒΓ = 7$ και $\hat{Α} = 60°$, οπότε από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot συν\,Α$

$7^2 = 8^2 + ΑΓ^2 - 2 \cdot 8 \cdot ΑΓ \cdot συν\,60°$

$49 = 64 + ΑΓ^2 - 16 \cdot ΑΓ \cdot \frac{1}{2}$

$ΑΓ^2 - 8 \cdot ΑΓ + 15 = 0$

$ΑΓ = 3$ ή $ΑΓ = 5$.

β) i) Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $ΑΒ = 8$, $ΒΓ = 7$ και $ΑΓ = 3$ ή $ΑΓ = 5$, άρα η μεγαλύτερη πλευρά του είναι η $ΑΒ = 8$, οπότε $ΑΒ^2 = 8^2 = 64$.

Αν $ΑΓ = 3$ θα είναι $ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$, οπότε

$ΑΒ^2 > ΑΓ^2 + ΒΓ^2$, άρα $\hat{Γ} > 90°$, άρα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο, άτοπο.

Αν $ΑΓ = 5$ θα είναι $ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$, οπότε

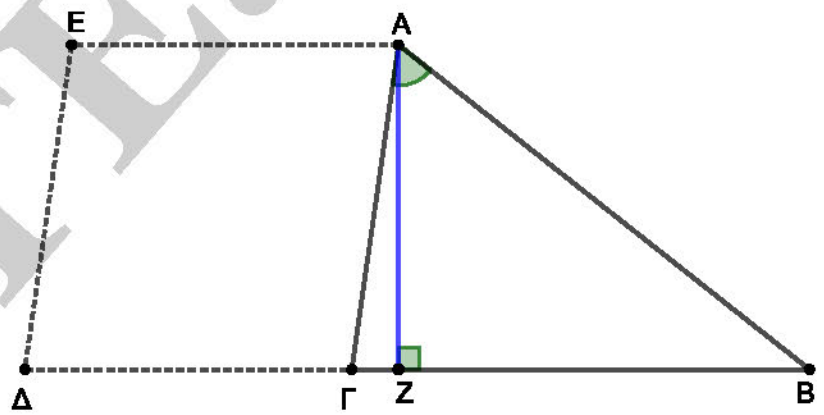
$ΑΒ^2 < ΑΓ^2 + ΒΓ^2$, άρα $\hat{Γ} < 90°$, άρα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι οξυγώνιο.

Επομένως $ΑΓ = 5$.

ii) Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $ΑΒ = 8$, $ΑΓ = 5$ και $\hat{Α} = 60°$, οπότε από τον τριγωνομετρικό τύπο του εμβαδού έχουμε

$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot ΑΓ \cdot ΑΒ \cdot ημ\,Α = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot ημ\,60° = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

iii) Έστω $ΑΖ$ το ύψος του τριγώνου $ΑΒΓ$ από την κορυφή $Α$. Τότε αυτό θα είναι ύψος και του ρόμβου $ΑΓΔΕ$ με αντίστοιχη βάση την $ΓΔ$. Είναι $ΓΔ = ΑΓ = 5$ επειδή το $ΑΓΔΕ$ είναι ρόμβος.



Από το (β ii) είναι $(ΑΒΓ) = 10\sqrt{3}$. Επειδή $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot ΒΓ \cdot ΑΖ$ και $ΒΓ = 7$, θα έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{AZ} = 10\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \mathrm{AZ} = 10\sqrt{3}$$

$$\mathrm{AZ} = \frac{20\sqrt{3}}{7} \ .$$

Επομένως το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ είναι

$$(\mathrm{A\Gamma\Delta E}) = \Gamma\Delta \cdot \mathrm{AZ} = 5 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{7} = \frac{100\sqrt{3}}{7}.$$

