Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

45

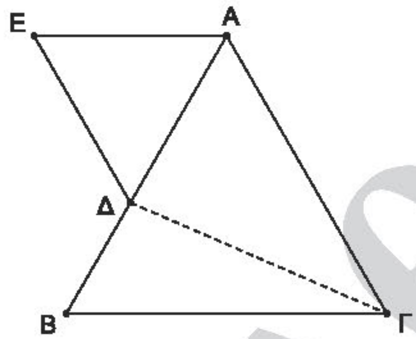
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.

α) Να αποδείξετε ότι $(\text{ΑΓΔ}) = 15\sqrt{3}$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ. (Μονάδες 13)

Δίνεται ότι ημ$60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



45 α

ΛΥΣΗ

α) Για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου ΑΓΔ χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$(\text{ΑΓΔ}) = \frac{1}{2}\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ημ}\widehat{\text{Α}}.$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\text{ΑΔ} = 6$, $\text{ΑΓ} = 10$. Επιπλέον, είναι $\widehat{\text{Α}} = 60^o$, γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. Άρα

$$(\text{ΑΓΔ}) = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot \text{ημ}60^o = 30\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$$

β) Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α ισούται με $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, άρα το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΕ που έχει πλευρά 6 είναι $(\text{ΑΔΕ}) = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ είναι

$$(\text{ΑΓΔΕ}) = (\text{ΑΓΔ}) + (\text{ΑΔΕ}) = 15\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 24\sqrt{3}.$$

46

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = 6$, $ΒΓ = 4$ και $\hat{Β} = 60^o$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 2\sqrt{7}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

Δίνεται ότι $ημ60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $συν60^o = \frac{1}{2}$.

46 α

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΒΓ \cdot συν\hat{Β}.$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $ΑΒ = 6$, $ΒΓ = 4$ και $\hat{Β} = 60^o$, άρα

$ΑΓ^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4συν60^o$ ή $ΑΓ^2 = 36 + 16 - 48 \cdot \frac{1}{2}$ ή $ΑΓ^2 = 28$ ή $ΑΓ = 2\sqrt{7}$.

β) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ είναι η ΑΒ, αφού $ΑΒ = 6 = 2 \cdot 3 > 2\sqrt{7} = ΑΓ$, άρα η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου είναι η $\hat{Γ}$, γιατί βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά. Όμως $ΑΒ^2 = 6^2 = 36$ και $ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = (2\sqrt{7})^2 + 4^2 = 28 + 16 = 44$, άρα $ΑΒ^2 < ΑΓ^2 + ΒΓ^2$. Επομένως $\hat{Γ} < 90^o$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

γ) Για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΒΓ \cdot ημ\hat{Β}.$$

Όμως $ΑΒ = 6$, $ΒΓ = 4$ και $\hat{Β} = 60^o$, άρα $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot ημ60^o = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

47

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=5 και $\widehat{A} = 120^0$. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ = $5\sqrt{3}$. (Μονάδες 13)

β) (ΑΒΓ) = $\frac{25\sqrt{3}}{4}$. (Μονάδες 12)

47 α

ΛΥΣΗ

Έχουμε: ΑΒ = ΑΓ = 5 και $\widehat{A}$ = 120^0.

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, από το νόμο των συνημιτόνων είναι:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2\cdot AB\cdot A\Gamma\cdot \text{συν}A = 5^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 5\cdot \text{συν}120^0 = 25 + 25 - 50\cdot(-\frac{1}{2}) = 75$,

οπότε $B\Gamma = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

β) Επίσης $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot A\Gamma\cdot \text{ημ}A = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \text{ημ}120^0 = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

48

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90°$ και $B\Gamma = 16$, $\Gamma\Delta = 22$ και $A\Delta = 20$. Έστω Κ η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ΓΔ και Λ η προβολή του σημείου Β πάνω στη ευθεία ΑΔ.

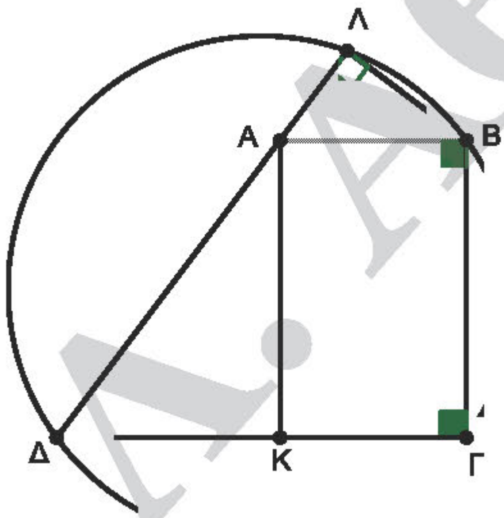
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $K\Delta = 12$, (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΔ είναι 96 . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΛΑ . (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΒΓΔΛ . (Μονάδες 5)



48 α

ΛΥΣΗ

α) i) Το τετράπλευρο $ΑΒΓΚ$ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, άρα

$ΑΚ = ΒΓ = 16.$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΚΔ$ $\left(Α\widehat{Κ}Δ = 90^\circ\right)$, έχουμε

$ΚΔ^2 = ΑΔ^2 - ΑΚ^2$

$ΚΔ^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 = 12^2$

$ΚΔ = 12.$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΚΔ$ είναι

$(ΑΚΔ) = \frac{1}{2} ΚΔ \cdot ΑΚ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96.$

β) Τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΒΛΑ$ είναι ορθογώνια $\left(Α\widehat{Κ}Δ = Β\widehat{Λ}Α = 90^\circ\right)$ και έχουν

$\widehat{Δ} = Λ\widehat{Α}Β$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων $ΑΒ$ και $ΔΓ$ που τέμνονται από την $ΛΔ$. Άρα τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΒΛΑ$ είναι όμοια.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $ΑΚΔ$ και $ΒΛΑ$ είναι

$λ = \frac{ΑΔ}{ΒΑ}$ ή $λ = \frac{20}{10}$ ή $λ = 2$,

αφού $ΒΑ = ΚΓ$ από το ορθογώνιο $ΑΒΓΚ$ και $ΚΓ = ΓΔ - ΚΔ = 22 - 12 = 10.$

Επειδή τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΒΛΑ$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $λ = 2$, ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $ΑΚΔ$ και $ΒΛΑ$ ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, άρα

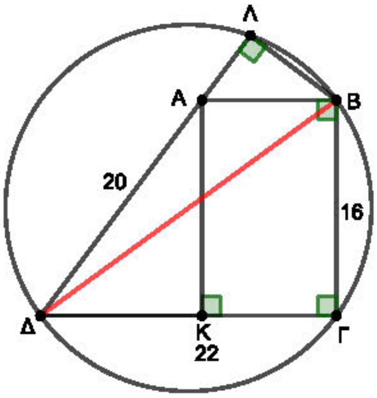
$\frac{(ΑΚΔ)}{(ΒΛΑ)} = λ^2$

$\frac{96}{(ΒΛΑ)} = 2^2$

$(ΒΛΑ) = \frac{96}{4}$

$(ΒΛΑ) = 24.$

γ) Φέρνουμε τη $ΒΔ$, η οποία είναι διάμετρος του παραπάνω κύκλου, αφού $Β\widehat{Γ}Δ = 90^\circ$.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma\Delta}$ $\left(\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ\right)$, έχουμε

$\mathrm{B\Delta}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 + \Gamma\Delta^2$

$\mathrm{B\Delta}^2 = 16^2 + 22^2 = 256 + 484 = 740 = 4 \cdot 185$

$\mathrm{B\Delta} = 2\sqrt{185}$.

Επομένως η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $\mathrm{B\Gamma\Delta\Lambda}$ έχει μήκος $2\sqrt{185}$.

49

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $ΑΒΓ$ και η $ΑΚ$ είναι η προβολή της πλευράς $ΑΓ$ πάνω στην ευθεία $ΑΒ$. Δίνονται $ΑΒ = 10, ΑΓ = 15$ και $ΑΚ = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

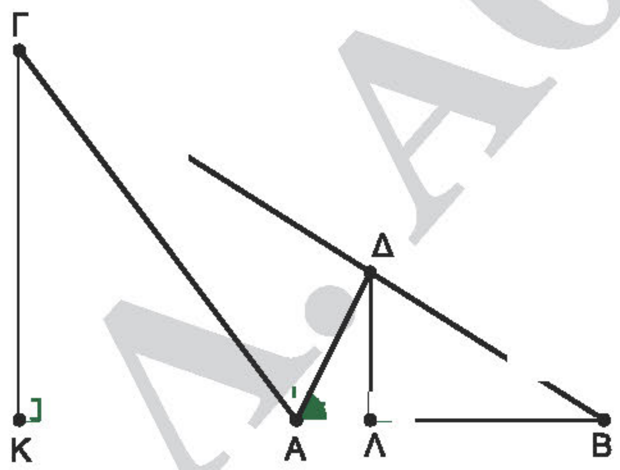
i. $ΓΚ = 12$ και $(ΑΒΓ) = 60$. (Μονάδες 8)

ii. $(ΑΔΒ) = 24$ και $(ΑΔΓ) = 36$. (Μονάδες 10)

β) Έστω $Λ$ η προβολή του σημείου $Δ$ πάνω στην ευθεία $ΑΒ$.

