Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

66

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στη ΒΓ και ΒΔ = 2.

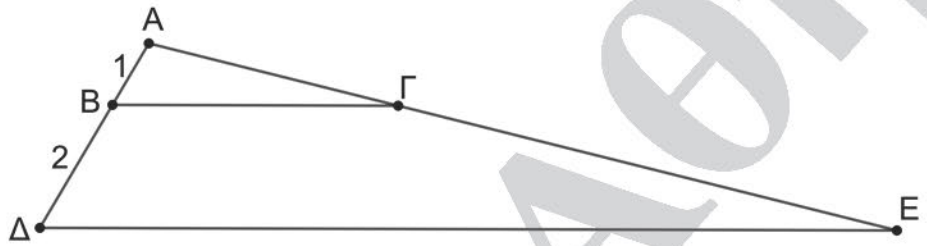
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$.

(Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 08)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 07)



66 α

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, οι πλευρές του τριγώνου ΑΔΕ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, εφόσον το ΑΔΕ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη στην ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{A\Gamma}{AE}=\frac{B\Gamma}{\Delta E}$.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{AB}{AB+B\Delta}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$.

β) Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους, άρα οι περίμετροι των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν λόγο $\frac{1}{3}$.

Επομένως η περίμετρος του ΑΔΕ είναι τριπλάσια της περιμέτρου του ΑΒΓ, δηλαδή είναι ίση με $3\cdot 8,5=25,5$.

γ) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, άρα ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓ) και (ΑΔΕ) των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ, αντίστοιχα είναι $\frac{1}{9}$. Δηλαδή:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)}=\frac{1}{9} \text{ ή } (AB\Gamma)=\frac{(A\Delta E)}{9} \text{ ή } (AB\Gamma)=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}.$$

67

ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = \sqrt{2}$. Από σημείο $Δ$ της πλευράς $ΑΒ$ ώστε $ΑΔ = 1$, φέρνουμε παράλληλη στη $ΒΓ$ η οποία τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο $Ε$.

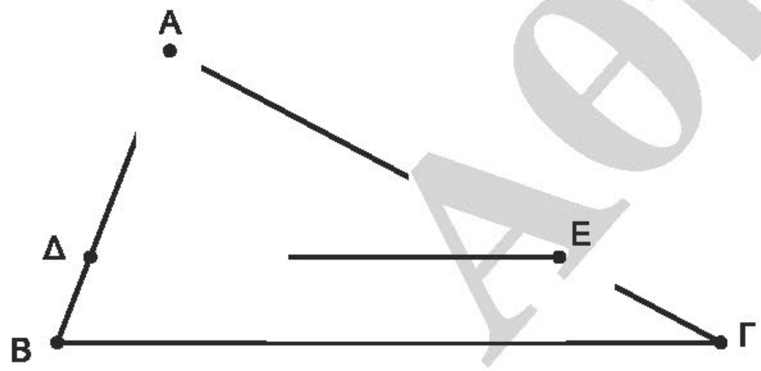
α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας ,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΔΕ$ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(Μονάδες 18)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου $ΑΔΕ$ και του τραπεζίου $ΒΓΕΔ$. (Μονάδες 7)



67 α

ΛΥΣΗ

α) i) Γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου. Επίσης, αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια. Επομένως τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $\lambda = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ii) Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ θα είναι

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ ή } (A\Delta E) = \frac{1}{2}(AB\Gamma).$$

β) Δίνεται ότι $(AB\Gamma) = 2$, οπότε από το ερώτημα α) i) είναι $(A\Delta E) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Επίσης το εμβαδόν του τραπεζίου $B\Gamma E\Delta$ θα είναι $(B\Gamma E\Delta) = (AB\Gamma) - (A\Delta E) = 2 - 1 = 1$.

68

ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσός του και το σημείο Ε είναι το μέσο της ΑΜ. Από το Ε φέρουμε παράλληλες στις ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Δ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\mathrm{AMB}) = (\mathrm{AM\Gamma})$ (Μονάδες 5)

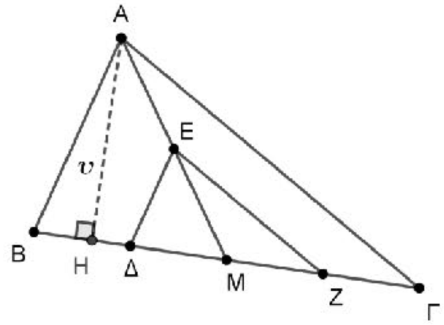
β) $(\mathrm{ME\Delta}) = \frac{1}{8}\cdot(\mathrm{AB\Gamma})$ (Μονάδες 12)

γ) $(\mathrm{AB\Delta E}) = (\mathrm{A\Gamma ZE})$ (Μονάδες 8)

68 α

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ η διάμεσός του και Ε το μέσο της ΑΜ, ΔΕ // ΑΒ και ΕΖ // ΑΓ.



α) Έστω ΑΗ = υ το κοινό ύψος των τριγώνων ΑΜΒ και ΑΜΓ. Έχουμε

$$(\text{ΑΜΒ}) = \frac{1}{2}\cdot \text{ΒΜ}\cdot υ \ \text{ και } \ (\text{ΑΜΓ}) = \frac{1}{2}\cdot \text{ΜΓ}\cdot υ$$

Η ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως ΒΜ = ΜΓ και από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ).

β) Στο τρίγωνο ΑΜΒ το Ε είναι το μέσο της ΑΜ και ΕΔ // ΑΒ, επομένως και το Δ είναι το μέσο της ΒΜ, άρα $\text{ΜΔ} = \frac{1}{2}\cdot \text{ΒΜ}$ και $\text{ΜΕ} = \frac{1}{2}\cdot \text{ΑΜ}$

Από το (α) ερώτημα έχουμε $(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΑΜΓ}) = \frac{1}{2}\cdot(\text{ΑΒΓ})$

Τα τρίγωνα ΜΕΔ και ΑΜΒ έχουν την γωνία $\text{Α}\hat{\text{Μ}}\text{Β}$ κοινή, επομένως

$$\frac{(\text{ΜΕΔ})}{(\text{ΑΜΒ})} = \frac{\text{ΜΕ}\cdot\text{ΜΔ}}{\text{ΑΜ}\cdot\text{ΒΜ}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\text{ΑΜ}\cdot\frac{1}{2}\cdot\text{ΒΜ}}{\text{ΑΜ}\cdot\text{ΒΜ}} = \frac{1}{4}$$

άρα

$$(\text{ΜΕΔ}) = \frac{1}{4}\cdot(\text{ΑΜΒ}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{8}\cdot(\text{ΑΒΓ})$$

γ) Από το (α) ερώτημα είναι (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ) (1), επιπλέον στο τρίγωνο ΔΕΖ είναι

$$\text{ΔΜ} = \frac{1}{2}\cdot\text{ΒΜ} = \frac{1}{2}\cdot\text{ΜΓ} = \text{ΜΖ}$$

συνεπώς η ΕΜ είναι διάμεσος του, άρα (ΜΕΔ) = (ΜΕΖ) (2)

Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) – (2) έχουμε:

$$(\text{ΑΜΒ}) - (\text{ΜΕΔ}) = (\text{ΑΜΓ}) - (\text{ΜΕΖ}) \ \text{ ή}$$

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΑΓΖΕ})$$

69

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{A\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$ (Μονάδες 8)

β) $\frac{(\mathrm{BMN})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{1}{4}$ (Μονάδες 12)

γ) $(\mathrm{BMN}) = \frac{1}{8}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$ (Μονάδες 5)

69 α

ΛΥΣΗ

α) Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουμε

- ΑΓ είναι κοινή πλευρά.
- ΑΒ = ΓΔ αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
- ΒΓ = ΑΔ αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

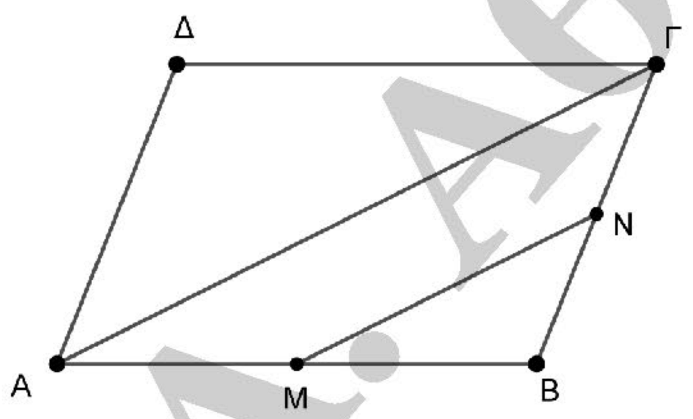
συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα έχουν ίσα εμβαδά, δηλαδή (ΑΒΓ) = (ΑΓΔ)

τότε

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΒΓ) = 2(ΑΒΓ)$$

δηλαδή

$$(ΑΒΓ) = (ΑΓΔ) = \frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓΔ)$$



β) Αφού τα Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, τότε

$$ΜΑ = ΜΒ = \frac{ΑΒ}{2} \quad \text{και } ΒΝ = ΝΓ = \frac{ΒΓ}{2}$$

Τα τρίγωνα ΒΜΝ και ΑΒΓ έχουν την γωνία $\hat{Β}$ κοινή, επομένως

$$\frac{(ΒΜΝ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΜΒ\cdot ΒΝ}{ΑΒ\cdot ΒΓ} = \frac{\frac{ΑΒ}{2}\cdot\frac{ΒΓ}{2}}{ΑΒ\cdot ΒΓ} = \frac{ΑΒ\cdot ΒΓ}{4\cdot ΑΒ\cdot ΒΓ} = \frac{1}{4}, \text{ δηλαδή } \frac{(ΒΜΝ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{4}$$

γ) Από το (β) ερώτημα έχουμε

$$\frac{(ΒΜΝ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{4} \text{ ή } (ΒΜΝ) = \frac{1}{4}\cdot(ΑΒΓ)$$