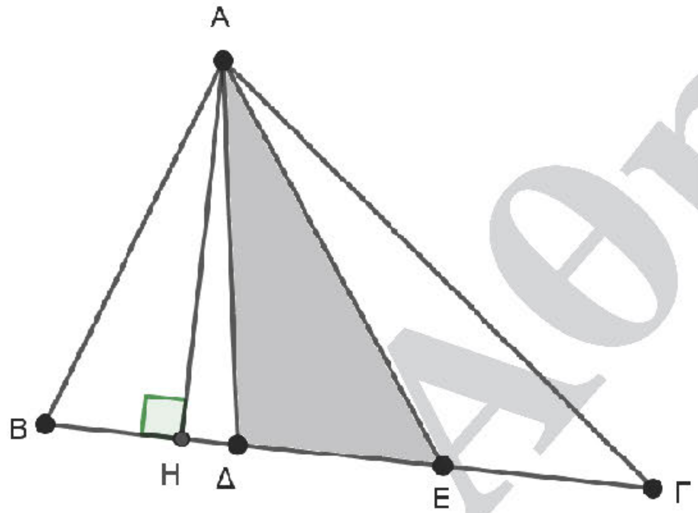
40

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην πλευρά του ΒΓ, τα σημεία Δ,Ε ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Από την κορυφή Α, φέρνουμε το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι (ΑΔΕ) = $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓ). (Μονάδες 13)

β) Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι (ΑΜΕ) = $\frac{1}{6}$ (ΑΒΓ). (Μονάδες 12)



40 α

ΛΥΣΗ

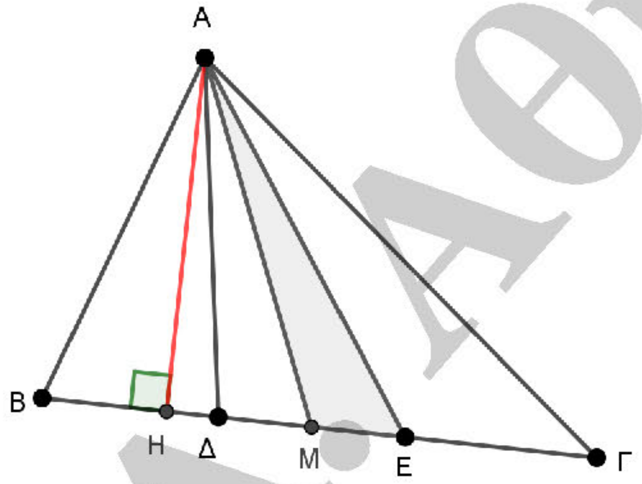
Από τα δεδομένα έχουμε: ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ = $\frac{1}{3}$ ΒΓ (1).

α) Το ΑΗ είναι ύψος στα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ, οπότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων θα ισούται με το λόγο των αντιστοίχων βάσεων. Δηλαδή:

$\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\mathrm{\Delta E}}{\mathrm{B\Gamma}}$, η οποία λόγω της (1) γράφεται: $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\frac{1}{3}\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{1}{3}$,

οπότε: (ΑΔΕ) = $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓ).

β)



Στο τρίγωνο ΑΔΕ, η ΑΜ είναι διάμεσος. Επομένως το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Τα ΑΜΕ και ΑΜΔ. Οπότε (ΑΜΕ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΔΕ), η οποία λόγω του ερωτήματος (α) δίνει: (ΑΜΕ) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ (ΑΒΓ) = $\frac{1}{6}$ (ΑΒΓ).

41

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

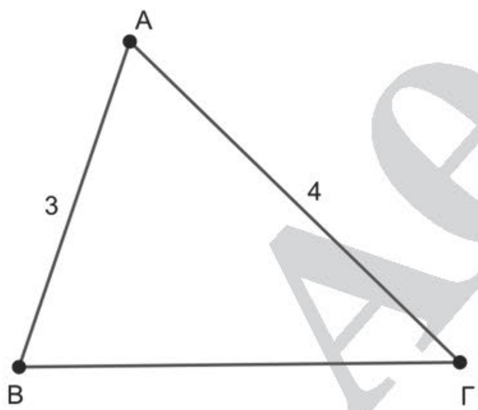
α) Αν η γωνία Α έχει μέτρο 60^o, τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 08)

ii. Το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 09)

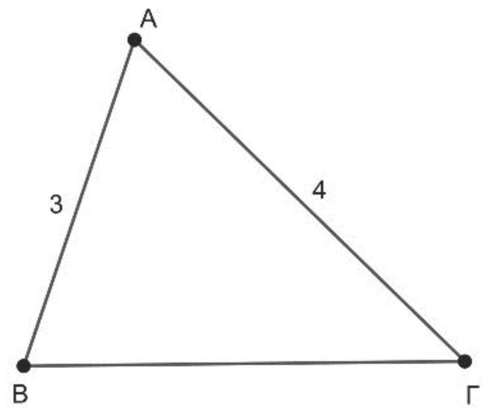
β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να γίνεται μέγιστο; Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)