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΛ}{ΓΚ} = \frac{2}{5}$. (Μονάδες 3)

ii. Να βρείτε τον λόγο $\frac{ΛΒ}{ΛΚ}$ στον οποίο το σημείο $Λ$ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΚ$. (Μονάδες 4)



49 α

ΛΥΣΗ

α)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ ($\widehat{K} = 90^\circ$), είναι $ΑΓ = 15$ και $ΑΚ = 9$,

οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$ΓΚ^2 = ΑΓ^2 - ΑΚ^2$ ή $ΓΚ^2 = 15^2 - 9^2$ ή $ΓΚ^2 = 144$ ή $ΓΚ^2 = 12^2$ ή $ΓΚ = 12$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΓΚ$ ή $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12$ ή $(ΑΒΓ) = 60$.

ii. Στα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ, οι γωνίες $Δ\widehat{Α}Β$ και $Δ\widehat{Α}Γ$ είναι ίσες, αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$\frac{(ΑΔΒ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΒ}{ΑΔ \cdot ΑΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, άρα $(ΑΔΒ) = \frac{2}{3}(ΑΔΓ)$.

Στο ερώτημα α) i) βρήκαμε ότι $(ΑΒΓ) = 60$ και επειδή $(ΑΔΒ) + (ΑΔΓ) = (ΑΒΓ)$,

έχουμε $\frac{2}{3}(ΑΔΓ) + (ΑΔΓ) = 60$ ή $5(ΑΔΓ) = 180$ ή $(ΑΔΓ) = 36$.

Επίσης θα είναι $(ΑΔΒ) = \frac{2}{3}(ΑΔΓ)$ $\quad (ΑΔΒ) = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24$.

β)

i. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση την ΑΒ και αντίστοιχα ύψη ΔΛ και ΓΚ, άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών.

Στο (α) ερώτημα βρήκαμε $(ΑΒΓ) = 60$ και $(ΑΔΒ) = 24$, επομένως έχουμε

$\frac{(ΑΔΒ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΔΛ}{ΓΚ}$ ή $\frac{24}{60} = \frac{ΔΛ}{ΓΚ}$ ή $\frac{ΔΛ}{ΓΚ} = \frac{2}{5}$.

ii. Οι ευθείες ΔΛ και ΓΚ είναι παράλληλες, ως κάθετες στην ευθεία ΑΒ. Επομένως τα τρίγωνα ΔΛΒ και ΓΚΒ έχουν πλευρές ανάλογες, άρα έχουμε

$\frac{ΛΒ}{ΚΒ} = \frac{ΔΛ}{ΓΚ}$ ή $\frac{ΛΒ}{ΚΒ} = \frac{2}{5}$ ή $\frac{ΛΒ}{ΚΒ - ΛΒ} = \frac{2}{5-2}$ ή $\frac{ΛΒ}{ΛΚ} = \frac{2}{3}$.

50

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και επίσης είναι $ΒΓ = 2ΑΒ$.

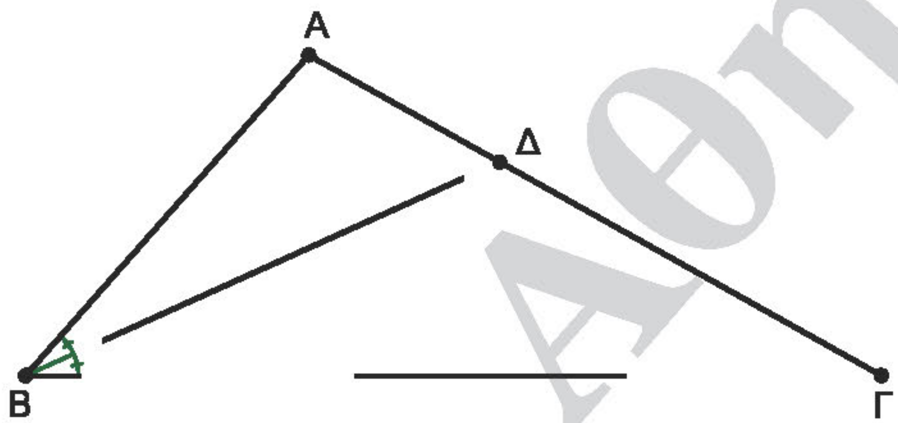
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΔ. (Μονάδες 6)

β) Να χωρίσετε το τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $ΑΒ = 12$ και $ημ\, Β = \frac{3}{4}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 108. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΒΔ. (Μονάδες 6)



50 α

ΛΥΣΗ

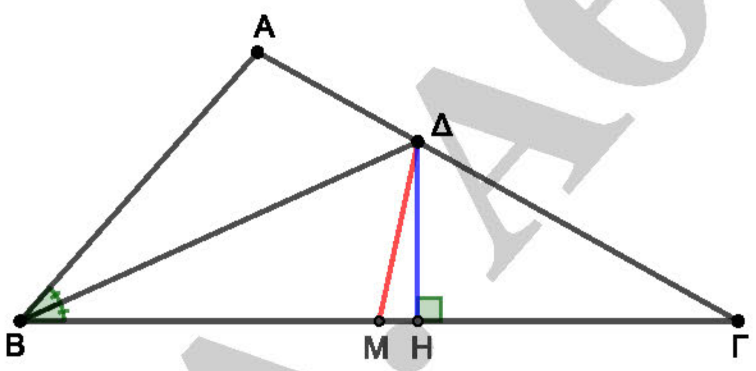
α) Στα τρίγωνα ΔΒΓ και ΑΒΔ, οι γωνίες $\Delta\widehat{B}\Gamma$ και $A\widehat{B}\Delta$ είναι ίσες, αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$\frac{(\Delta B\Gamma)}{(AB\Delta)} = \frac{B\Delta \cdot B\Gamma}{B\Delta \cdot BA} = \frac{B\Gamma}{BA} = \frac{2BA}{BA} = 2$, άρα $(\Delta B\Gamma) = 2(AB\Delta)$.

β) Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Τότε η διάμεσος ΔΜ του τριγώνου ΔΒΓ το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΜΓ, αφού αυτά έχουν ίσες βάσεις $MB = M\Gamma$ και κοινό ύψος το ΔΗ από την κορυφή Δ. Επομένως θα έχουμε

$(\Delta MB) = (\Delta M\Gamma) = \frac{1}{2}(\Delta B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2(AB\Delta) = (AB\Delta)$, άρα

$(AB\Delta) = (\Delta MB) = (\Delta M\Gamma)$.



γ)

i. Είναι $AB = 12$, $B\Gamma = 2AB = 2 \cdot 12 = 24$ και $\eta\mu B = \frac{3}{4}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot BA \cdot \eta\mu B$

ή $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{3}{4}$ ή $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{3}{4} = 108$ ή $(AB\Gamma) = 108$.

ii. Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι $(\Delta B\Gamma) = 2(AB\Delta)$ και στο γ) i) $(AB\Gamma) = 108$.

Όμως $(\Delta B\Gamma) + (AB\Delta) = (AB\Gamma)$, άρα $2(AB\Delta) + (AB\Delta) = (AB\Gamma)$ ή $3(AB\Delta) = 108$ ή $(AB\Delta) = 36$.

Επίσης θα είναι $(\Delta B\Gamma) = 2 \cdot 36 = 72$.

51

ΘΕΜΑ 4

Το σημείο Μ διαιρεί εσωτερικά την πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ σε λόγο $\frac{\text{MB}}{\text{MΓ}}$ και το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ σε λόγο $\frac{\text{NA}}{\text{NM}}$.