επειδή από το (α) ερώτημα έχουμε $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓΔ)$, τότε θα είναι

$$(ΒΜΝ) = \frac{1}{4}\cdot(ΑΒΓ) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{8}\cdot(ΑΒΓΔ)$$

70

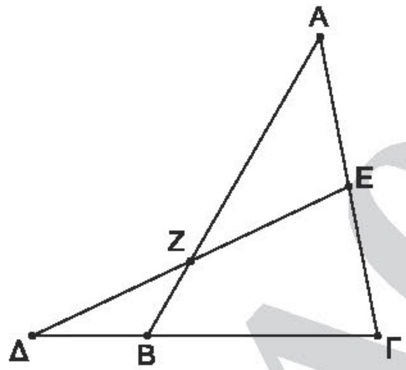
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 8$. Στην προέκταση της ΓΒ προς το Β παίρνουμε σημείο Δ, ώστε $ΔΒ = 4$ και Ε είναι το μέσο της ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $(ΑΒΓ) = 4ΑΓ \cdot ημΓ$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $(ΓΔΕ) = 3ΑΓ \cdot ημΓ$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΔΕ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, αν το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ είναι 12 τ.μ. (Μονάδες 8)



70 α

ΛΥΣΗ

α) Για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ο τύπος

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΑΓ \cdot ημΓ.$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $ΒΓ = 8$, επομένως

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot ΑΓ \cdot ημΓ = 4ΑΓ \cdot ημΓ.$$

β) Για το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ ισχύει ο τύπος

$$(ΓΔΕ) = \frac{1}{2} ΓΔ \cdot ΓΕ \cdot ημΓ.$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $ΒΓ = 8$ και $ΔΒ = 4$, επομένως $ΓΔ = ΒΓ + ΔΒ = 8 + 4 = 12$. Επιπλέον $ΓΕ = \frac{ΑΓ}{2}$, γιατί Ε είναι το μέσο της ΑΓ. Άρα

$$(ΓΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{ΑΓ}{2} \cdot ημΓ = 3ΑΓ \cdot ημΓ.$$

γ) Από τα ερωτήματα α) και β) προκύπτει ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΓΔΕ)} = \frac{4ΑΓ \cdot ημΓ}{3ΑΓ \cdot ημΓ} = \frac{4}{3}.$$

Όμως $(ΓΔΕ) = 12$ τ.μ. επομένως

$$\frac{(ΑΒΓ)}{12} = \frac{4}{3} \text{ ή } (ΑΒΓ) = 16 \text{ τ.μ.}$$

71

ΘΕΜΑ 4

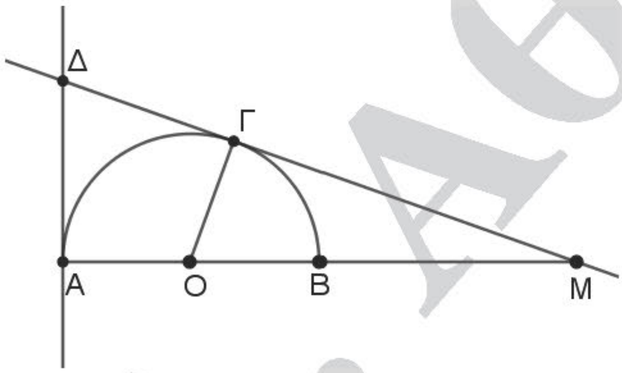
Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2ρ. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Μ. Από το Μ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση της ΜΓ στο Δ τότε:

α) Αν ΒΜ = 2ρ να αποδείξετε ότι ΜΓ = $2\sqrt{2}$ρ. (Μονάδες 09)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΜΟ}{ΜΓ} = \frac{ΜΔ}{ΜΑ}$. (Μονάδες 09)

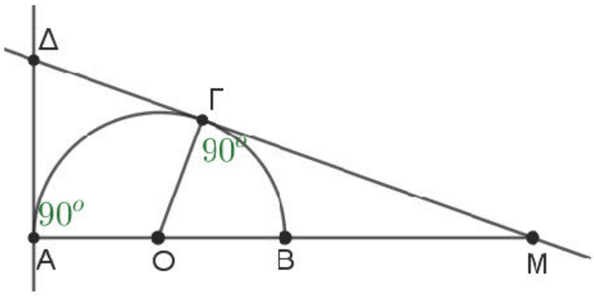
ii. Αν για το Μ ισχύει ότι ΒΜ = λ·ρ, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, τέτοια ώστε (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ). (Μονάδες 07)



71 α

ΛΥΣΗ

α)



Το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ είναι κάθετο στην ακτίνα ΟΓ.

ΜΟ = ΜΒ+ΒΟ = 2ρ+ρ = 3ρ.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O\Gamma}^2 + \mathrm{M\Gamma}^2$, άρα $\mathrm{M\Gamma}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{O\Gamma}^2 = (3\rho)^2 - \rho^2 = 8\rho^2$, δηλαδή ΜΓ = $2\sqrt{2}\rho$.

β)

i. Τα τρίγωνα ΟΜΓ και ΑΔΜ είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία αντίστοιχα: $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma} = 90^o$ και την γωνία $\widehat{\mathrm{M}}$ κοινή. Επομένως οι ομόλογες πλευρές τους θα είναι ανάλογες:

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma}$	Μ κοινή	$\widehat{\mathrm{O}} = \widehat{\Delta}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΜΓ	ΜΟ	ΟΓ	ΜΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΜ	ΜΔ	ΔΑ	ΜΑ

$\frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{MO}} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{M\Gamma}}$ ή $\frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{M\Gamma}}$.

ii. Δείξαμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΟΜΓ είναι όμοια, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

$\frac{(\mathrm{AM\Delta})}{(\mathrm{OM\Gamma})} = \left(\frac{\mathrm{AM}}{\Gamma\mathrm{M}}\right)^2 = \frac{\mathrm{AM}^2}{\Gamma\mathrm{M}^2}$. (1)

ΟΜ = ΜΒ+ΒΟ = λρ+ρ = (λ+1)ρ.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O\Gamma}^2 + \Gamma\mathrm{M}^2$, άρα

$\Gamma\mathrm{M}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{O\Gamma}^2 = ((\lambda+1)\rho)^2 - \rho^2 = (\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1)\rho^2 = (\lambda^2 + 2\lambda)\rho^2$.

ΑΜ = 2ρ+λρ= (λ+2)ρ.

Η (1) γίνεται $\frac{(\mathrm{AM\Delta})}{(\mathrm{MO\Gamma})} = \frac{\mathrm{AM}^2}{\Gamma\mathrm{M}^2} = \frac{(\lambda+2)^2\rho^2}{(\lambda^2+2\lambda)\rho^2} = \frac{(\lambda+2)^2}{\lambda(\lambda+2)} = \frac{\lambda+2}{\lambda}$.

Αφού (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ) θα έχουμε $\frac{(\text{ΑΜΔ})}{(\text{ΜΟΓ})} = \frac{9(\text{ΜΟΓ})}{(\text{ΜΟΓ})} = 9$ και επομένως $\frac{\lambda + 2}{\lambda} = 9$ ή

$\lambda + 2 = 9\lambda$ ή 8λ =2, άρα λ = $\frac{1}{4}$.

72

ΘΕΜΑ 4

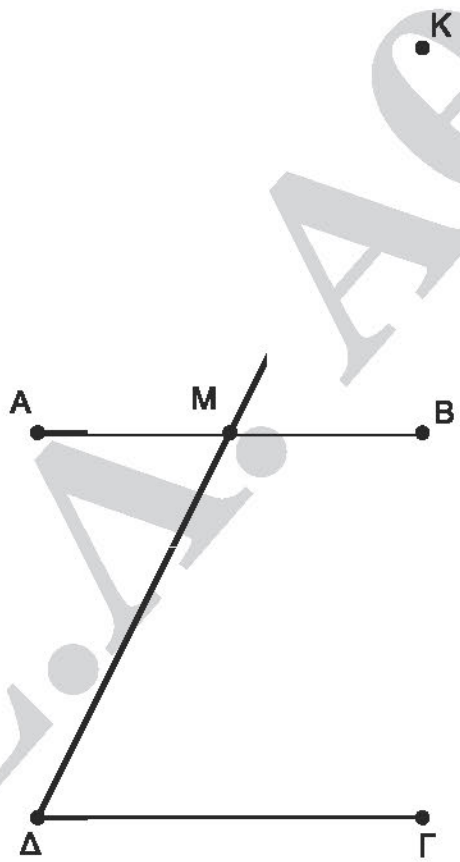
Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια. (5 μονάδες)

β) (ΜΚΒ) = $\frac{1}{4}$ (ΔΚΓ) (5 μονάδες)

γ) (ΜΒΓΔ) = $\frac{3}{4}$ (ΑΒΓΔ). (10 μονάδες)

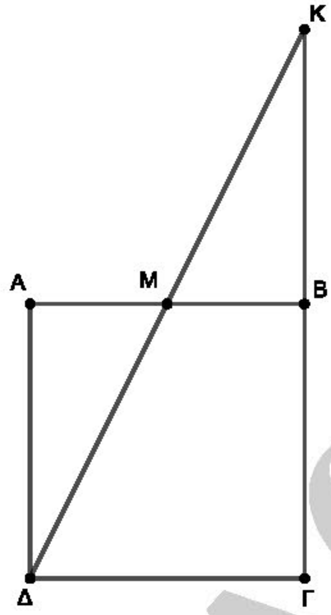
δ) Αν (ΜΒΓΔ) = 75 $\mathbf{m}^2$ να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου. (5 μονάδες)



72 α

ΛΥΣΗ

α)



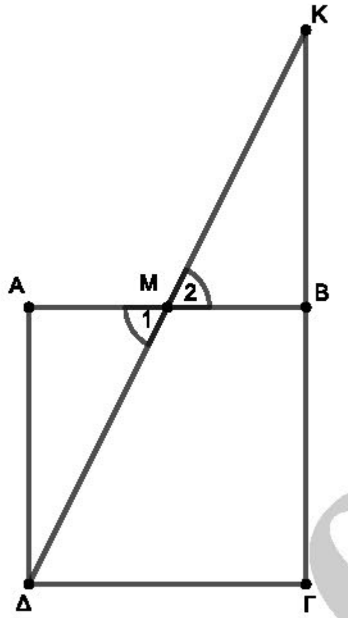
Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι ορθογώνια και έχουν κοινή τη γωνία $\widehat{K}$. Οπότε έχουν δυο γωνίες τους ίσες μια προς μια, άρα είναι όμοια.

