Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

1

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

iv. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

1 α

ΛΥΣΗ

α)

i. Σωστό
ii. Λάθος
iii. Σωστό
iv. Λάθος
v. Σωστό

β) Θεώρημα ΙΙΙ σελίδα 82.

2

ΘΕΜΑ 4

Έστω ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R).

α) Να αποδείξετε ότι:

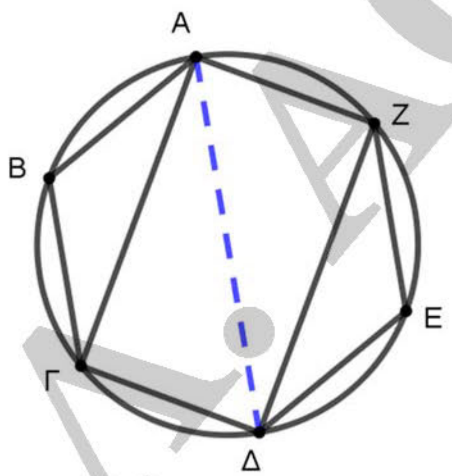
i. Η διαγώνιος ΑΔ του εξαγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 6)

ii. Οι γωνίες $\hat{ΓΑΔ}$ και $\hat{ΑΔΖ}$ είναι ίσες. (Μονάδες 3)

iii. Οι διαγώνιοί ΑΓ και ΖΔ του εξαγώνου είναι παράλληλες. (Μονάδες 3)

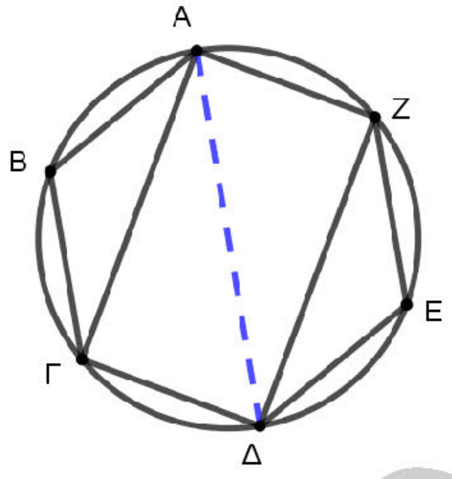
iv. Το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι σε κάθε κανονικό πολύγωνο με περισσότερες από πέντε πλευρές υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαγώνιοι που να είναι παράλληλες. Συμφωνείτε με την άποψη αυτού του μαθητή; Να αιτιολογήστε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 6)



2 α

ΛΥΣΗ



α)

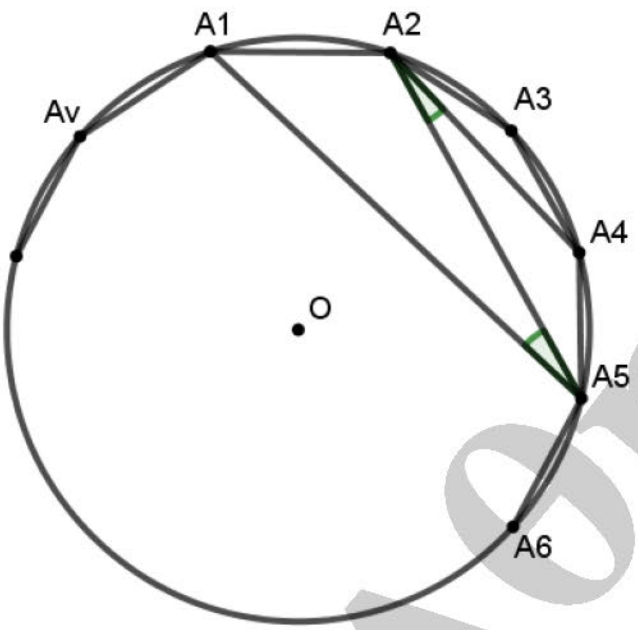
i. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60^o το καθένα. Επειδή το τόξο ΑΓΔ ισούται με $3\cdot 60^o = 180^o$, είναι ημικύκλιο και άρα η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

ii. Οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $A\hat{\Delta}Z$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα 60^o το καθένα, άρα είναι ίσες.

iii. Οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $A\hat{\Delta}Z$ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών ΑΓ και ΔΖ που τέμνονται από την ΑΔ και εφόσον, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, είναι ίσες οι ευθείς ΑΓ και ΔΖ είναι παράλληλες.

iv. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60^o το καθένα. Η γωνία Γ του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο ΔΕΑ που είναι ίσο με $3\cdot 60^o = 180^o$ και εφόσον κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει, προκύπτει ότι είναι ορθή. Για τον ίδιο λόγο και οι υπόλοιπες γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε τόξα 180^o, άρα είναι ορθές. Επομένως το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο. Η ΑΖ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R), άρα $AZ=\lambda_6=R$. Η ΑΓ είναι χορδή που αντιστοιχεί σε τόξο 120^o, άρα ισούται με την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R). Έτσι $A\Gamma=\lambda_3=R\sqrt{3}$. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι $(A\Gamma\Delta Z)=AZ\cdot A\Gamma=R\cdot R\sqrt{3}=R^2\sqrt{3}$.