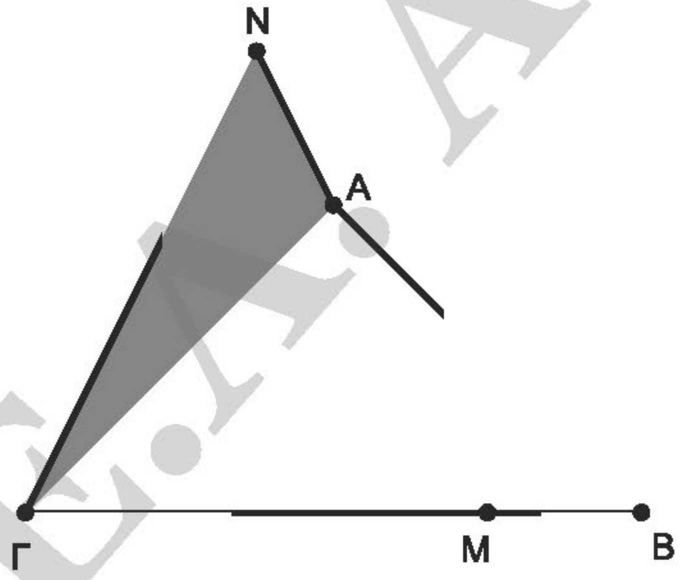
α) Έστω $\frac{\text{MB}}{\text{MΓ}} = \frac{1}{3}$ και $\frac{\text{NA}}{\text{NM}} = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{(\text{AMB})}{(\text{AMΓ})} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 7)

ii. $\frac{\text{NA}}{\text{AM}} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 6)

iii. $(\text{AMB}) = (\text{ANΓ})$. (Μονάδες 6)

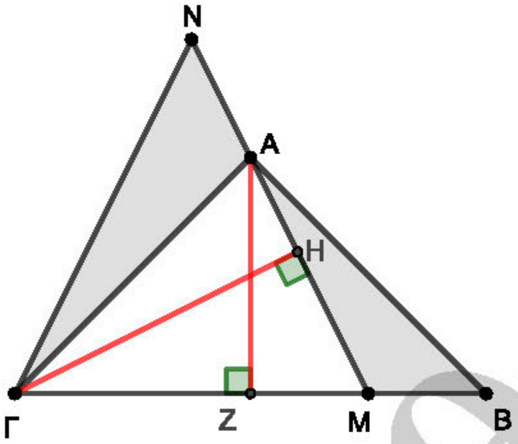
β) Έστω $\frac{\text{MB}}{\text{MΓ}} = 1$ και $(\text{AMB}) = (\text{ANΓ})$. Να βρείτε τον λόγο $\frac{\text{NA}}{\text{NM}}$ στον οποίο το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ. (Μονάδες 6)



51 α

ΛΥΣΗ

α)



i. Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Α, το ΑΖ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

Άρα $\frac{(\text{ΑΜΒ})}{(\text{ΑΜΓ})} = \frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}} = \frac{1}{3}$.

ii. Είναι $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}} = \frac{1}{4}$, άρα $\text{ΝΜ} = 4\text{ΝΑ}$ ή $\text{ΝΑ} + \text{ΑΜ} = 4\text{ΝΑ}$ ή $\text{ΑΜ} = 3\text{ΝΑ}$ ή $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{1}{3}$.

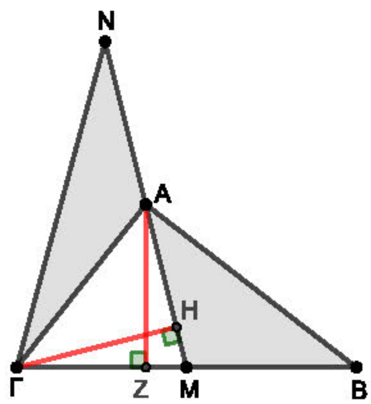
Εναλλακτικά: $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}} = \frac{1}{4}$ ή $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}-\text{ΝΑ}} = \frac{1}{4-1}$ ή $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{1}{3}$.

iii. Τα τρίγωνα ΑΝΓ και ΑΜΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Γ, το ΓΗ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

Άρα $\frac{(\text{ΑΝΓ})}{(\text{ΑΜΓ})} = \frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{1}{3}$.

Επίσης από το α) i) είναι $\frac{(\text{ΑΜΒ})}{(\text{ΑΜΓ})} = \frac{1}{3}$, οπότε $\frac{(\text{ΑΜΒ})}{(\text{ΑΜΓ})} = \frac{(\text{ΑΝΓ})}{(\text{ΑΜΓ})}$ ή $(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΑΝΓ})$.

β) Είναι $\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}} = 1$, άρα το Μ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε $(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΑΜΓ})$, αφού έχουν ίσες βάσεις $\text{ΜΒ} = \text{ΜΓ}$ και το ίδιο ύψος ΑΖ. Όμως δίνεται $(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΑΝΓ})$, άρα $(\text{ΑΜΓ}) = (\text{ΑΝΓ})$ και αφού έχουν το ίδιο ύψος ΓΗ, θα έχουν ίσες τις αντίστοιχες βάσεις $\text{ΝΑ} = \text{ΑΜ}$. Επομένως το Α είναι το μέσο του ΝΜ άρα $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}} = \frac{1}{2}$.



52

ΘΕΜΑ 4

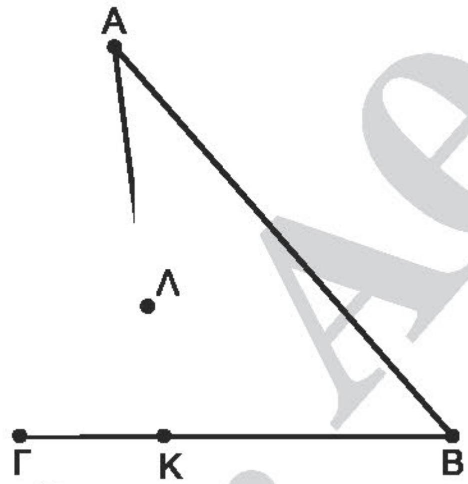
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Κ ώστε $ΚΒ = 2ΚΓ$ και στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ παίρνουμε σημείο Λ ώστε $ΛΑ = 2ΛΚ$. Έστω $Ε_1$, $Ε_2$, $Ε_3$ και $Ε_4$ τα εμβαδά των τριγώνων ΑΛΓ , ΓΛΚ , ΒΛΚ και ΑΛΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{Ε_1}{Ε_2} = 2$ και $\frac{Ε_4}{Ε_3} = 2$. (Μονάδες 10)

ii. $Ε_1 = Ε_3$. (Μονάδες 8)

β) Αν $Ε_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)



52 α

ΛΥΣΗ

α) i) Δίνεται $ΛΑ = 2ΛΚ$.

Στα τρίγωνα ΑΛΓ και ΓΛΚ, οι γωνίες $Α\widehat{Λ}Γ$ και $Γ\widehat{Λ}Κ$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{ΛΓ \cdot ΛΑ}{ΛΓ \cdot ΛΚ} = \frac{ΛΑ}{ΛΚ} = \frac{2ΛΚ}{ΛΚ} = 2 \quad ή \quad \frac{E_1}{E_2} = 2 \quad (1).$$

Στα τρίγωνα ΑΛΒ και ΒΛΚ, οι γωνίες $Α\widehat{Λ}Β$ και $Β\widehat{Λ}Κ$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_4}{E_3} = \frac{ΛΒ \cdot ΛΑ}{ΛΒ \cdot ΛΚ} = \frac{ΛΑ}{ΛΚ} = \frac{2ΛΚ}{ΛΚ} = 2 \quad ή \quad \frac{E_4}{E_3} = 2 \quad (2).$$

ii) Δίνεται $ΚΒ = 2ΚΓ$.

Στα τρίγωνα ΒΛΚ και ΓΛΚ οι γωνίες $Λ\widehat{Κ}Β$ και $Λ\widehat{Κ}Γ$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_3}{E_2} = \frac{ΚΛ \cdot ΚΒ}{ΚΛ \cdot ΚΓ} = \frac{ΚΒ}{ΚΓ} = \frac{2ΚΓ}{ΚΓ} = 2 \quad ή \quad \frac{E_3}{E_2} = 2 \quad (3).$$

Από τις (1) και (3) έχουμε

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_3}{E_2}$, οπότε $E_1 = E_3$ (4).

β) Δίνεται $E_1 = 10$.

Από την (1) έχουμε

$$\frac{E_1}{E_2} = 2 \quad ή \quad \frac{10}{E_2} = 2 \quad ή \quad E_2 = 5.$$

Από την (4) έχουμε

$$E_3 = E_1 \quad ή \quad E_3 = 10.$$

Από την (2) έχουμε

$$\frac{E_4}{E_3} = 2 \quad ή \quad \frac{E_4}{10} = 2 \quad ή \quad E_4 = 20.$$

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$(ΑΒΓ) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \quad ή \quad (ΑΒΓ) = 10 + 5 + 10 + 20 = 45.$$

53

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το εσωτερικό σημείο Κ της πλευράς ΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΚ, ώστε $AO = \frac{3}{4}AK$. Από το Ο φέρνουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

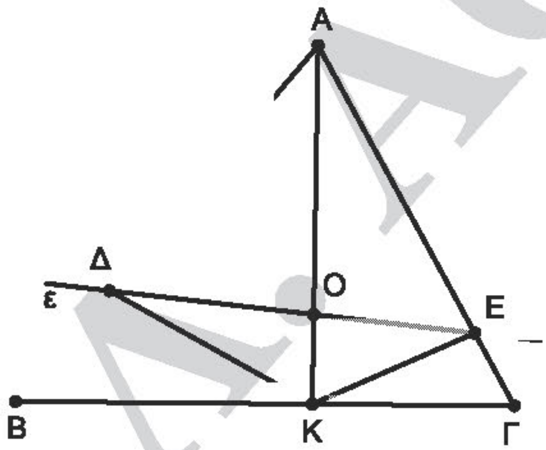
i. $(ΑΟΔ) = \frac{3}{4}(ΑΚΔ)$, (Μονάδες 7)

ii. $(ΑΟΕ) = \frac{3}{4}(ΑΚΕ)$, (Μονάδες 7)

iii. $(ΑΔΕ) = \frac{3}{4}(ΑΔΚΕ)$. (Μονάδες 7)