β) Τα όμοια τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΒ έχουν λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{MB}{\Delta\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB}{AB} = \frac{1}{2}$.

Οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή: $\frac{(MKB)}{(\Delta K\Gamma)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Συνεπώς $(MKB) = \frac{1}{4}(\Delta K\Gamma)$.

γ)



Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΚΒ είναι ίσα αφού έχουν

- ΑΜ = ΜΒ, το Μ είναι μέσο της ΑΒ
- $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{M} = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$ = 90°
- $\widehat{\mathrm{M}}_1 = \widehat{\mathrm{M}}_2$, ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα, θα είναι και ισεμβαδικά, δηλαδή (ΑΜΔ) = (ΜΚΒ) (1).

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΔΚΓ έχουμε:

(ΔΚΓ) = (ΔΜΒΓ) + (ΜΚΒ) = (ΔΜΒΓ) + (ΑΜΔ) = (ΑΒΓΔ), λόγω της σχέσης (1)

Για το εμβαδόν του ΜΒΓΔ έχουμε: (ΜΒΓΔ) = (ΔΚΓ) – (ΜΚΒ) = (ΔΚΓ) – $\frac{1}{4}$(ΔΚΓ), λόγω του β) ερωτήματος.

Άρα (ΜΒΓΔ) = $\frac{3}{4}$(ΑΒΓΔ)

δ) Έστω ότι το τετράγωνο έχει πλευρά α. Τότε (ΑΒΓΔ) = α^2 και (ΜΒΓΔ) = 75.

Από το ερώτημα γ) έχουμε ότι: 75 = $\frac{3}{4}$ α^2 ή α^2 = $\frac{4}{3}$·75 ή $\alpha^2 = 100$.

Άρα $\alpha = 10$ m

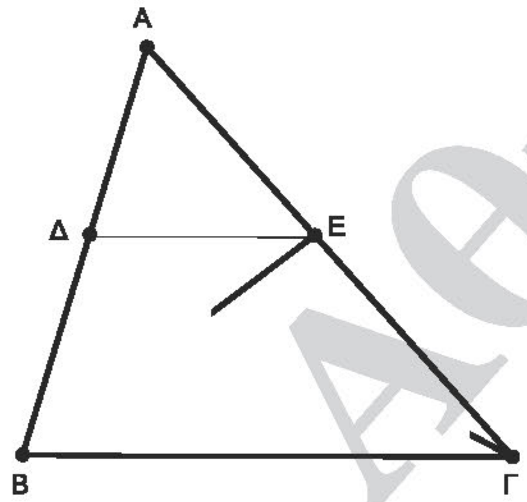
73

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}}$ και $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$. (Μονάδες 13)

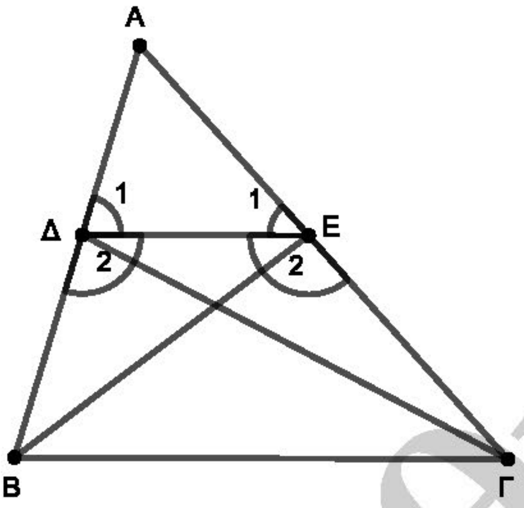
β) Να αποδείξετε ότι (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ). (Μονάδες 12)



73 α

ΛΥΣΗ

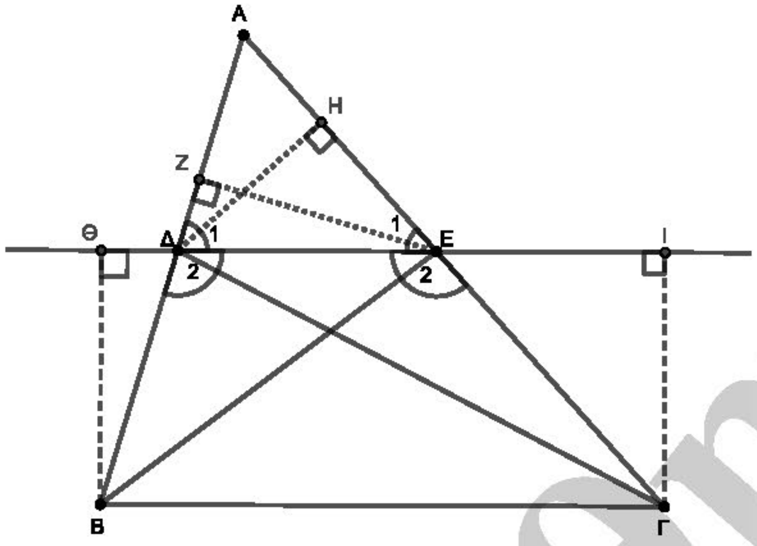
α)



Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΒ έχουν τις γωνίες τους $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{\Delta}_2$ παραπληρωματικές όπως και τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ έχουν παραπληρωματικές τις γωνίες $\widehat{\mathrm{E}}_1$ και $\widehat{\mathrm{E}}_2$. Άρα οι λόγοι των εμβαδών τους θα είναι ίσοι με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})} = \frac{\mathrm{A\Delta \cdot \Delta E}}{\mathrm{\Delta B \cdot \Delta E}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}}$ και $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})} = \frac{\mathrm{AE \cdot \Delta E}}{\mathrm{E\Gamma \cdot \Delta E}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$.

β) Το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή, έχουμε ότι $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$. Επομένως από το α) ερώτημα θα ισχύει ότι $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})} = \frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})}$, άρα (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ).

Εναλλακτική λύση:



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΒ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Ε, το τμήμα ΕΖ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των πλευρών που αντιστοιχεί αυτό το ύψος. Δηλαδή $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})}=\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}}$. Ομοίως τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Δ, το τμήμα ΔΗ, επομένως $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$.

β) Τα τρίγωνα ΔΕΒ και ΔΕΓ έχουν κοινή πλευρά τη ΔΕ και οι απέναντι κορυφές τους Β και Γ αντίστοιχα βρίσκονται στη ΒΓ, που είναι παράλληλη στη ΔΕ. Δηλαδή, έχουν κοινή βάση και ίσα ύψη, τα ΒΘ και ΓΙ αντίστοιχα, που είναι η απόσταση των παραλλήλων ΒΓ και ΔΕ. Άρα είναι ισοδύναμα, δηλαδή (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ).

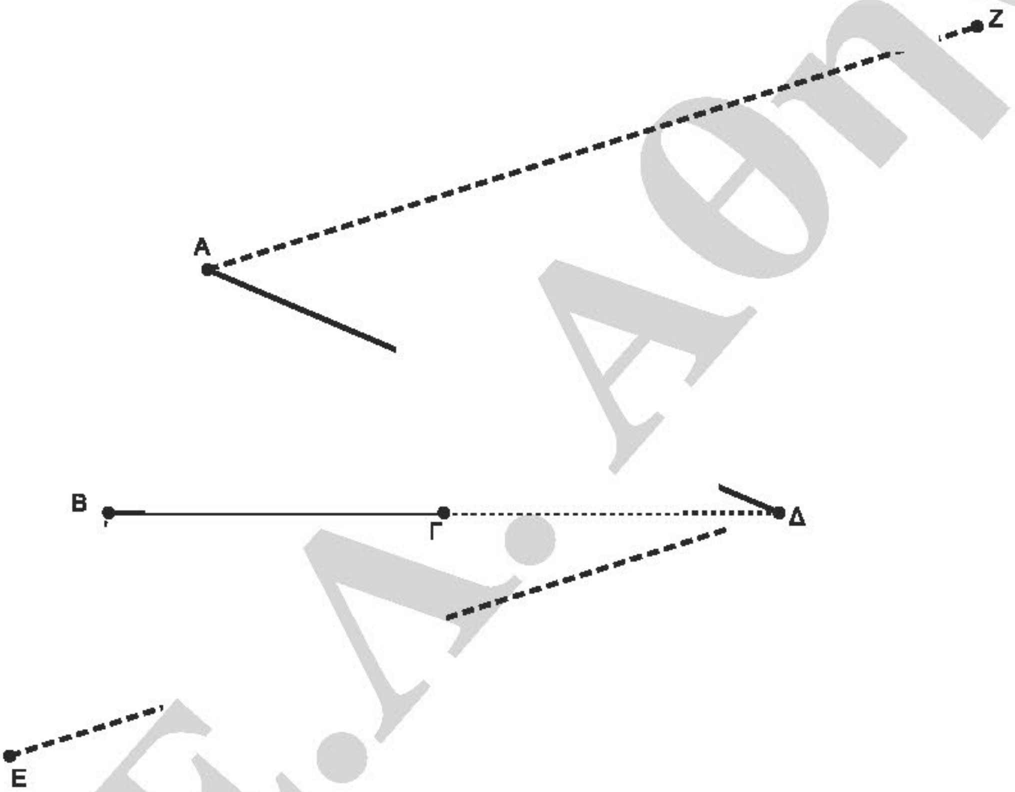
74

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ=ΒΓ και την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΑΒ.