β)



Έστω ένα κανονικό ν-γωνο $A_1A_2…A_ν$, (ν>5). Γνωρίζουμε ότι κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έστω (O,R) ο περιγεγραμμένος κύκλος του πολυγώνου. Δύο διαγώνιοι του πολυγώνου είναι οι A_2A_4 και A_1A_5 οι οποίες είναι χορδές του κύκλου στις οποίες περιέχονται τα τόξα A_1A_2 και A_4A_5.Το κάθε ένα από αυτά τα τόξα είναι ίσο με $\frac{360^o}{ν}$, άρα είναι ίσα. Οι γωνίες $A_4\widehat{A_2}A_5$ και $A_2\widehat{A_5}A_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα, άρα είναι ίσες, επομένως $A_2A_4//A_1A_5$ αφού σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

3

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και σημείο Μ στο εσωτερικό του. Έστω $Μ_1$, $Μ_2$, $Μ_3$, $Μ_4$, $Μ_5$ οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ΑΒΜ) = \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_1$, όπου $λ_5$ είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου.

(Μονάδες 6)

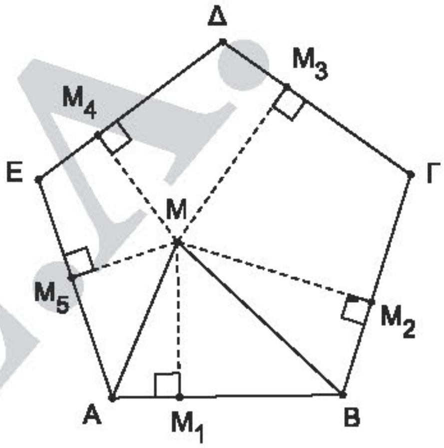
ii. $(ΑΒΓΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot (ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + ΜΜ_3 + ΜΜ_4 + ΜΜ_5)$. (Μονάδες 7)

iii. $ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + ΜΜ_3 + ΜΜ_4 + ΜΜ_5 = 5α_5$, όπου $α_5$ είναι το απόστημα του κανονικού πενταγώνου. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής διατύπωσε τον ισχυρισμό: «Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός κανονικού ν-γώνου $Α_1Α_2…Α_ν$ και $Μ_1$, $Μ_2$,…, $Μ_ν$ είναι οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές $Α_1Α_2$, $Α_2Α_3$,…,$Α_νΑ_1$ αντίστοιχα, τότε

$$ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + \cdots + ΜΜ_ν = να_ν,$$

όπου $α_ν$ είναι το απόστημα του κανονικού ν-γώνου». Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός. (Μονάδες 5)



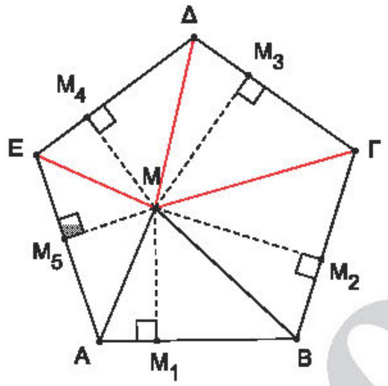
3 α

ΛΥΣΗ

α) i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ με βάση ΑΒ και αντίστοιχο ύψος το $ΜΜ_1$ είναι

$$(ΑΒΜ) = \frac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΜΜ_1 = \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_1.$$

ii. Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΓ, ΜΔ και ΜΕ.