β) Είναι δυνατόν να ισχύει $(ΑΔΕ) = \frac{3}{4}(ΑΒΓ)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)



53 α

ΛΥΣΗ

α) i)Τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΑΚΔ έχουν την $\widehat{ΚΑΔ}$ κοινή γωνία, άρα ο λόγος των εμβαδών τους, είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή. Επομένως $\frac{(ΑΟΔ)}{(ΑΚΔ)} = \frac{ΑΟ \cdot ΑΔ}{ΑΚ \cdot ΑΔ} = \frac{ΑΟ}{ΑΚ} = \frac{3}{4}$, άρα $(ΑΟΔ) = \frac{3}{4}(ΑΚΔ)$.

ii) Τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΑΚΕ έχουν την $\widehat{ΚΑΕ}$ κοινή γωνία, άρα ο λόγος των εμβαδών τους, είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή. Επομένως $\frac{(ΑΟΕ)}{(ΑΚΕ)} = \frac{ΑΟ \cdot ΑΕ}{ΑΚ \cdot ΑΕ} = \frac{ΑΟ}{ΑΚ} = \frac{3}{4}$, άρα $(ΑΟΕ) = \frac{3}{4}(ΑΚΕ)$.

iii) Από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι $(ΑΟΔ) = \frac{3}{4}(ΑΚΔ)$ και $(ΑΟΕ) = \frac{3}{4}(ΑΚΕ)$,

επομένως θα έχουμε

$(ΑΔΕ) = (ΑΟΔ) + (ΑΟΕ)$

$= \frac{3}{4}(ΑΚΔ) + \frac{3}{4}(ΑΚΕ)$

$= \frac{3}{4}[(ΑΚΔ) + (ΑΚΕ)]$

$= \frac{3}{4}(ΑΔΚΕ)$.

β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΕ περιέχεται στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ, άρα το εμβαδόν του ΑΔΚΕ είναι μικρότερο του εμβαδού του ΑΒΓ.

Άρα

$(ΑΔΚΕ) < (ΑΒΓ)$

$\frac{3}{4}(ΑΔΚΕ) < \frac{3}{4}(ΑΒΓ)$

$(ΑΔΕ) < \frac{3}{4}(ΑΒΓ)$, από (α.iii)

Επομένως δεν ισχύει $(ΑΔΕ) = \frac{3}{4}(ΑΒΓ)$.

54

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

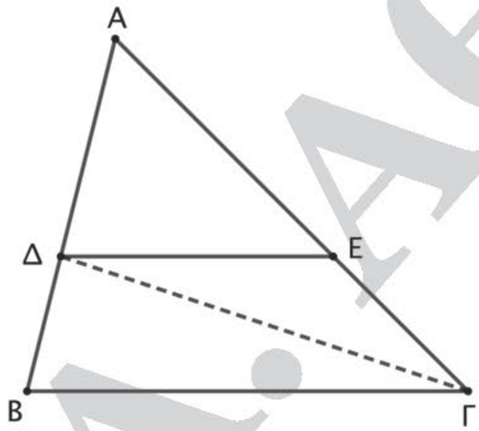
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ.

(Μονάδες 10)

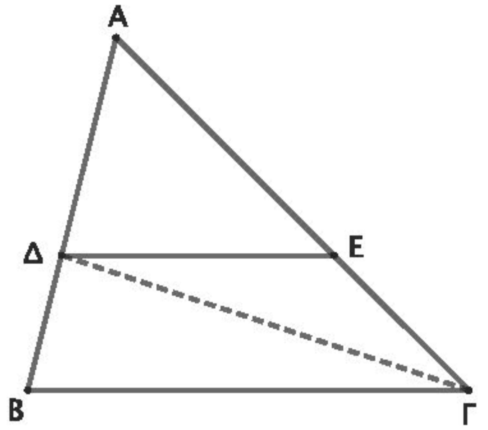
γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2}{9}$.

(Μονάδες 05)



54 α

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν $\hat{B} = A\hat{\Delta}E$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ) και κοινή τη γωνία $\hat{A}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{A}$	$A\hat{E}\Delta = \hat{\Gamma}$	$A\hat{\Delta}E = \hat{B}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΕ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΒ	ΑΓ

Δίνεται ότι το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ. Επομένως, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι:

$$\lambda = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Delta}{2A\Delta} = \frac{1}{2}$$

Αφού τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

γ) Ζητάμε τη θέση του σημείου Δ ώστε να είναι

$$\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$$

Είναι:

$$(\Delta E\Gamma) = (\Delta A\Gamma) - (A\Delta E) \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{A\Delta}{AB}$$

Οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{(\Delta A\Gamma) - (A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{(\Delta A\Gamma)}{(AB\Gamma)} - \frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$$

Από (β) ερώτημα είναι $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2$, οπότε:

$$\frac{\lambda AB \cdot A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} - \lambda^2 = \frac{2}{9}$$

$$\lambda - \lambda^2 = \frac{2}{9}$$

$$9\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι:

$$\lambda = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

Άρα, το σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά ΑΒ σε λόγο λ τέτοιο ώστε:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{3}$$

55

ΘΕΜΑ 4

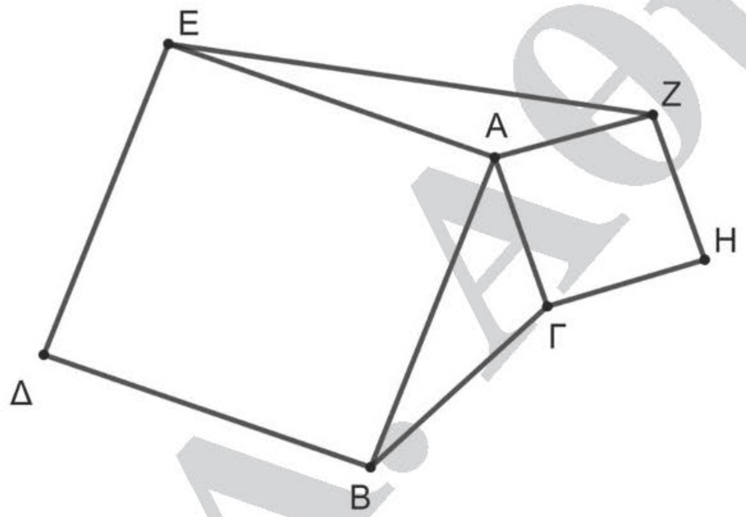
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6 cm και ΑΓ = 3 cm και $\widehat{A}$ οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΗΖ και φέρνουμε την ΕΖ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ΕΖΗΓΒΔ είναι (ΕΖΗΓΒΔ)=54cm^2 :

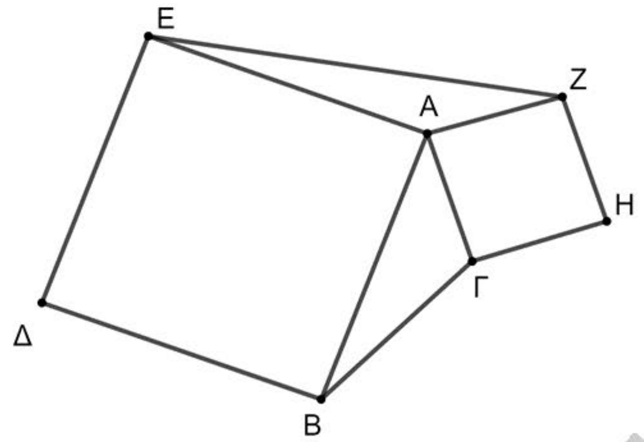
i. Να αποδείξετε ότι η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\widehat{A}$ =30^o. (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)



55 α

ΛΥΣΗ



α) Είναι $\widehat{ΒΑΓ}+\widehat{ΕΑΖ}=360^o-90^o-90^o=180^o$ και άρα οι γωνίες ΒΑΓ και ΕΑΖ είναι παραπληρωματικές. Γνωρίζουμε όμως ότι αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΕΑΖ)}=\frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{ΑΕ\cdot ΑΖ}=1$ οπότε (ΑΒΓ)=(ΕΑΖ).