α) Αν (ΑΒΓ)= 25 m^2, να αποδείξετε ότι (ΒΔΕ)=50 m^2. (Μονάδες 10)

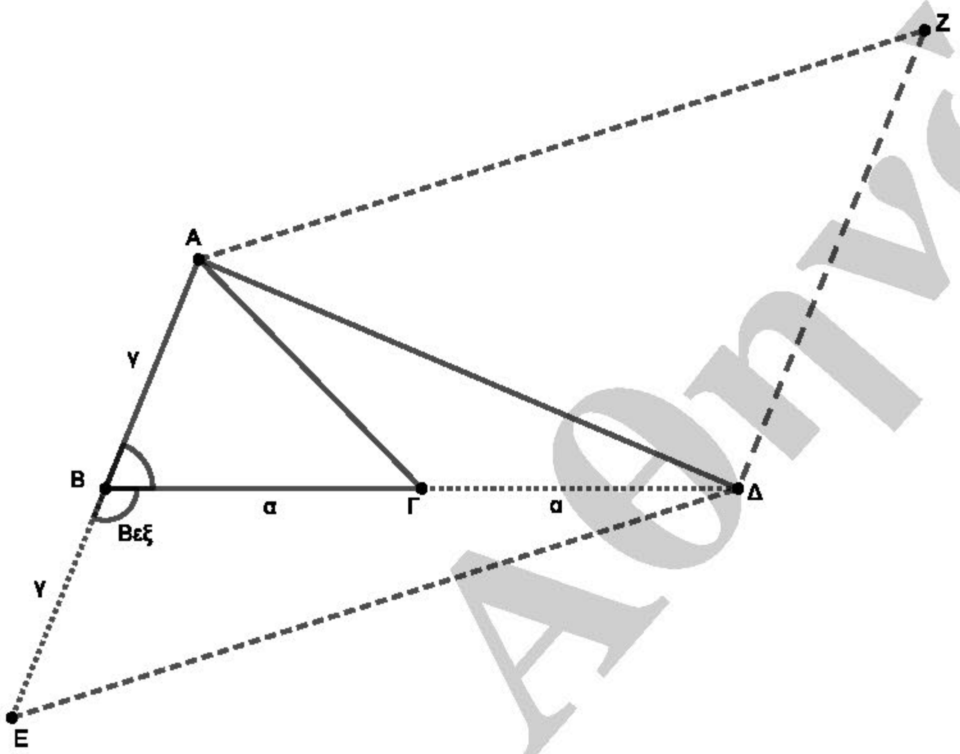
β) Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΕΔ και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην ΕΑ που τέμνονται στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΔ είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)



74 α

ΛΥΣΗ

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΒΓ) = 25 m^2 στο οποίο έχουμε προεκτείνει την πλευρά α = ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ = α και την πλευρά γ = ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = γ.



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ έχουν $\widehat{B} + \widehat{B}_{\varepsilon\xi} = 180^{o}$, άρα ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή $\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{B\Delta E})} = \frac{\gamma\cdot\alpha}{\gamma\cdot 2\alpha} = \frac{1}{2}$, άρα (ΒΔΕ) = 2·(ΑΒΓ) ή (ΒΔΕ) = 50 m^2.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ το τμήμα ΑΓ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοδύναμα, δηλαδή (ΑΓΔ) = (ΑΒΓ). Η διαγώνιος ΑΔ χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα τρίγωνα, τα ΑΖΔ και ΑΕΔ, οπότε αυτά είναι ισοδύναμα, δηλαδή (ΑΔΖ) = (ΑΕΔ).

Επομένως (ΑΖΔ) = (ΑΕΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) + (ΒΔΕ) = 4(ΑΒΓ).

75

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $ΑΔ = \frac{1}{2}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{2}{5}ΑΓ$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$.

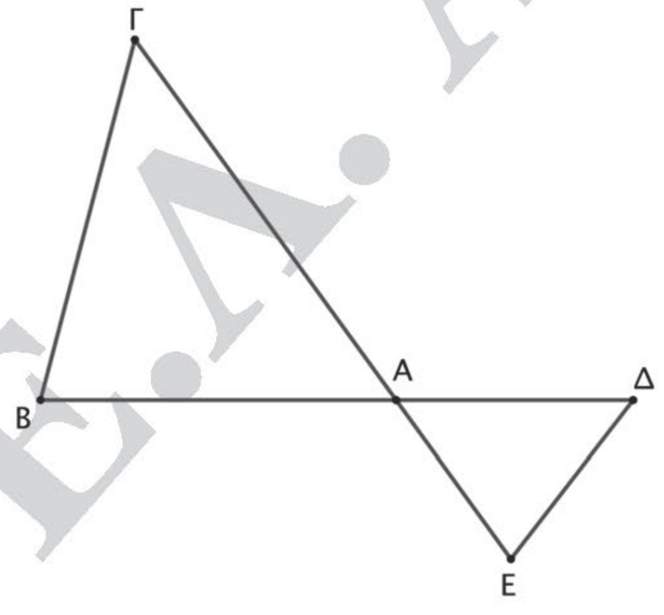
(Μονάδες 10)

β) Αν είναι $ΑΔ = \frac{1}{λ}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{λ}{μ}ΑΓ$, όπου λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ.

(Μονάδες 10)

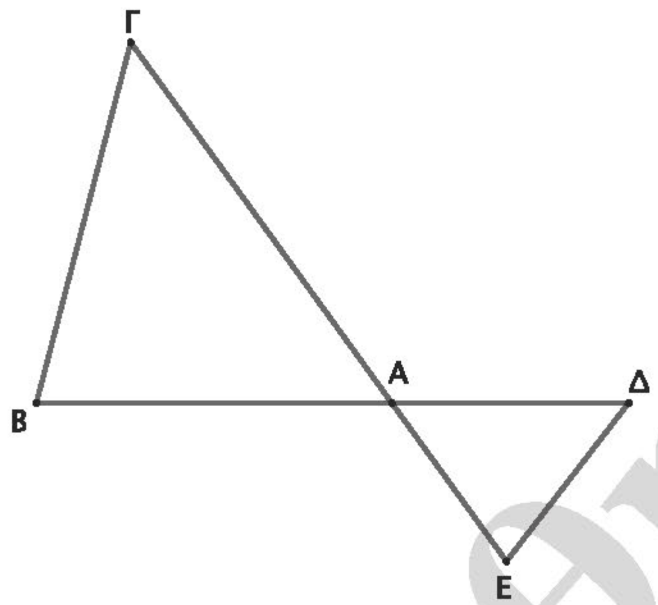
γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι (ΑΔΕ) = (ΑΒΓ)». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



75 α

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\Delta\hat{A}E = B\hat{A}\Gamma$ (ως κατακορυφήν), οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές, δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot \frac{2}{5}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

β) Εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε σε αυτή την περίπτωση:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{\lambda}AB \cdot \frac{\lambda}{\mu}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

Επομένως, ο ζητούμενος λόγος είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ.

γ) Αφού είναι (ΑΔΕ) = (ΑΒΓ), τότε από την ισότητα

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{\mu}$$

προκύπτει ότι

$$1 = \frac{1}{\mu} \quad \text{ή} \quad \mu = 1$$

Άρα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ισεμβαδικά για $\mu = 1$ και για οποιαδήποτε τιμή του λ, αφού, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (β), ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ. Επομένως, υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ, για τα οποία είναι (ΑΔΕ) = (ΑΒΓ). Τα ζεύγη αυτά είναι της μορφής $\{(\lambda, 1), \lambda \in N^*\}$ Άρα, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

76

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή με $ΑΓ = ΒΓ = 3$ και $ΑΒ = ΑΔ = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $B\hat{A}Γ$ είναι ίσες.

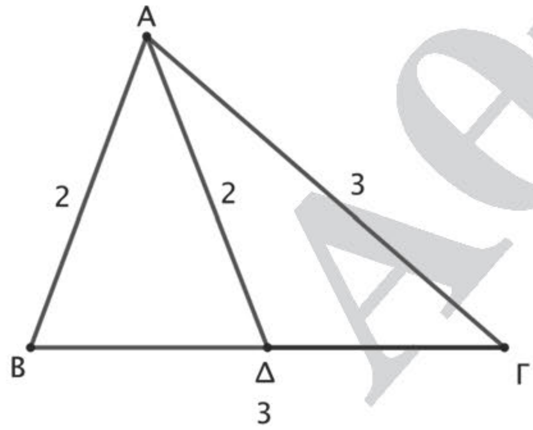
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

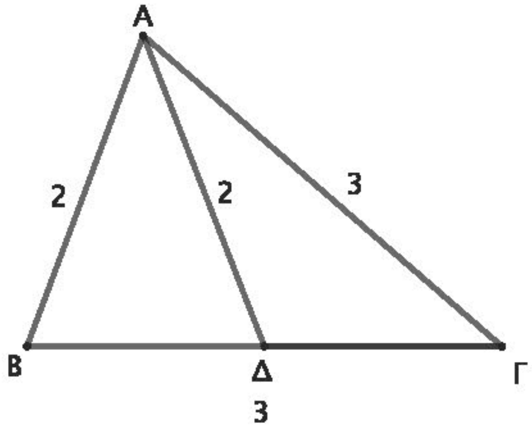
γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΒΔΑ)}$ των εμβαδών των δύο τριγώνων.