41 α

ΛΥΣΗ



α)

i. Για την εύρεση του εμβαδού του τριγώνου χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 \cdot \eta\mu 60^{o} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

ii. Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^{o} = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 13.$$

Άρα, ΒΓ = $\sqrt{13}$.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 \cdot \eta\mu A = 6 \cdot \eta\mu A.$$

Για την γωνία Α του τριγώνου ισχύει ότι $0^o < A < 180^o$, άρα $0 < \eta\mu A \leq 1$. Η μέγιστη τιμή του ημΑ είναι 1, όταν η γωνία Α είναι 90^o. Επομένως, το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν η γωνία Α είναι ορθή και η μέγιστη τιμή του είναι Ε = 6·1 = 6 τ.μ.

42

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές β = 8 και γ = 6.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\mathrm{E} = 24$ (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε:

i. Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς α του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)

ii. Το ύψος του $υ_α$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα α του τριγώνου. (Μονάδες 7)

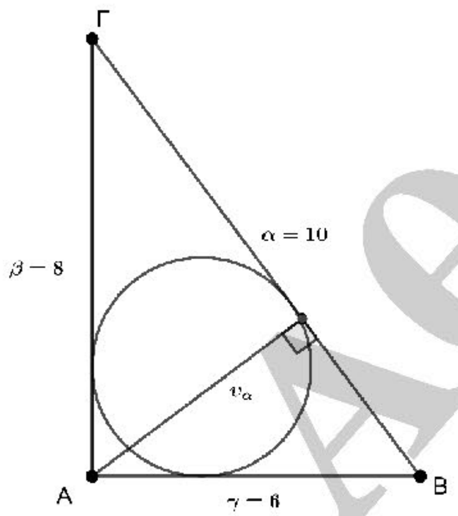
iii. Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. (Μονάδες 7)

42 α

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ υπολογίζεται από τον τύπο $E=\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma$ όπου β και γ οι κάθετες πλευρές του, επομένως αντικαθιστώντας τα μήκη των πλευρών β και γ του τριγώνου έχουμε:

$$E=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12=24.$$



β)

i. Το μήκος της υποτείνουσας α του ορθογωνίου τριγώνου προσδιορίζεται με την βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος, επομένως:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2=8^2+6^2=100 \text{ άρα } \alpha=\sqrt{100}=10.$$

ii. Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\upsilon_\alpha$. Αντικαθιστώντας την τιμή του εμβαδού Ε = 24 από το πρώτο ερώτημα και το μήκος της πλευράς α = 10 στον παραπάνω τύπο προκύπτει:

$$24=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\upsilon_\alpha \text{ ή } \upsilon_\alpha=\frac{24}{5}.$$

iii. Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου, τότε το εμβαδό του Ε είναι $E=\tau\cdot\rho$. Η ημιπερίμετρος τ του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{10+8+6}{2}=\frac{24}{2}=12.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές του εμβαδού $E = 24$ και της ημιπεριμέτρου $\tau = 12$ στον τύπο $E = \tau \cdot \rho$ έχουμε:

$$24 = 12 \cdot \rho \text{ ή } \rho = 2 .$$

43

ΘΕΜΑ 3

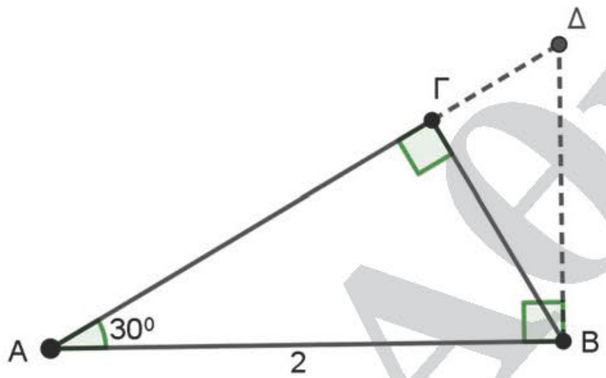
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\widehat{\Gamma} = 90^0$, $\widehat{A} = 30^0$ και ΑΒ = 2.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = \sqrt{3}$. (Μονάδες 7)

β) Φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ, στο σημείο Β, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Δ.

Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 10)

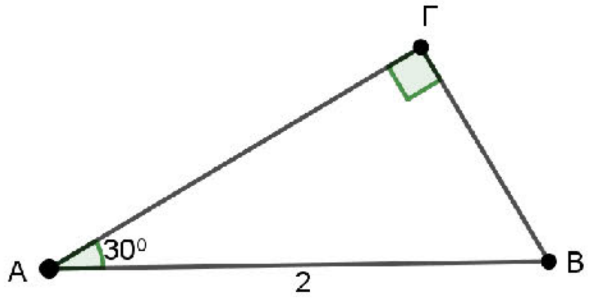
γ) Αν Κ είναι το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι $(ΚΑΒ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 8)



43 α

ΛΥΣΗ

α)

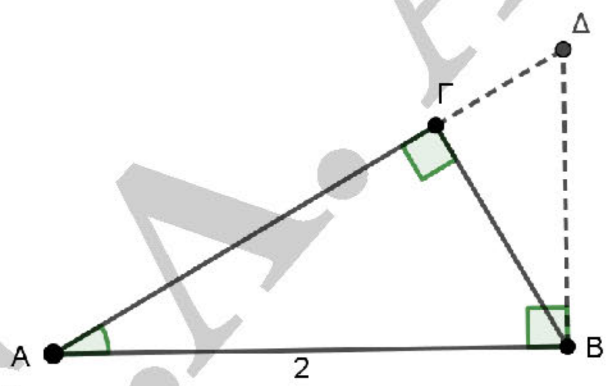


Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ = 2, $\widehat{\Gamma} = 90^0$ και $\widehat{A} = 30^0$ οπότε η ΒΓ = $\frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι:

$Α\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = 2^2 - 1^2$ ή $A\Gamma^2 = 3$, οπότε $A\Gamma = \sqrt{3}$.

β)



Από τα δεδομένα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι ορθογώνια.

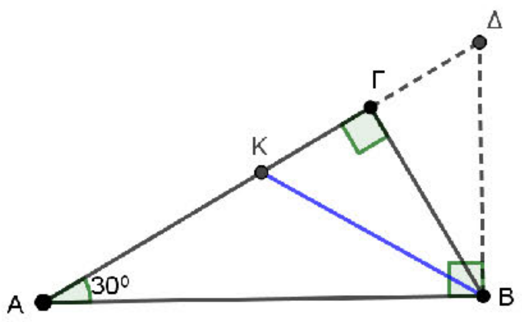
Επίσης, έχουν τη γωνία Α κοινή, οπότε θα είναι όμοια. Επομένως θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Άρα $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

Όμως η ΑΒ = 2 και λόγω του ερωτήματος (α) η $A\Gamma = \sqrt{3}$ οπότε έχουμε:

$\frac{A\Delta}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ή $A\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

γ) Το Κ είναι μέσο του ΑΔ επομένως η $AK = \frac{A\Delta}{2}$.

Η τελευταία ισότητα λόγω του ερωτήματος (β, i) δίνει: $AK = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



Έτσι (ΚΑΒ) $= \frac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΑΚ \cdot ημ30^0 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

44

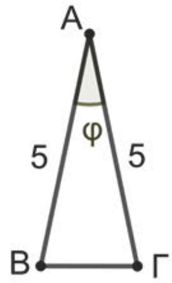
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma = 5$ και η γωνία της κορυφής $\hat{\varphi}$ έχει $\eta\mu\varphi = \frac{2}{5}$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε το ύψος ΒΗ του τριγώνου ΑΒΓ και να υπολογίσετε το μήκος του.

(Μονάδες 13)

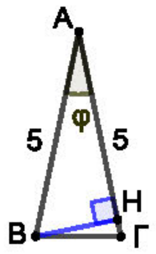


44 α

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\cdot \text{ΑΒ}\cdot \text{ΑΓ}\cdot \eta\mu\varphi=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \frac{2}{5}=5$.

β) Σχεδιάζουμε το ύψος ΒΗ του ΑΒΓ από την κορυφή Β, κάθετα στην πλευρά ΑΓ.



Για το εμβαδόν του ΑΒΓ ισχύει ότι $(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\cdot \text{ΑΓ}\cdot \text{ΒΗ}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot \text{ΒΗ}=\frac{5}{2}\cdot \text{ΒΗ}$.

Από τη λύση του ερωτήματος α) έχουμε ότι $(\text{ΑΒΓ})=5$.

Άρα $\frac{5}{2}\cdot \text{ΒΗ}=5$ ή $\text{ΒΗ}=\frac{2}{5}\cdot 5$ ή $\text{ΒΗ}=2$.