β)

i. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι (ΑΒΓ)=(ΕΑΖ) και από υπόθεση είναι (ΕΖΗΓΒΔ)=54. Είναι (ΑΒΓ)+(ΑΒΔΕ)+(ΑΕΖ)+(ΑΓΗΖ)=(ΕΖΗΓΒΔ) ή (ΑΒΓ)+36+(ΑΒΓ)+9=54 ή $2\cdot$(ΑΒΓ)=9 ή (ΑΒΓ)=$\frac{9}{2}$ ή $\frac{1}{2}\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ημ\hat{Α}=\frac{9}{2}$ ή $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\cdot ημ\hat{Α}=\frac{9}{2}$ ή $ημ\hat{Α}=\frac{1}{2}$ και εφόσον η γωνία $\hat{Α}$ είναι οξεία , έχουμε ότι $\hat{Α}=30^o$.

ii. Από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2-2\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot συν30^o=6^2+3^2-2\cdot 6\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=45-18\sqrt{3}$$

Άρα το εμβαδόν του ζητούμενου τετραγώνου είναι $Ε=ΒΓ^2=45-18\sqrt{3}$.

56

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $ΑΔ = 2ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{2}ΑΓ$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

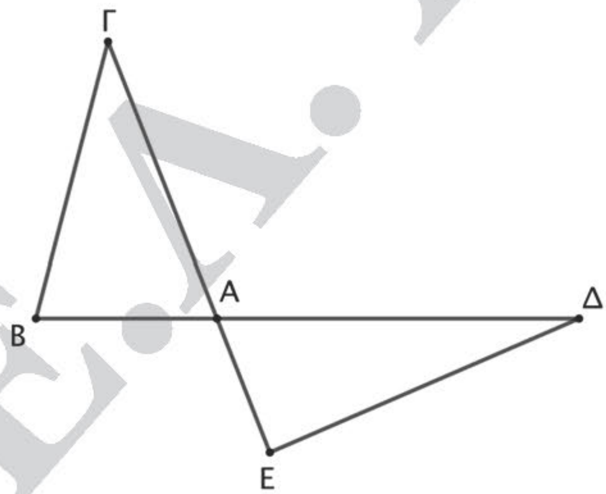
(Μονάδες 09)

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα είναι $ΑΔ = μ \cdot ΑΒ$ και $ΑΕ = ν \cdot ΑΓ$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και ν ώστε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ να είναι ισοδύναμα;

(Μονάδες 10)

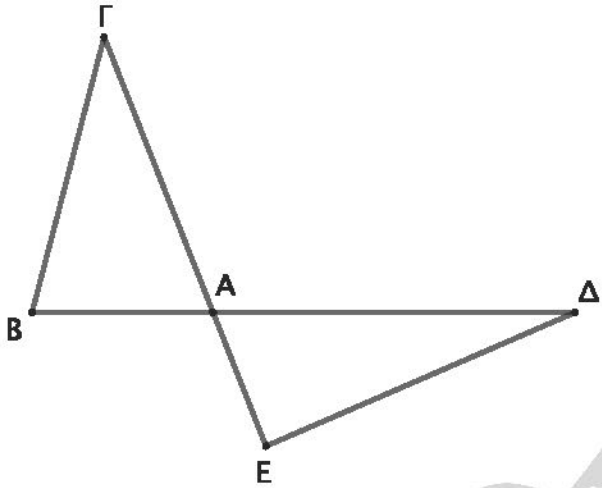
γ) Αν είναι $ΑΓ = \frac{3}{2}ΑΒ$ και $ΑΔ = 2ΑΒ$, να βρείτε τις δυνατές θέσεις του Ε ώστε τα ΑΒΓ και ΑΔΕ να είναι όμοια.

(Μονάδες 06)



56 α

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\Delta\hat{A}E = B\hat{A}\Gamma$ (ως κατακορυφήν), οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές, δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{2AB \cdot \frac{1}{2}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Επομένως, $(A\Delta E) = (AB\Gamma)$, δηλαδή τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα είναι $A\Delta = \mu \cdot AB$ και $AE = \nu \cdot A\Gamma$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε θα έχουμε:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\mu \cdot AB \cdot \nu \cdot A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \mu \cdot \nu$$

Αφού τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα, θα πρέπει $\mu \cdot \nu = 1$. Επομένως, οι αριθμοί μ και ν είναι αντίστροφοι.

γ) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\Delta\hat{A}E = B\hat{A}\Gamma$ (ως κατακορυφήν), οπότε θα είναι όμοια αν και μόνο αν έχουν τις προσκείμενες πλευρές σε αυτές τις γωνίες ανάλογες. Επομένως, θα πρέπει:

$$\frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{AB}{AE} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{A\Delta}{AE} \quad (1) \qquad \text{ή} \qquad \frac{A\Gamma}{AE} = \frac{AB}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{AE}{A\Delta} \quad (2)$$

Δίνεται ότι:

$$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad A\Delta = 2AB$$

Η (1) γίνεται διαδοχικά:

$$\frac{3}{2}=\frac{2AB}{AE} \quad ή \quad AE=\frac{4}{3}AB$$

Η (2) γίνεται διαδοχικά:

$$\frac{3}{2}=\frac{AE}{2AB} \quad ή \quad AE=3AB$$

Άρα, τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια όταν $AE=\frac{4}{3}AB$ ή $AE=3AB$.

57

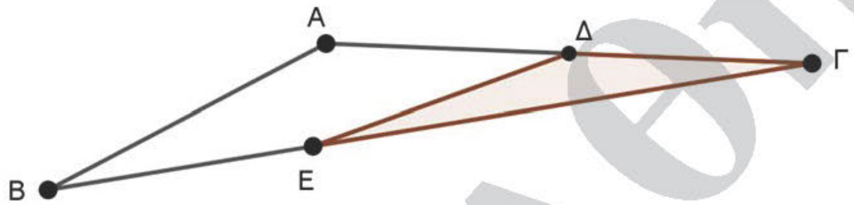
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, με ΑΒ=4, ΑΓ=6 και $\widehat{A}$ = 150^0. Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της ΑΓ και το Ε είναι σημείο της ΒΓ ώστε ΓΕ = $\frac{2}{3}$ΓΒ, τότε να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται ημ$150^0 = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 9)

β) το λόγο $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)}$. (Μονάδες 9)

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 7)



57 α

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ=4, ΑΓ=6 και $\widehat{A}$ = 150^0 και ημ150^0 = $\frac{1}{2}$.

α) Είναι (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ ΑΒ·ΑΓ·ημΑ = $\frac{1}{2}$ ·4·6·ημ150^0 = 12·$\frac{1}{2}$ = 6.

β) Από τα δεδομένα η ΓΔ = $\frac{1}{2}$ ΓΑ. Επίσης το ΓΕ = $\frac{2}{3}$ΓΒ.

Έτσι, τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΑΒΓ έχουν τη γωνία Γ κοινή. Άρα ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν την κοινή γωνία Γ.

Δηλαδή: $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma\Delta \cdot \Gamma E}{\Gamma A \cdot \Gamma B}$ ή $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma A \cdot \frac{2}{3}\Gamma B}{\Gamma A \cdot \Gamma B}$ ή $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}$.

γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}$ ή (ΓΔΕ) = $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓ)

και λόγω του ερωτήματος (α) θα είναι: (ΓΔΕ) = $\frac{1}{3}$ .6 = 2.

58

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε $\text{ΑΖ} = \frac{3}{4}\text{ΑΒ}$.

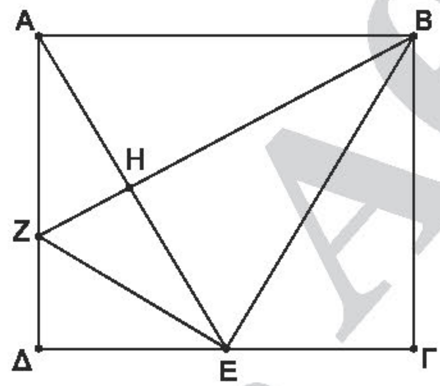
α) Να αποδείξετε ότι $\text{ΒΖ} = \frac{5}{4}\text{ΑΒ}$. (Μονάδες 6)

β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $\text{ΒΕ}^2 = \frac{5}{4}\text{ΑΒ}^2$ και $\text{ΖΕ}^2 = \frac{5}{16}\text{ΑΒ}^2$, (Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους. (Μονάδες 8)



58 α

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε ότι

$$ΒΖ^2 = ΑΒ^2 + ΑΖ^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $ΑΖ = \frac{3}{4}ΑΒ$, οπότε

$$ΒΖ^2 = ΑΒ^2 + \left(\frac{3}{4}ΑΒ\right)^2 \text{ ή } ΒΖ^2 = \frac{25}{16}ΑΒ^2 \text{ ή } ΒΖ = \frac{5}{4}ΑΒ.$$

β) Αφού το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, θα είναι $ΑΔ = ΒΓ = ΑΒ$.