(Μονάδες 8)



76 α

ΛΥΣΗ



α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΓ = ΒΓ$. Άρα, οι γωνίες $\hat{B}$ και $B\hat{A}\Gamma$ θα είναι ίσες, ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι ισοσκελή και έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, αφού $B\hat{A}\Gamma = \hat{B}$ (η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι προσκείμενη στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς ΑΒΓ και η γωνία $\hat{B}$ είναι προσκείμενη στη βάση ΒΔ του ισοσκελούς ΑΒΔ).
Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Ο λόγος ομοιότητας λ των δύο τριγώνων ισούται με τον λόγο των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $\hat{B}$ αντίστοιχα, δηλαδή είναι

$$\frac{B\Gamma}{A\Delta} = \frac{3}{2}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)} = \left(\frac{B\Gamma}{A\Delta}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

77

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος ΒΓ. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Η παράλληλη στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη στην ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Θεωρούμε Κ και Λ τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

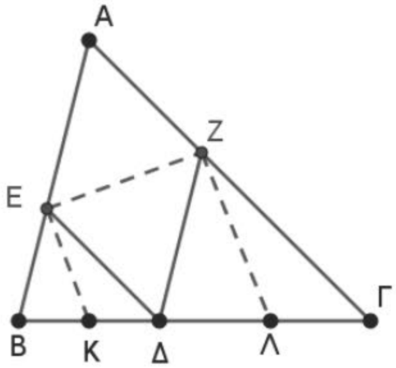
α) $(\text{ΕΚΔ})=\dfrac{(\text{ΒΕΔ})}{2}$ (Μονάδες 09)

β) $(\text{ΕΖΔ})=\dfrac{(\text{ΑΕΔΖ})}{2}$ (Μονάδες 09)

γ) Το εμβαδόν του ΚΕΖΛ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ. (Μονάδες 07)

77α

ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο ΒΕΔ, η ΕΚ είναι διάμεσος, οπότε τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΕΚΔ έχουν ίσες βάσεις ΒΚ και ΚΔ και κοινό ύψος από το Ε. Επομένως τα εμβαδά τους θα είναι ίσα, δηλαδή (ΒΕΚ) = (ΕΚΔ).

Άρα $(\mathrm{EK}\Delta)=\dfrac{(\mathrm{BE}\Delta)}{2}$ (1).

β) Το ΑΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, αφού ΔΖ//ΑΕ και ΔΕ//ΑΖ. Η διαγώνιος ΕΖ του παραλληλογράμμου ΑΕΔΖ το χωρίζει σε δύο ίσα άρα και ισοδύναμα τρίγωνα, δηλαδή (ΕΖΔ) = (ΑΕΖ).

Επομένως, $(\mathrm{EZ}\Delta)=\dfrac{(\mathrm{AE}\Delta\mathrm{Z})}{2}$ (2).

γ) Στο τρίγωνο ΔΖΓ, η ΖΛ είναι διάμεσος, οπότε τα τρίγωνα ΔΖΛ και ΓΖΛ έχουν ίσες βάσεις ΔΛ και ΓΛ και κοινό ύψος από το Ζ. Επομένως τα εμβαδά τους θα είναι ίσα, δηλαδή (ΔΖΛ) = (ΓΖΛ).

Άρα $(\Delta\mathrm{Z}\Lambda)=\dfrac{(\Delta\mathrm{Z}\Gamma)}{2}$ (3).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) ,(3) έχουμε:

$$(\mathrm{EK}\Delta)+(\mathrm{EZ}\Delta)+(\Delta\mathrm{Z}\Lambda)=\frac{(\mathrm{BE}\Delta)}{2}+\frac{(\mathrm{AE}\Delta\mathrm{Z})}{2}+\frac{(\Delta\mathrm{Z}\Gamma)}{2}$$

Άρα:

$$(\mathrm{KEZ}\Lambda)=\frac{(\mathrm{BE}\Delta)+(\mathrm{AE}\Delta\mathrm{Z})+(\Delta\mathrm{Z}\Gamma)}{2}=\frac{(\mathrm{AB}\Gamma)}{2}$$

Επομένως, το εμβαδόν του ΚΕΖΛ θα ισούται με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου Δ πάνω στη ΒΓ.

78

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Με πλευρές τις ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ, τα τετράγωνα ΑΒΗΖ, ΑΓΘΙ, ΒΓΡΔ. Έστω Ε, E_1, E_2, τα εμβαδά των τετραγώνων ΑΓΘΙ, ΑΒΗΖ, ΒΓΡΔ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $E_1 = 4E$, $E_2 = 5E$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α.

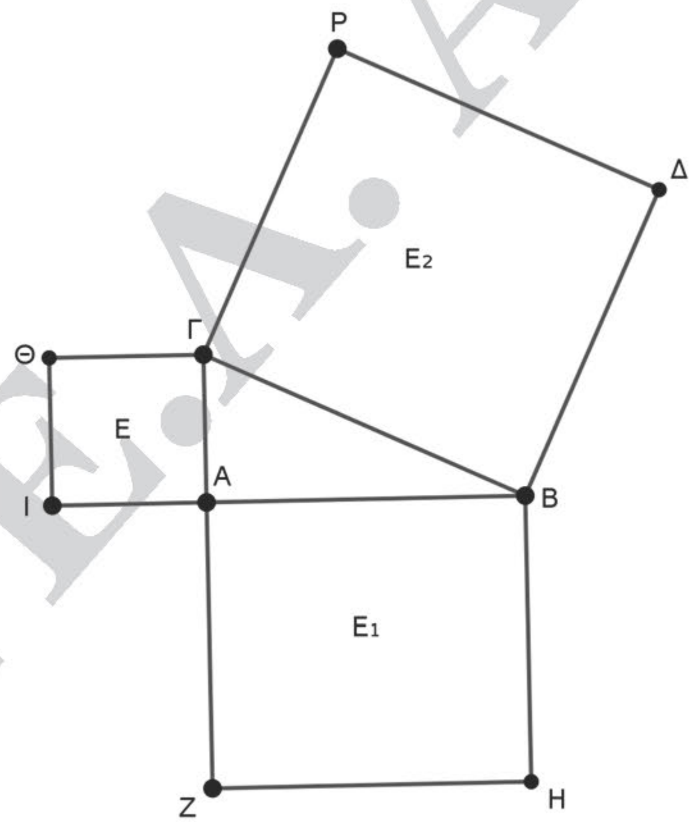
(Μονάδες 9)

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΙΖ, ΒΗΔ, ΓΡΘ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) αν η ΑΓ=1 να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου ΖΗΔΡΘΙ.

(Μονάδες 7)



78 α

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα έχουμε: (ΑΓΘΙ) = Ε, (ΑΒΗΖ) = $Ε_1$, (ΒΓΡΔ) = $Ε_2$ και ισχύουν:

$Ε_1=4Ε$ (1), $Ε_2=5Ε$ (2).

α) Θέτουμε ΒΓ = α, ΑΓ = β, ΑΒ = γ, τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

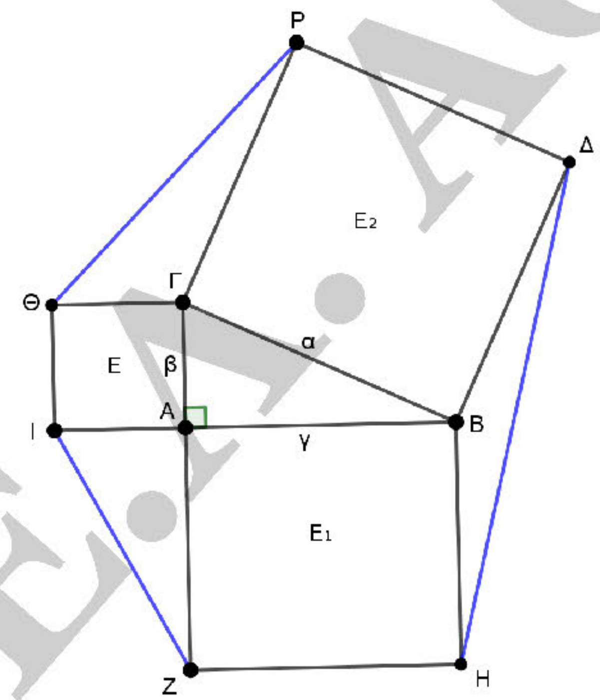
$Ε = β^2$ (3), $Ε_1 = γ^2$ (4) και $Ε_2 = α^2$ (5).

Οι (1), (2) λόγω των (3), (4), (5) γράφονται:

- $γ^2 = 4\,β^2$ ή $β^2 + γ^2 = β^2 + 4\,β^2$ ή $β^2 + γ^2 = 5β^2$
- $α^2 = 5\,β^2$

Οι τελευταίες δύο ισότητες έχουν τα δεύτερα μέλη τους ίσα, οπότε θα είναι και $β^2 + γ^2 = α^2$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, με υποτείνουσα την πλευρά α, άρα ορθή γωνία την Α.

β)



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές β και γ, άρα (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ β·γ.

Το τρίγωνο ΑΙΖ, είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές β, γ, άρα (ΑΙΖ) = $\frac{1}{2}$ β·γ.

Άρα (ΑΒΓ) =(ΑΙΖ).

Λόγω των τετραγώνων, για τις γωνίες με κορυφή το Β έχουμε:

$Η\hat{Β}Δ + Δ\hat{Β}Γ + Α\hat{Β}Γ + Α\hat{Β}Η = 360^0$ ή $Η\hat{Β}Δ + 90^o + Α\hat{Β}Γ + 90^o = 360^0$ ή $Η\hat{Β}Δ + Α\hat{Β}Γ = 180^0$.

Δηλαδή οι γωνίες ΗΒΔ και ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές. Άρα ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΒΗΔ, ΑΒΓ θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις παραπληρωματικές γωνίες. Δηλαδή $\frac{(\mathrm{ΒΗΔ})}{(\mathrm{ΑΒΓ})} = \frac{\mathrm{ΒΗ}\cdot\mathrm{ΒΔ}}{\mathrm{ΒΓ}\cdot\mathrm{ΒΑ}} = \frac{\gamma\cdot\alpha}{\alpha\cdot\gamma} = 1$, οπότε

$\frac{(\mathrm{ΒΗΔ})}{(\mathrm{ΑΒΓ})} = 1$, άρα (ΒΗΔ) = (ΑΒΓ).