Για το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ έχουμε:

$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΜ) + (ΒΓΜ) + (ΓΔΜ) + (ΔΕΜ) + (ΕΑΜ)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_1 + \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_2 + \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_3 + \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_4 + \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_5$$
$$= \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot (ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + ΜΜ_3 + ΜΜ_4 + ΜΜ_5) \quad (1).$$

iii. Το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι

$$(ΑΒΓΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot λ_5 \cdot α_5 \quad (2).$$

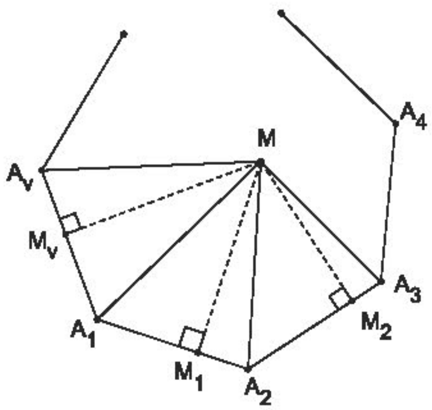
Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot (ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + ΜΜ_3 + ΜΜ_4 + ΜΜ_5) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot λ_5 \cdot α_5$$

και με απλοποίηση του $\frac{1}{2} \cdot λ_5$ προκύπτει ότι

$$ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + ΜΜ_3 + ΜΜ_4 + ΜΜ_5 = 5α_5.$$

β) Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $ΜΑ_1, ΜΑ_2, \ldots, ΜΑ_ν$.



Για το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου $A_1A_2 \ldots A_\nu$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(A_1A_2 \ldots A_\nu) &= (A_1A_2M) + (A_2A_3M) + \cdots + (A_\nu A_1M)\\ &= \frac{1}{2} \cdot \lambda_\nu \cdot MM_1 + \frac{1}{2} \cdot \lambda_\nu \cdot MM_2 + \cdots + \frac{1}{2} \cdot \lambda_\nu \cdot MM_\nu\\ &= \frac{1}{2} \cdot \lambda_\nu \cdot (MM_1 + MM_2 + \cdots + MM_\nu) \quad (3).\end{aligned}$$

Όμως το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου $A_1A_2 \ldots A_\nu$ δίνεται από τον τύπο

$$(A_1A_2 \ldots A_\nu) = \frac{1}{2} \cdot \nu \cdot \lambda_\nu \cdot \alpha_\nu \quad (4).$$

Από τις ισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} \cdot \lambda_\nu \cdot (MM_1 + MM_2 + \cdots + MM_\nu) = \frac{1}{2} \cdot \nu \cdot \lambda_\nu \cdot \alpha_\nu$$

και με απλοποίηση του $\mathbf{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_\nu$ προκύπτει ότι

$$MM_1 + MM_2 + \cdots + MM_\nu = \nu\alpha_\nu.$$

Έτσι αποδείξαμε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

4

ΘΕΜΑ 2

Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών ν_1 και ν_2 , κεντρικές γωνίες ω_1 και ω_2 και γωνίες φ_1 και φ_2 , αντίστοιχα. Αν ο λόγος του ν_1 προς το ν_2 είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων.

(Μονάδες 10)

β) Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι $\nu_1 = 5$, να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$.

(Μονάδες 15)

4 α

ΛΥΣΗ

α) Επειδή τα δύο κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών ν_1 και ν_2 έχουν λόγο ίσο με $\frac{1}{2}$, ισχύει $\frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{1}{2}$ ή $\nu_2=2\nu_1$, τότε ο λόγος των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων είναι:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\frac{360^\circ}{\nu_1}}{\frac{360^\circ}{\nu_2}}=\frac{360^\circ\cdot\nu_2}{360^\circ\cdot\nu_1}=\frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{2\nu_1}{\nu_1}=2$$

β) Επειδή $\nu_2=2\nu_1$ και $\nu_1=5$, τότε το πλήθος των πλευρών ν_2 του άλλου κανονικού πολυγώνου είναι: $\nu_2=2\nu_1=2\cdot5=10$, τότε ο λόγος των γωνιών τους $\frac{\phi_1}{\phi_2}$ είναι:

$$\frac{\phi_1}{\phi_2}=\frac{180^\circ-\frac{360^\circ}{\nu_1}}{180^\circ-\frac{360^\circ}{\nu_2}}=\frac{180^\circ-\frac{360^\circ}{5}}{180^\circ-\frac{360^\circ}{10}}=\frac{108^\circ}{144^\circ}=\frac{3}{4}$$

5

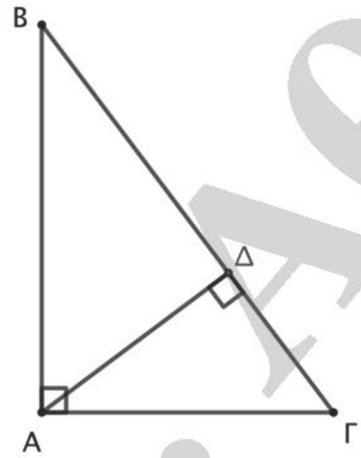
ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΓΔ.



iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

(Μονάδες 15)

5 α

ΛΥΣΗ

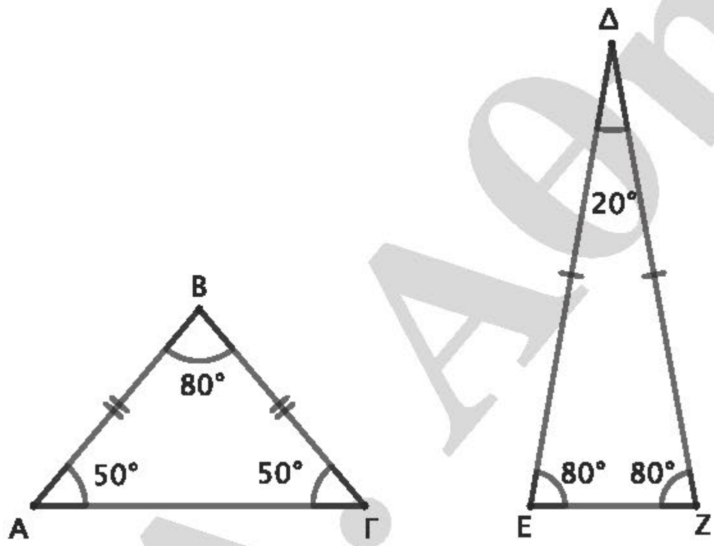
α)

i. Σωστό

Πόρισμα, σελίδα 15 σχολικό βιβλίο.

ii. Λάθος

Για παράδειγμα, τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΒΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΔΖ) του σχήματος έχουν $\hat{B} = \hat{E} = 80^o$. Ωστόσο, δεν είναι όμοια, αφού δεν έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.



iii. Λάθος

Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΒΔ.

iv. Λάθος

Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Σωστό

Θεώρημα Ι, σελίδα 91 σχολικό βιβλίο.

β) §10.3, Θεώρημα Ι (απόδειξη), σελίδα 72 σχολικό βιβλίο (Σχήμα 7).

6

ΘΕΜΑ 2

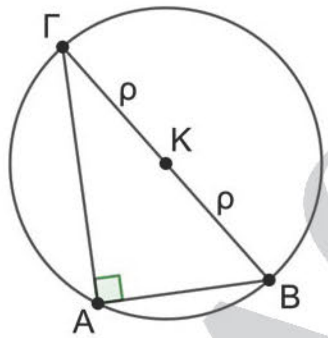
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A}$ ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το Κ και ακτίνα ρ. Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π.

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5. (Μονάδες 08)

β) Αν η χορδή ΑΒ έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής ΑΓ του κύκλου, (Μονάδες 10)

ii. το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)



6 α

ΛΥΣΗ

α) Το μήκος του κύκλου (K,ρ) είναι $L = 2\pi \cdot \rho$. Άρα, $\rho = \dfrac{L}{2\pi}$.

Εφόσον $L = 10\pi$ θα είναι $\rho = \dfrac{10\pi}{2\pi}$ ή $\rho = 5$.

β) i. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει κάθετες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ και υποτείνουσα τη ΒΓ, που είναι διάμετρος του κύκλου.

Για τη διάμετρο ΒΓ ισχύει ότι $B\Gamma = 2\rho = 10$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2$ ή $A\Gamma^2 = 100 - 36$ ή $A\Gamma^2 = 64$ ή $A\Gamma = 8$.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με $(AB\Gamma) = \dfrac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = \dfrac{48}{2} = 24$.

7

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα τρεις κυκλικοί τροχοί με ίσες ακτίνες μήκους R, έχουν τα κέντρα τους στις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β και γ. Ένας τεντωμένος ιμάντας μήκους L συνδέει τους τρεις ίσους τροχούς όπως στο σχήμα και εφάπτεται σε αυτούς στα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, Ρ, Σ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΛΜΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 4)