Επιπλέον,

$$ΔΖ = ΑΔ - ΑΖ = ΑΒ - \frac{3}{4}ΑΒ = \frac{1}{4}ΑΒ.$$

i. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε ότι

$$ΒΕ^2 = ΒΓ^2 + ΓΕ^2 \text{ ή } ΒΕ^2 = ΑΒ^2 + \left(\frac{1}{2}ΑΒ\right)^2 \text{ ή } ΒΕ^2 = \frac{5}{4}ΑΒ^2.$$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε ότι

$$ΖΕ^2 = ΔΖ^2 + ΔΕ^2 \text{ ή } ΖΕ^2 = \left(\frac{1}{4}ΑΒ\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ΑΒ\right)^2 \text{ ή } ΖΕ^2 = \frac{5}{16}ΑΒ^2.$$

ii. Από το ερωτήματα α και βi έχουμε ότι

$$ΒΕ^2 + ΖΕ^2 = \frac{5}{4}ΑΒ^2 + \frac{5}{16}ΑΒ^2 = \frac{25}{16}ΑΒ^2 = ΒΖ^2.$$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο με $Β\hat{Ε}Ζ = 90^o$.

γ) Είναι $\frac{ΒΕ}{ΒΓ} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}ΑΒ}{ΑΒ} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{ΖΕ}{ΕΓ} = \frac{\sqrt{\frac{5}{16}}ΑΒ}{\frac{1}{2}ΑΒ} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ έχουν:

- $\frac{ΒΕ}{ΒΓ} = \frac{ΖΕ}{ΕΓ}$ και
- $Β\hat{Ε}Ζ = Β\hat{Γ}Ε = 90^o$.

Άρα τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, οπότε

$$\frac{(ΒΕΖ)}{(ΒΓΕ)} = \left(\frac{ΒΕ}{ΒΓ}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

59

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα.

α) Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ και το μέσο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ, όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

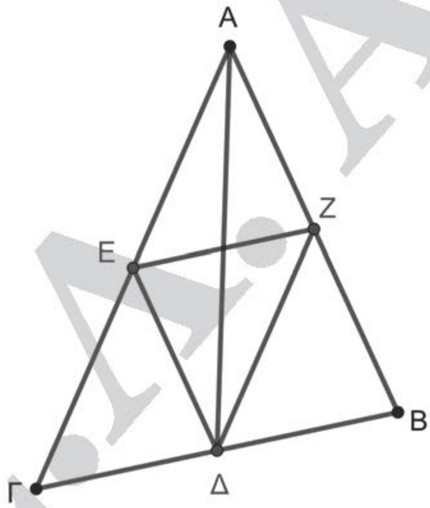
ii. Για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι $(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2(ΕΔΓ)$.

iii. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 18)

β) Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ;

(Μονάδες 07)



59 α

ΛΥΣΗ

α) i. Το Ε είναι μέσο της ΑΓ, άρα $ΑΓ = 2ΓΕ$ ή $\frac{ΓΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$.

Ομοίως το Δ είναι μέσο της ΒΓ, άρα $\frac{ΓΔ}{ΒΓ} = \frac{1}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, εφόσον η $\hat{Γ}$ είναι κοινή γωνία. Επομένως τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας τον λόγο των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{1}{2}$.

ii. Άρα τα εμβαδά (ΕΔΓ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΕΔΓ και ΑΒΓ αντίστοιχα έχουν λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Επομένως:

$$\frac{(ΕΔΓ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ ή } (ΕΔΓ) = \frac{1}{4} \cdot (ΑΒΓ)$$

Με ανάλογους συλλογισμούς με εκείνους του α)i προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΖΒΔ και ΑΒΓ είναι επίσης όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$, εφόσον:

- Το Ζ είναι μέσο της ΑΒ.
- Το Δ είναι μέσο της ΒΓ.
- Η περιεχόμενη γωνία $\hat{Β}$ των ΒΖ, ΒΔ και ΑΒ, ΒΓ είναι κοινή.

Επομένως για το εμβαδόν (ΖΒΔ) του τριγώνου ΖΒΔ ισχύει ότι $(ΖΒΔ) = \frac{1}{4} \cdot (ΑΒΓ) = (ΕΔΓ)$.

Επίσης για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι:

$$(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - (ΕΔΓ) - (ΖΒΔ) \text{ ή } (ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2(ΕΔΓ).$$

iii. Ή αλλιώς:

$$(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (ΑΒΓ) = (ΑΒΓ) - \frac{1}{2} \cdot (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot (ΑΒΓ)$$

β) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ με το τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΓ έχουν κοινή γωνία την $\hat{Α}_1 = Δ\hat{Α}Ε$, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{Α}_1$. Άρα $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΔ \cdot ΑΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$, εφόσον το Ε είναι μέσο της ΑΓ.

Άρα $(ΑΔΕ)=\dfrac{(ΑΔΓ)}{2}$.

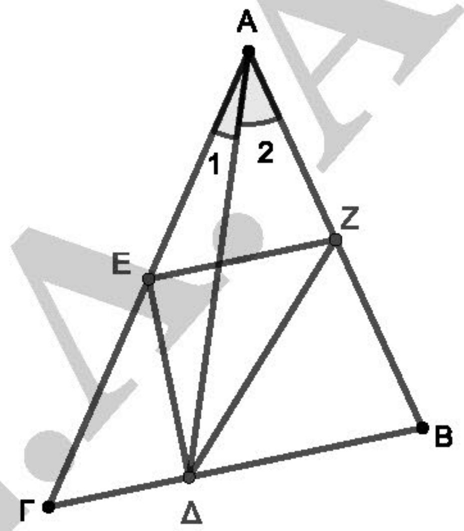
(Εναλλακτικά: Η διάμεσος ΔΕ της πλευράς ΑΓ του τριγώνου ΑΔΓ το χωρίζει σε δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά, τα ΑΔΕ και ΔΕΓ. Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΓ).

Με όμοιους συλλογισμούς για τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΔΒ έχουμε $(ΑΔΖ)=\dfrac{(ΑΔΒ)}{2}$.

Όμως για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι:

$$(ΑΕΔΖ)=(ΑΔΕ)+(ΑΔΖ) \quad \text{ή} \quad (ΑΕΔΖ)=\frac{(ΑΔΓ)}{2}+\frac{(ΑΔΒ)}{2}=\frac{(ΑΔΓ)+(ΑΔΒ)}{2}=\frac{(ΑΒΓ)}{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\dfrac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.



60

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ε σημείο στην πλευρά ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του ΑΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και παίρνουμε σημείο Ζ στην προέκταση $A\chi$ της πλευράς ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ ώστε να είναι ΑΖ = ΑΕ, όπως στο σχήμα.

α) Έστω $A\Gamma = 3AE$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

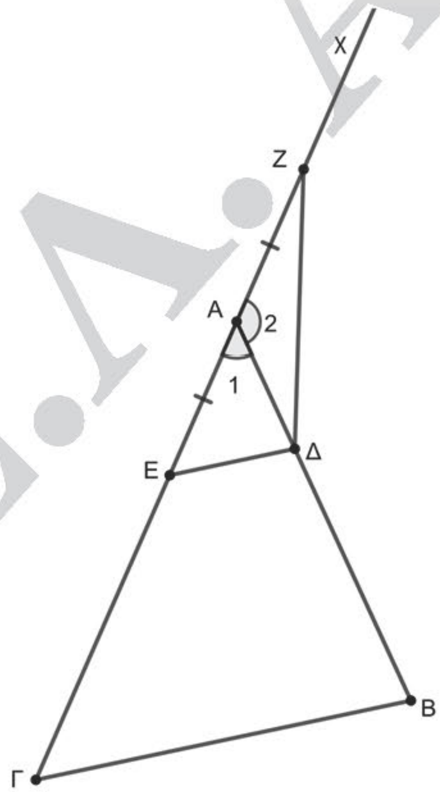
(Μονάδες 07)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AE}{A\Gamma}$.

(Μονάδες 08)



60 α

ΛΥΣΗ

α) i. Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ, παράλληλη προς τη ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, με:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}$$

Ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι:

$$λ=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΑΕ}{3ΑΕ}=\frac{1}{3}$$

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, ο λόγος των εμβαδών (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ αντίστοιχα είναι:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

ii. Οι γωνίες $\hat{Α}_1$ και $\hat{Α}_2$, των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους (ΑΔΕ) και (ΑΔΖ) αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΑΕ}{ΑΔ\cdot ΑΖ} \quad ή \quad \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)}=\frac{ΑΕ}{ΑΖ} \quad ή \quad \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)}=1, \text{ γιατί } ΑΕ = ΑΖ$$

Άρα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ είναι ίσα.

(Εναλλακτικά: η ΑΔ είναι διάμεσος της πλευράς ΕΖ του τριγώνου ΔΕΖ, άρα το χωρίζει σε δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά, τα ΑΔΕ και ΑΔΖ).

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ ισχύει ότι $(ΔΕΖ)=(ΑΔΕ)+(ΑΔΖ)=2(ΑΔΕ)$.

Επομένως:

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{2(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=2\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}.$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Έστω $λ=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Τότε με όμοιους συλλογισμούς με το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο λ και για τα εμβαδά τους ισχύει ότι $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=λ^2$.