Όμοια, για τις γωνίες με κορυφή το Γ έχουμε:

$\Theta\hat{\Gamma}P + \Theta\hat{\Gamma}A + A\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}P = 360^0$ ή $\Theta\hat{\Gamma}P + 90^o + A\hat{\Gamma}B + 90^o = 360^0$ ή $\Theta\hat{\Gamma}P + A\hat{\Gamma}B = 180^0$.

Δηλαδή οι γωνίες ΘΓΡ και ΑΓΒ είναι παραπληρωματικές. Άρα ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΓΡΘ, ΑΒΓ θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις παραπληρωματικές γωνίες. Δηλαδή $\frac{(\mathrm{ΓΡΘ})}{(\mathrm{ΑΒΓ})} = \frac{\mathrm{ΓΡ}\cdot\mathrm{ΓΘ}}{\mathrm{ΓΑ}\cdot\mathrm{ΓΒ}} = \frac{\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\alpha} = 1$, οπότε

$\frac{(\mathrm{ΓΡΘ})}{(\mathrm{ΑΒΓ})} = 1$, άρα (ΓΡΘ) = (ΑΒΓ).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι: (ΑΒΓ) = (ΑΙΖ) = (ΒΗΔ) = (ΓΡΘ).

γ) Είναι ΑΓ = 1 ή β = 1, οπότε από τις ισότητες του ερωτήματος (α):

$\alpha^2 = 5\ \beta^2$ και $\gamma^2 = 4\ \beta^2$, παίρνουμε: $\alpha^2 = 5$ και $\gamma^2 = 4$, άρα $\alpha = \sqrt{5}$ και $\gamma = 2$.

Έτσι λόγω του ερωτήματος (β), είναι: (ΑΙΖ) = (ΒΗΔ) = (ΓΡΘ) = (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}\ \beta\cdot\gamma = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$.

Επίσης $E = \beta^2$, $E_1 = \gamma^2$ και $E_2 = \alpha^2$ ή $E = 1$, $E_1 = 4$ και $E_2 = 5$. Οπότε:

(ΖΗΔΡΘΙ) = $E + E_1 + E_2$ + (ΑΙΖ) + (ΒΗΔ) + (ΓΡΘ) + (ΑΒΓ) = 1 + 4 + 5 + 1 +1 + 1 +1 = 14.

79

ΘΕΜΑ 4

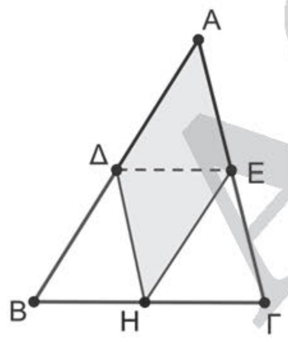
Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Έστω ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)

ii. Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ και του τριγώνου ΑΒΓ; (Μονάδες 06)



79 α

ΛΥΣΗ

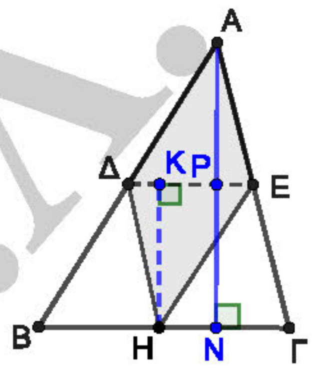
α) i. Εφόσον $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$, τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία ίση (είναι η κοινή γωνία $\hat{A}$). Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{1}{2}$.

Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Άρα το εμβαδόν του ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του ΑΒΓ.

ii. <u>α΄ τρόπος</u>: Επειδή καθένας από τους λόγους $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ και $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τα Δ και Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα η ΔΕ είναι παράλληλη με τη ΒΓ.

Σχεδιάζουμε τα ύψη:

- ΑΝ του ΑΒΓ από την κορυφή Α και
- ΗΚ του ΗΕΔ από την κορυφή Η.



Ονομάζουμε Ρ το σημείο που το ΑΝ τέμνει το ΔΕ. Τότε το ΑΡ είναι κάθετο στη ΔΕ, αφού το ΑΝ είναι κάθετο στη ΒΓ η οποία είναι παράλληλη στο ΔΕ. Άρα το ΑΡ είναι ύψος του τριγώνου ΑΔΕ από την κορυφή Α.

Λόγω ομοιότητας των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ τα ύψη που αντιστοιχούν σε ομόλογες πλευρές είναι ανάλογα με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$, δηλαδή τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων.

Άρα $\frac{ΑΡ}{ΑΝ}=\frac{1}{2}$ ή $ΑΡ=\frac{ΑΝ}{2}$. Επομένως $ΡΝ=\frac{ΑΝ}{2}=ΑΡ$.

Όμως $ΗΚ=ΡΝ$, ως ευθύγραμμα τμήματα που είναι κάθετα στις παράλληλες ευθείες ΔΕ και ΒΓ, στις οποίες βρίσκονται τα άκρα τους. Άρα $ΗΚ=ΑΡ$.

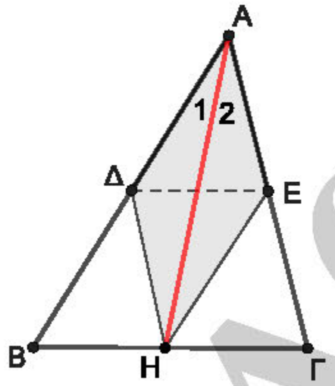
Επομένως τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΗΕΔ έχουν κοινή βάση τη ΔΕ και ίσα ύψη, τα ΑΡ και ΗΚ, άρα έχουν ίσα εμβαδά. Δηλαδή $(ΑΔΕ)=(ΗΕΔ)$.

Το εμβαδόν του ΑΔΗΕ είναι ίσο με $(ΑΔΗΕ)=(ΑΔΕ)+(ΗΕΔ)=2(ΑΔΕ)$.

Όμως από το ερώτημα α)i $(ΑΔΕ)=\frac{(ΑΒΓ)}{4}$. Άρα $(ΑΔΗΕ)=2\cdot\frac{(ΑΒΓ)}{4}=\frac{(ΑΒΓ)}{2}$.

Δηλαδή το εμβαδόν του ΑΔΗΕ είναι το μισό του εμβαδού του ΑΒΓ.

<u>β΄ τρόπος</u>: Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.



Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία την $\hat{A}_1$, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{A}_1$.

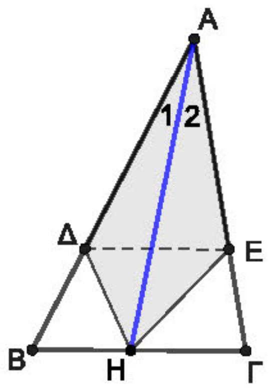
Δηλαδή $\frac{(ΑΗΔ)}{(ΑΗΒ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΑΗ}{ΑΒ\cdot ΑΗ}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{1}{2}$ ή $(ΑΗΔ)=\frac{1}{2}\cdot(ΑΗΒ)$.

Με όμοιο συλλογισμό και κοινή γωνία την $\hat{A}_2$, για τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουμε ότι

$(ΑΗΕ)=\frac{1}{2}\cdot(ΑΗΓ)$.

Επομένως $(ΑΔΗΕ)=(ΑΗΔ)+(ΑΗΕ)=\frac{1}{2}\cdot(ΑΗΒ)+\frac{1}{2}\cdot(ΑΗΓ)=\frac{1}{2}\cdot\left[(ΑΗΒ)+(ΑΗΓ)\right]=\frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓ)$.

β) Αν είναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\lambda$, τότε $0<\lambda<1$, γιατί το $ΑΔ<ΑΒ$.



Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.

Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία την $\hat{A}_1$, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{A}_1$.

Δηλαδή $\frac{(ΑΗΔ)}{(ΑΗΒ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΗ}{ΑΒ \cdot ΑΗ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \lambda$ ή $(ΑΗΔ) = \lambda \cdot (ΑΗΒ)$.

Με όμοιο συλλογισμό, για τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουμε ότι:

$$\frac{(ΑΗΕ)}{(ΑΗΓ)} = \frac{ΑΕ \cdot ΑΗ}{ΑΓ \cdot ΑΗ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \lambda \text{ ή } (ΑΗΕ) = \lambda \cdot (ΑΗΓ)$$

Επομένως $(ΑΔΗΕ) = (ΑΗΔ) + (ΑΗΕ) = \lambda \cdot (ΑΗΒ) + \lambda \cdot (ΑΗΓ) = \lambda \cdot \left[(ΑΗΒ) + (ΑΗΓ)\right] = \lambda \cdot (ΑΒΓ)$.

80

ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε

$$\Delta B = \frac{1}{5}AB,\ E\Gamma = \frac{1}{4}B\Gamma,\ Z\Gamma = \frac{1}{2}A\Gamma$$

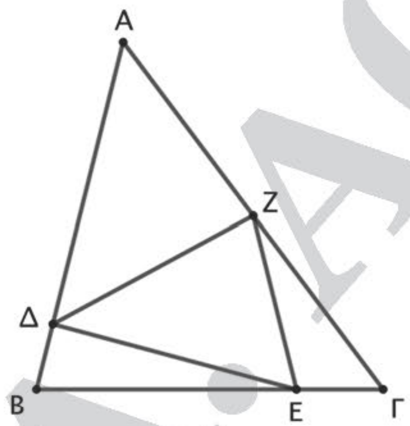
α) Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)},\frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)},\frac{(ZA\Delta)}{(AB\Gamma)}$$

(Μονάδες 15)

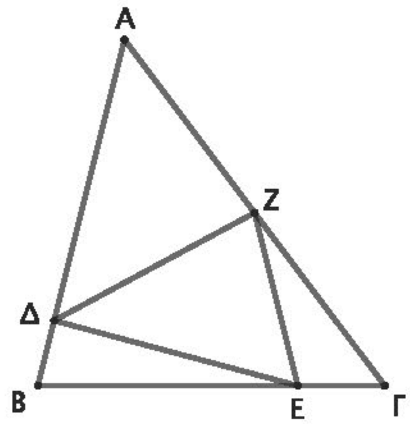
β) Αν είναι $(AB\Gamma) = 120$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ.

(Μονάδες 10)



80

ΛΥΣΗ



α) Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$\Delta B = \frac{1}{5}AB, \text{ οπότε } A\Delta = \frac{4}{5}AB$$

$$E\Gamma = \frac{1}{4}B\Gamma, \text{ οπότε } BE = \frac{3}{4}B\Gamma$$

$$Z\Gamma = \frac{1}{2}A\Gamma, \text{ οπότε } AZ = \frac{1}{2}A\Gamma$$

Τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{B}$. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{B}$ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta B \cdot BE}{AB \cdot B\Gamma} \text{ ή } \frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{1}{5}AB\frac{3}{4}B\Gamma}{AB \cdot B\Gamma} \text{ ή } \frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)} = \frac{3}{20}$$

Τα τρίγωνα ΕΓΖ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{\Gamma}$. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{\Gamma}$ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{E\Gamma \cdot Z\Gamma}{B\Gamma \cdot A\Gamma} \text{ ή } \frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{1}{4}B\Gamma\frac{1}{2}A\Gamma}{B\Gamma \cdot A\Gamma} \text{ ή } \frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{8}$$

Τα τρίγωνα ΖΑΔ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{A}$. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{A}$ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(ZA\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AZ}{AB \cdot A\Gamma} \text{ ή } \frac{(ZA\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{4}{5}AB\frac{1}{2}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} \text{ ή } \frac{(ZA\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

β) Από το σχήμα έχουμε ότι:

$$(ΑΒΓ) = (ΔΒΕ) + (ΕΓΖ) + (ΖΑΔ) + (ΔΕΖ)$$

Από το προηγούμενο ερώτημα είναι:

$$(ΔΒΕ) = \frac{3}{20}(ΑΒΓ) = \frac{3}{20} \cdot 120 = 18$$

$$(ΕΓΖ) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ) = \frac{1}{8} \cdot 120 = 15$$

$$(ΖΑΔ) = \frac{4}{10}(ΑΒΓ) = \frac{2}{5} \cdot 120 = 48$$

Οπότε:

$$(ΑΒΓ) = 18 + 15 + 48 + (ΔΕΖ) \quad ή \quad (ΔΕΖ) = 39$$

81

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ μέσο της ΑΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ παράλληλη στην ΒΓ και ίση με το μισό της ΑΒ όπως στο σχήμα.

α)

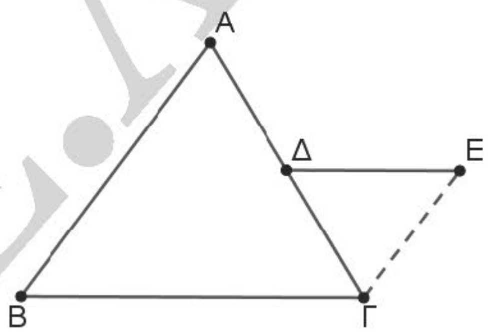
i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{(\Delta E \Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$. (Μονάδες 10)

ii. Αν το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι (ΔΕΓ) = (ΑΒΔ).

(Μονάδες 10)

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(\Delta E \Gamma)}{(AB\Gamma)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους $\widehat{\Delta}, \widehat{\Gamma}$ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. $\frac{(\Delta E \Gamma)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{\Delta E}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$». Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

(Μονάδες 05)

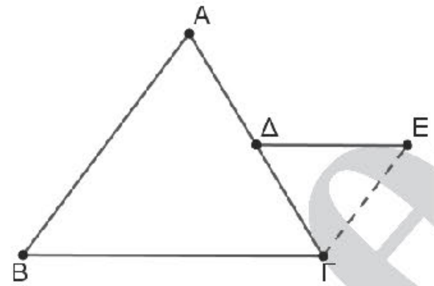


81 α

ΛΥΣΗ

α)

i. Τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΑΒΓ έχουν τις γωνίες τους $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}$, γιατί είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές: $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{\Delta E\cdot\Delta\Gamma}{A\Gamma\cdot B\Gamma}=\frac{\Delta E\cdot\Delta\Gamma}{2\Delta\Gamma\cdot B\Gamma}=\frac{\Delta E}{2B\Gamma}$ (1), γιατί από υπόθεση ΑΓ = 2ΔΓ.

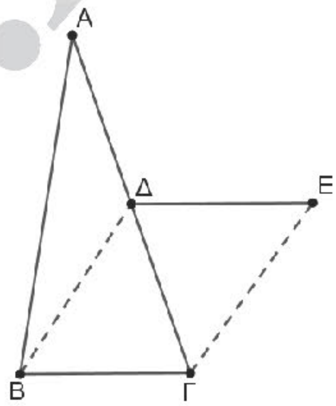


ii. Αν ΔΕΓΒ παραλληλόγραμμο, τότε ΔΕ = ΒΓ. Επομένως η (1) γίνεται $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{\Delta E}{2B\Gamma}=\frac{B\Gamma}{2B\Gamma}=\frac{1}{2}$ (2)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΒΔ χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τα ΑΒΔ και ΒΔΓ. Επομένως το καθένα από αυτά θα έχει το μισό εμβαδόν του ΑΒΓ.

$\frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{2}$ (3) .

Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι (ΔΕΓ) = (ΑΒΔ).



β) Ο μαθητής για να αποδείξει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια χρησιμοποιεί το επιχείρημα ότι έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μια και τις γωνίες $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ ίσες. Για να εξασφαλίσουμε όμως την ομοιότητα από το κριτήριο θα έπρεπε οι γωνίες να είναι οι περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών, πράγμα το οποίο εδώ δεν συμβαίνει. Οι περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές ΔΕ, ΔΓ και ΑΒ, ΑΓ είναι οι $\widehat{\Delta}$ και $\widehat{A}$.

82

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία $x\widehat{O}\psi$ και η διχοτόμος της Οδ. Πάνω στην Οδ παίρνουμε τυχαία σημεία Α και Β. Θεωρούμε σημείο Ε στην πλευρά Οx τέτοιο ώστε $O\hat{E}B = 70^o$ και σημείο Δ στην Οψ τέτοιο ώστε $O\widehat{\Delta}A=70^o$.

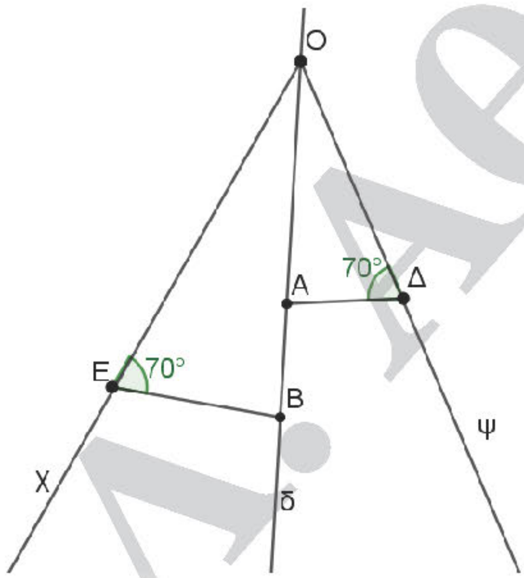
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) Αν $\frac{OA}{OB}=\frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.

(Μονάδες 06)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΕΒ.

(Μονάδες 09)



82 α

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ έχουν:

$E\hat{O}B = \Delta\hat{O}A$, επειδή η ΟΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{O}\Delta$.

$\hat{E} = \hat{\Delta} = 70^\circ$.

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μια προς μια αντίστοιχα.

β) Αφού τα δύο τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

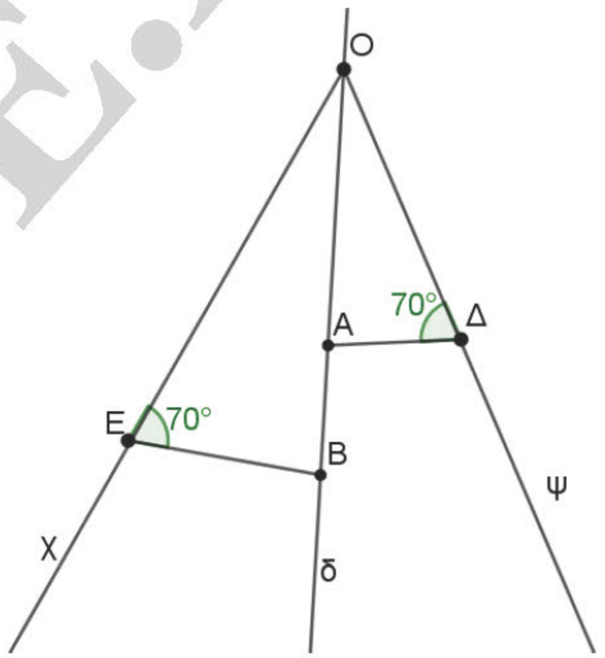
	Ίσες γωνίες		
	$\hat{E} = \hat{\Delta}$	$E\hat{O}B = \Delta\hat{O}A$	$\hat{B} = \hat{A}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΕΒ	ΟΒ	ΕΒ	ΟΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΔΑ	ΟΑ	ΑΔ	ΟΔ

Επομένως, θα είναι:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{EB}{A\Delta} = \frac{OE}{O\Delta}$$

γ) Τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή: $\frac{(OEB)}{(O\Delta A)} = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2$.

Άρα $\frac{(OEB)}{28} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, δηλαδή $(OEB) = \frac{9}{4}28 = 63$ τ.μ.



83

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ.