Επίσης, εφόσον ΑΕ = ΑΖ τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν ίσα εμβαδά, ανεξάρτητα από την τιμή του λόγου λ και $(ΔΕΖ)=(ΑΔΕ)+(ΑΔΖ)=2(ΑΔΕ)$, όπως στο α)ii).

Άρα:

$$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{2(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}=2\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}=2\lambda^2$$

Εφόσον το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ έχουμε ότι:

$$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{2} \text{ ή } 2\lambda^2=\frac{1}{2} \text{ ή } \lambda^2=\frac{1}{4} \text{ ή } \lambda=\frac{1}{2}$$

Άρα $\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{1}{2}$.

61

ΘΕΜΑ 4

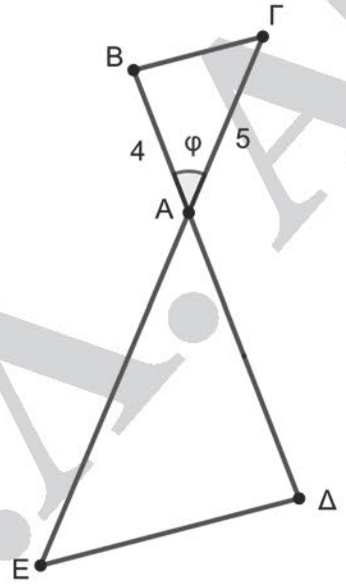
Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έχει τα άκρα του Β και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΔΕ, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔΕ. Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, $AB = 4$ και $A\Gamma = 5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$. (Μονάδες 10)

β) Αν $B\hat{A}\Gamma = \varphi$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΑΔΕ) του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με $40\eta\mu\varphi$.

(Μονάδες 07)

γ) Να βρείτε σημείο Ζ εσωτερικό της πλευράς ΑΔ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΖ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 08)



61 α

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος τους Θαλή το τρίγωνο ΑΒΓ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ του τριγώνου ΑΔΕ και την ΒΓ, παράλληλη προς τη ΔΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΔΕ. Άρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια, με:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΑΓ}{ΑΕ}=\frac{ΒΓ}{ΔΕ}$$

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσος με λ , τότε:

$$\lambda^2=\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)} \quad ή \quad \lambda^2=\frac{1}{4} \quad ή \quad \lambda=\frac{1}{2}$$

β) Το εμβαδόν (ΑΒΓ) του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ημφ$ ή

$(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot ημφ$ ή $(ΑΒΓ)=10ημφ$.

Όμως $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)}=\frac{1}{4}$ ή $(ΑΔΕ)=4(ΑΒΓ)$. Δηλαδή το εμβαδόν του ΑΔΕ είναι τετραπλάσιο του εμβαδού του ΑΒΓ. Άρα $(ΑΔΕ)=4\cdot 10ημφ$ ή $(ΑΔΕ)=40ημφ$.

γ) Έχουμε ότι $(ΑΒΓ)=\frac{1}{4}\cdot(ΑΔΕ)$.

Έστω σημείο Ζ εσωτερικό της ΑΔ ώστε $(ΑΓΖ)=\frac{1}{4}\cdot(ΑΔΕ)$ ή $(ΑΓΖ)=(ΑΒΓ)$ ή $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΓΖ)}=1$.

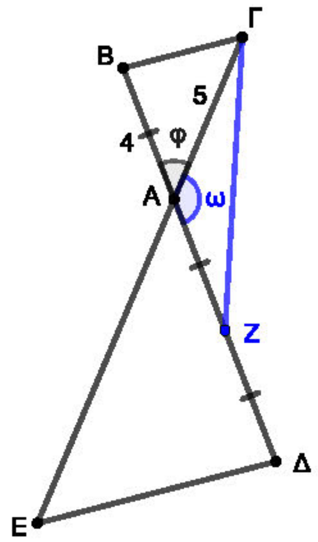
Επίσης οι γωνίες $\hat{φ}$ και $\hat{ω}$, των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓ) και (ΑΓΖ) των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΓΖ)}=\frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{ΑΓ\cdot ΑΖ}$$

Άρα $\frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{ΑΓ\cdot ΑΖ}=1$ ή $\frac{ΑΒ}{ΑΖ}=1$ ή $ΑΖ=ΑΒ$ ή $ΑΖ=\frac{ΑΔ}{2}$, εφόσον οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ είναι ομόλογες σε όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ με λόγο ομοιότητας $\lambda=\frac{1}{2}$ (από το α)).

Επομένως το σημείο Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΔ του τριγώνου ΑΔΕ.

(Εναλλακτικά: τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΖ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Γ και εφόσον έχουν ίσα εμβαδά, θα έχουν και ίσες βάσεις ΑΖ = ΑΒ).


Γ
Β
5
4
φ
Α
ω
Ζ
Δ
Ε

62

ΘΕΜΑ 2

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει μήκη πλευρών $\alpha = 17$, $\beta = 8$, $\gamma = 15$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ:

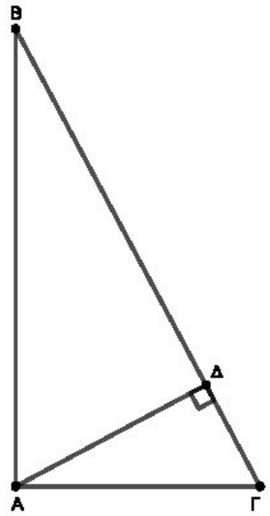
i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ.

ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})}$.

(Μονάδες 12)

62 α

ΛΥΣΗ



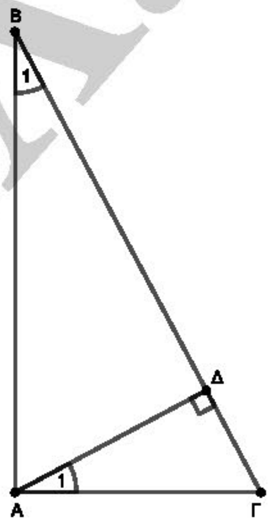
α) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η α. Θα εξετάσουμε αν το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς α.

$$\beta^2+\gamma^2=8^2+15^2 \text{ ή } \beta^2+\gamma^2=64+225 \text{ ή } \beta^2+\gamma^2=289$$

$$\alpha^2=17^2 \text{ ή } \alpha^2=289$$

Άρα $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α=17 και $\widehat{A}=90^o$.

β)



i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ορθογώνια με $\widehat{B}=\widehat{A}_1$ αφού είναι και οι δύο γωνίες συμπληρωματικές της γωνίας $\widehat{\Gamma}$. Άρα είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητάς τους θα είναι ίσος με το λόγο των υποτεινουσών τους. Δηλαδή $\lambda=\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{15}{8}$.

ii. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αφού είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι αυτά είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ = $\frac{15}{8}$.

Άρα $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}$.

63

ΘΕΜΑ 4

Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο Ο. Το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.

α) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ'.

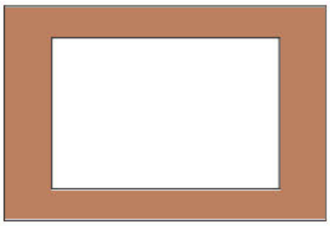
(Μονάδες 5)

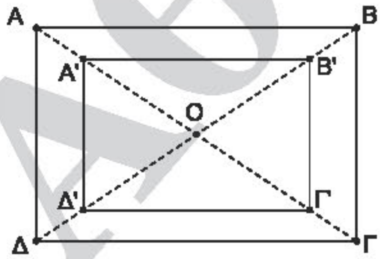
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι όμοια. (Μονάδες 6)

γ) Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της. Η διαγώνιος ΑΓ της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $A\widehat{O}B = 120^o$.

i. Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας; (Μονάδες 6)

ii. Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας; (Μονάδες 8)





63 α

ΛΥΣΗ

α) Αφού το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, θα είναι $(ΑΒΓΔ) = 2(Α'Β'Γ'Δ')$ ή

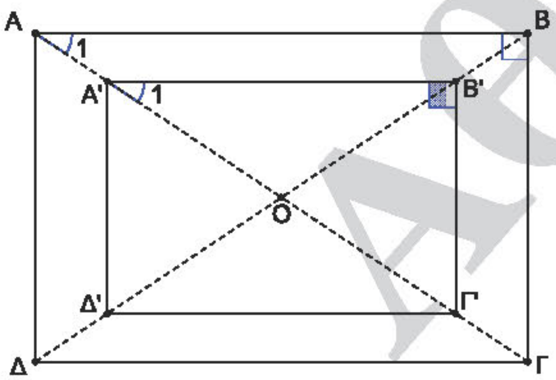
$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = 2.$$

Αν είναι λ ο λόγος ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ', τότε

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = λ^2.$$

Άρα $λ^2 = 2$ ή $λ = \sqrt{2}$.

β)



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $\hat{Α}_1 = \hat{Α'}_1$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, Α'Β' που τέμνονται από την ΑΓ και $\hat{Β} = \hat{Β'} = 90^o$. Επομένως τα δύο τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) i. Από το ερώτημα α) έχουμε ότι ο λόγος ομοιότητας των δύο ορθογωνίων είναι $λ = \sqrt{2}$, δηλαδή $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \sqrt{2}$.

Επιπλέον, από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουμε ότι $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$.

Επομένως $\frac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \sqrt{2}$.

Όμως $ΑΓ = 40$, άρα $\frac{40}{Α'Γ'} = \sqrt{2}$ ή $Α'Γ' = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$, δηλαδή η διαγώνιος της φωτογραφίας έχει μήκος $20\sqrt{2}$ cm.

ii. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου Α'Β'Γ'Δ' έχουν το ίδιο μήκος και διχοτομούνται. Επομένως

$$ΟΑ' = ΟΒ' = ΟΓ' = ΟΔ' = \frac{Α'Γ'}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$$

Είναι $Α'\widehat{Ο}Β' = Γ'\widehat{Ο}Δ' = 120^o$ ως κατακορυφήν. Για το εμβαδόν των τριγώνων ΟΑ'Β' και ΟΓ'Δ' ισχύει

$$(ΟΑ'Β') = \frac{1}{2}ΟΑ' \cdot ΟΒ' \cdot ημ120^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

και

$$(ΟΓ'Δ') = \frac{1}{2}ΟΓ' \cdot ΟΔ' \cdot ημ120^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,.$$

Είναι $Α'\widehat{Ο}Δ' = Β'\widehat{Ο}Γ' = 60^o$ ως παραπληρωματικές της γωνίας $Α'\widehat{Ο}Β' = 120^o$. Για το εμβαδόν των τριγώνων ΟΑ'Δ' και ΟΒ'Γ' ισχύει

$$(ΟΑ'Δ') = \frac{1}{2}ΟΑ' \cdot ΟΔ' \cdot ημ60^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

και

$$(ΟΒ'Γ') = \frac{1}{2}ΟΒ' \cdot ΟΓ' \cdot ημ60^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,.$$

Το εμβαδόν της φωτογραφίας είναι

$$(Α'Β'Γ'Δ') = (ΟΑ'Β') + (ΟΓ'Δ') + (ΟΑ'Δ') + (ΟΒ'Γ') = 4 \cdot 50\sqrt{3} = 200\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

<u>$2^η$ λύση για το ερώτημα γ)ii.</u>

Το τρίγωνο ΟΑ'Δ' είναι ισοσκελές, αφού ΟΑ' = ΟΔ' ως μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου Α'Β'Γ'Δ' και $Α'\widehat{Ο}Δ' = 60^o$. Άρα $Ο\widehat{Α'}Δ' = 60^o$. Όμως η γωνία $Β'\widehat{Α'}Δ'$ είναι ορθή, επομένως $Ο\widehat{Α'}Β' = 90^o - 60^o = 30^o$.

Η γωνία $Ο\widehat{Α'}Β'$ του ορθογωνίου τριγώνου Α'Β'Γ' ισούται με 30^o, οπότε η απέναντι πλευρά Β'Γ' είναι το μισό της υποτείνουσας Α'Γ', δηλαδή $Β'Γ' = \frac{Α'Γ'}{2} = \frac{Α'Γ'}{2} = 10\sqrt{2}$.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο Α'Β'Γ' έχουμε ότι

$$Α'Β'^2 = Α'Γ'^2 - Β'Γ'^2.$$

Όμως $Α'Γ' = 20\sqrt{2}$ και $Β'Γ' = 10\sqrt{2}$, οπότε

$$Α'Β'^2 = (20\sqrt{2})^2 - (10\sqrt{2})^2 \text{ ή } Α'Β'^2 = 600 \text{ ή } Α'Β' = 10\sqrt{6}.$$

Το εμβαδόν της φωτογραφίας είναι

$$(Α'Β'Γ'Δ') = Α'Β' \cdot Β'Γ' = 10\sqrt{6} \cdot 10\sqrt{2} = 200\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

64

ΘΕΜΑ 4

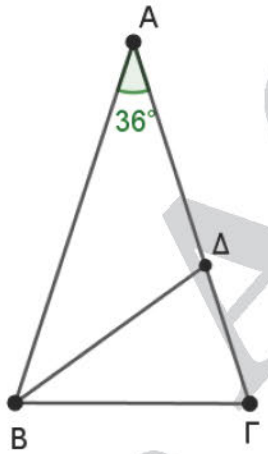
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\widehat{A} = 36^o$.

α) Αν η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

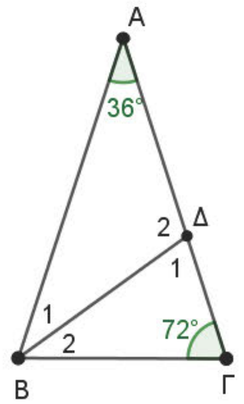
ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών. (Μονάδες 06)

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της ΑΓ. Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = 3$. (Μονάδες 09)



64 α

ΛΥΣΗ



α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = ΑΓ, οπότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}$. Όμως $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$,

άρα $36^\circ+2\hat{B}=180^\circ$ και τελικά $\hat{B}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^\circ-36^\circ}{2}=72^\circ$.

Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, οπότε $\hat{B}_1=\hat{B}_2=\dfrac{72^\circ}{2}=36^\circ$ (1).

$\hat{A}=\hat{B}_1=36^\circ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΒΔ (2).

$\hat{\Delta}_1=36^\circ+36^\circ=72^\circ$, σαν εξωτερική γωνία του ΑΒΔ, επομένως το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με ΒΔ = ΒΓ (3).

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν:

   $\hat{\Gamma}$ κοινή γωνία,

   $\hat{A}=\hat{B}_2=\dfrac{\hat{B}}{2}=36^\circ$, από (1).

   Επομένως είναι όμοια, διότι έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

ii. Οι ομόλογες πλευρές των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}$	$\hat{B}_2=\hat{A}$	$\hat{\Delta}_1=\hat{B}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΒΔΓ	ΒΔ	ΔΓ	ΒΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΑΒ	ΒΓ	ΑΓ

Επομένως οι λόγοι θα είναι $\dfrac{B\Gamma}{A\Gamma}=\dfrac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}=\dfrac{B\Delta}{AB}$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΒΓ έχουν τις γωνίες $\widehat{\Delta}_1, \widehat{\Delta}_2$ παραπληρωματικές. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν αυτές τις γωνίες, δηλαδή $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\Delta\mathrm{B\Gamma})} = \frac{\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{B\Delta}}{\Delta\Gamma \cdot \mathrm{B\Delta}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\Delta\Gamma}$.

Όμως $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\Delta\mathrm{B\Gamma})} = 3$, οπότε $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\Delta\Gamma} = 3$ ή ΑΔ = 3ΔΓ. Το Δ θα χωρίζει το ΑΓ σε δύο τμήματα ΑΔ και ΔΓ με λόγο 3:1.

65

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με μήκη πλευρών ΑΒ=6, ΑΓ=8, και ΒΓ=10.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

β) Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{4}$. (Μονάδες 10)

ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)}$. (Μονάδες 5)

65 α

ΛΥΣΗ

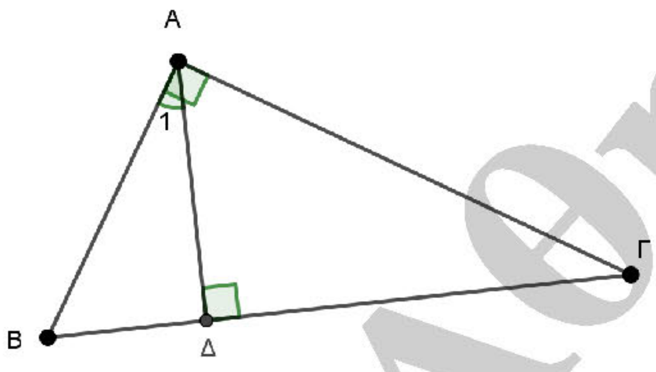
α) Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ=6, ΑΓ=8, και ΒΓ=10, οπότε ΒΓ > ΑΒ, ΑΓ.

Επίσης $ΒΓ^2 = 10^2 = 100$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

Άρα $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ, είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ και ορθή γωνία την Α.

β)

i.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι: $\widehat{Α}_1 + \widehat{Β} = 90^0$.

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\widehat{Γ} + \widehat{Β} = 90^0$.

Οπότε $\widehat{Α}_1 + \widehat{Β} = \widehat{Γ} + \widehat{Β}$ ή $\widehat{Α}_1 = \widehat{Γ}$. Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $λ = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

ii. Γνωρίζουμε ότι ο λόγος των εμβαδών ομοίων τριγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Οπότε λόγω του ερωτήματος (β, ι) θα είναι: $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)} = λ^2 = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$.