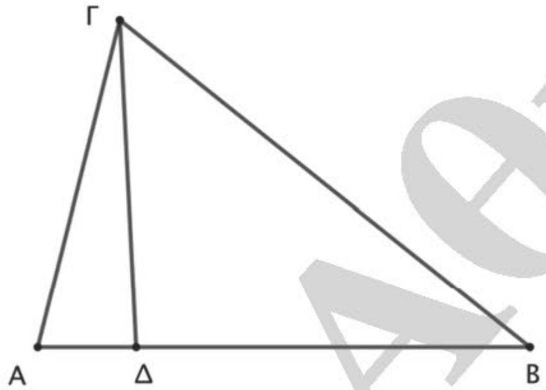
α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΒΓ)} = \frac{ΑΒ}{ΔΒ}$$

(Μονάδες 15)

β) Αν (ΑΒΓ) = 25 και ΑΒ = 5ΑΔ, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ.

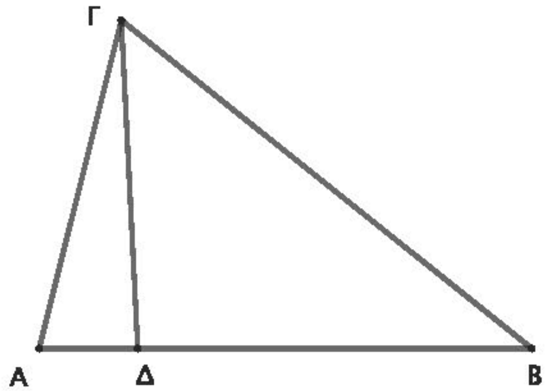
(Μονάδες 10)



83 α

ΛΥΣΗ

α)



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{B}$. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{B}$ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΔΒΓ})} = \frac{\text{ΑΒ.ΒΓ}}{\text{ΔΒ.ΒΓ}} \text{ ή } \frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΔΒΓ})} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΒ}}$$

β) Αφού είναι $\text{ΑΒ} = 5\text{ΑΔ}$, τότε:

$$\text{ΔΒ} = \text{ΑΒ} - \text{ΑΔ} = 5\text{ΑΔ} - \text{ΑΔ} = 4\text{ΑΔ}$$

Οπότε, είναι:

$$\frac{25}{(\text{ΔΒΓ})} = \frac{5\text{ΑΔ}}{4\text{ΑΔ}} \text{ ή } \frac{25}{(\text{ΔΒΓ})} = \frac{5}{4} \text{ ή } (\text{ΔΒΓ}) = \frac{25 \cdot 4}{5}$$

Άρα, $(\text{ΔΒΓ}) = 20$.

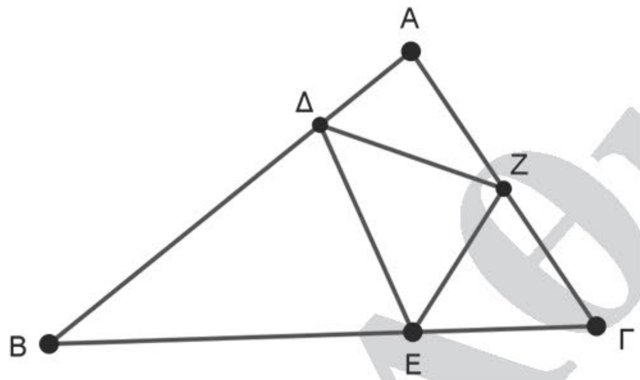
84

ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε: $ΑΔ=\frac{1}{4}ΑΒ$, $ΒΕ=\frac{2}{3}ΒΓ$ και $ΓΖ=\frac{1}{2}ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(ΑΔΖ) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ)$, $(ΒΕΔ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$, $(ΓΕΖ) = \frac{1}{6}(ΑΒΓ)$. (Μονάδες 15)

β) $(ΔΕΖ)= \frac{5}{24}(ΑΒΓ)$. (Μονάδες 10)



84 α

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΔ= $\frac{1}{4}$ΑΒ, οπότε ΒΔ= $\frac{3}{4}$ΑΒ, ΒΕ= $\frac{2}{3}$ΒΓ, άρα ΓΕ= $\frac{1}{3}$ΒΓ και

ΓΖ= $\frac{1}{2}$ΑΓ, επομένως ΑΖ = $\frac{1}{2}$ΑΓ .

α) Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Α, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Δηλαδή: $\frac{(\mathrm{A\Delta Z})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{AZ}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\frac{1}{4}\mathrm{AB}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}} = \frac{1}{8}$, οπότε (ΑΔΖ) = $\frac{1}{8}$ (ΑΒΓ).

Επίσης: $\frac{(\mathrm{BE\Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{BE}}{\mathrm{BA}\cdot\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\frac{3}{4}\mathrm{AB}\cdot\frac{2}{3}\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}} = \frac{1}{2}$, οπότε (ΒΕΔ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ).

Όμοια: $\frac{(\mathrm{\Gamma EZ})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\mathrm{\Gamma Z}\cdot\mathrm{\Gamma E}}{\mathrm{\Gamma A}\cdot\mathrm{\Gamma B}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{\Gamma A}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma A}\cdot\mathrm{\Gamma B}} = \frac{1}{6}$, οπότε (ΓΕΖ) = $\frac{1}{6}$ (ΑΒΓ).

β) Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε:

(ΔΕΖ)= (ΑΒΓ) – (ΑΔΖ) – (ΒΕΔ) – (ΓΕΖ)= (ΑΒΓ) - $\frac{1}{8}$ (ΑΒΓ) - $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ) - $\frac{1}{6}$ (ΑΒΓ) = $\frac{5}{24}$ (ΑΒΓ).

85

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε $ΓΕ = \frac{1}{4}ΓΑ$.

α) Αν Δ σημείο της ΑΒ τέτοιο ώστε $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$:

i. Να αποδείξετε ότι $(ΑΒΓ) = 4(ΑΔΕ)$ (Μονάδες 10)

ii. Αν από τα Ε και Γ φέρουμε τις κάθετες ΕΖ και ΓΗ προς την ΑΒ, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΕΖ}{ΓΗ}$ (Μονάδες 09)

β) Θεωρώντας ότι το Ε παραμένει ακίνητο, ενώ το Δ κινείται στο εσωτερικό της ΑΒ, να βρείτε σε ποιο σημείο πρέπει να βρεθεί το Δ ώστε $(ΑΒΓ) = 2(ΑΔΕ)$ (Μονάδες 06)

85 α

ΛΥΣΗ

α)

i. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν την γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ κοινή οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν την γωνία.

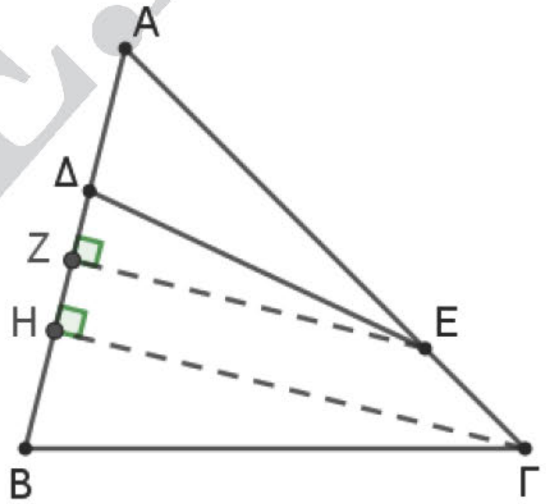
Επίσης ΓΕ = $\frac{1}{4}\mathrm{А}\Gamma$, οπότε $\mathrm{AE}=\frac{3}{4}\mathrm{A}\Gamma$.

$\frac{(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})}{(\mathrm{AB}\Gamma)}=\frac{\mathrm{A}\Delta\cdot\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A}\Gamma}=\frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A}\Gamma}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, άρα (ΑΒΓ) = 4(ΑΔΕ).

ii. Τα ΕΖ και ΓΗ είναι ύψη των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ αντίστοιχα.

$\frac{(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})}{(\mathrm{AB}\Gamma)}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{A}\Delta\cdot\mathrm{EZ}}{\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\Gamma\mathrm{H}}=\frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{EZ}}{\Gamma\mathrm{H}}=\frac{1}{3}\frac{\mathrm{EZ}}{\Gamma\mathrm{H}}$. Επειδή όμως $\frac{(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})}{(\mathrm{AB}\Gamma)}=\frac{1}{4}$ από το ερώτημα (α), θα έχουμε $\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{EZ}}{\Gamma\mathrm{H}}\Rightarrow\frac{\mathrm{EZ}}{\Gamma\mathrm{H}}=\frac{1}{4}:\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$

β) Για να ισχύει $(\mathrm{AB}\Gamma)=2(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})$ πρέπει $\frac{(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})}{(\mathrm{AB}\Gamma)}=\frac{1}{2}$. Σκεπτόμενοι ανάλογα με το πρώτο ερώτημα $\frac{(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})}{(\mathrm{AB}\Gamma)}=\frac{\mathrm{A}\Delta\cdot\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A}\Gamma}=\frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A}\Gamma}=\frac{1}{2}$ και επειδή ο λόγος $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A}\Gamma}=\frac{3}{4}$ παραμένει σταθερός θα έχουμε $\frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\Rightarrow\mathrm{A}\Delta=\frac{2}{3}\mathrm{AB}$.



86

ΘΕΜΑ 2

Ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχει πλευρά $ΒΓ = 9$ και αντίστοιχο ύψος $ΑΔ = 8$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 9)

β) Ένα άλλο τρίγωνο $Α'Β'Γ'$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $ΑΒΓ$ και η ομόλογη πλευρά της $ΒΓ$ είναι η $Β'Γ' = 6$. Να υπολογίσετε:

i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$, (Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $Α'Β'Γ'$. (Μονάδες 9)

86 α

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι

$$E = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36.$$

β) i) Ο λόγος ομοιότητας των όμοιων τριγώνων $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ είναι

$$\lambda = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

ii) Έστω E' το εμβαδόν του τριγώνου $Α'Β'Γ'$. Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, οπότε θα έχουμε

$$\frac{E}{E'} = \lambda^2 \quad ή \quad \frac{36}{E'} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad ή \quad \frac{4 \cdot 9}{E'} = \frac{9}{4} \quad ή \quad \frac{4}{E'} = \frac{1}{4} \quad ή \quad E' = 16.$$