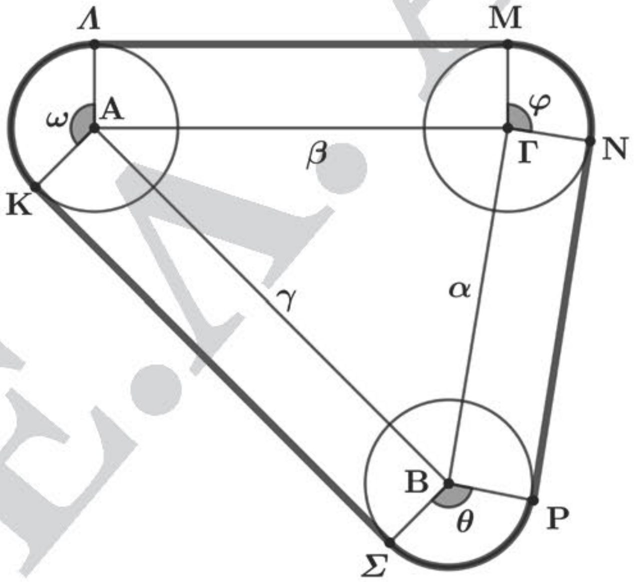
ii. Η κυρτή γωνία $\mathrm{K\widehat{A}\Lambda}$ και η γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές.

(Μονάδες 4)

β) Αν $\mathrm{K\widehat{A}\Lambda} = \widehat{\omega}$, $\Sigma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{P} = \widehat{\theta}$, $\mathrm{M}\widehat{\Gamma}\mathrm{N} = \widehat{\varphi}$, να αποδείξετε ότι $\widehat{\omega} + \widehat{\theta} + \widehat{\varphi} = 360^{o}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος του ιμάντα L είναι L = 2(τ + πR) όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



7 α

ΛΥΣΗ

α)

i. Επειδή ο ιμάντας εφάπτεται στους κυκλικούς τροχούς, οι ακτίνες ΑΛ και ΓΜ είναι ίσες και παράλληλες αφού είναι κάθετες στο ίδιο εφαπτόμενο τμήμα ΛΜ, συνεπώς το τετράπλευρο ΑΛΜΓ είναι ορθογώνιο.

ii. Για τις γωνίες με κορυφή το κέντρο Α του ενός τροχού έχουμε:

$$\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda + 90^o + \widehat{\mathrm{A}} + 90^o = 360^o \text{ ή } \mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda + \widehat{\mathrm{A}} = 180^o$$

δηλαδή η γωνία $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda$ και η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές.

β) Με βάση το α)ii. ερώτημα έχουμε:

$$\widehat{\omega} + \widehat{\mathrm{A}} = 180^o$$

Ανάλογα για τις γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$ βρίσκουμε $\widehat{\theta} + \widehat{\mathrm{B}} = 180^o$ και $\widehat{\varphi} + \widehat{\Gamma} = 180^o$.

Προσθέτοντας τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$\widehat{\omega} + \widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\theta} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\varphi} + \widehat{\Gamma} = 180^o + 180^o + 180^o \text{ ή}$$

$$\widehat{\omega} + \widehat{\theta} + \widehat{\varphi} + 180^o = 180^o + 180^o + 180^o \text{ ή}$$

$$\widehat{\omega} + \widehat{\theta} + \widehat{\varphi} = 360^o$$

γ) Με ανάλογο τρόπο, όπως για το τετράπλευρο ΑΛΜΓ του α) ι. ερωτήματος, αποδεικνύεται ότι και τα τετράπλευρα ΓΝΡΒ και ΒΣΚΑ είναι επίσης ορθογώνια, οπότε θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΝΡ = α, ΛΜ = β και ΚΣ = γ. Αν συμβολίσουμε με $\ell_{\widehat{\mathrm{K}\Lambda}}, \ell_{\widehat{\mathrm{MN}}}$ και $\ell_{\widehat{\mathrm{P}\Sigma}}$ τα μήκη των μικρότερων του ημικυκλίου τόξων $\widehat{\mathrm{K}\Lambda}, \widehat{\mathrm{MN}}$ και $\widehat{\mathrm{P}\Sigma}$ αντίστοιχα, τότε το μήκος L του ιμάντα είναι:

$$\mathrm{L} = \ell_{\widehat{\mathrm{K}\Lambda}} + \Lambda\mathrm{M} + \ell_{\widehat{\mathrm{MN}}} + \mathrm{NP} + \ell_{\widehat{\mathrm{P}\Sigma}} + \mathrm{K}\Sigma =$$

$$= \ell_{\widehat{\mathrm{K}\Lambda}} + \ell_{\widehat{\mathrm{MN}}} + \ell_{\widehat{\mathrm{P}\Sigma}} + (\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= \pi\mathrm{R}\frac{\widehat{\omega}}{180^o} + \pi\mathrm{R}\frac{\widehat{\varphi}}{180^o} + \pi\mathrm{R}\frac{\widehat{\theta}}{180^o} + 2\tau =$$

$$= \pi\mathrm{R} \cdot \frac{1}{180^o} \cdot (\widehat{\omega} + \widehat{\phi} + \widehat{\theta}) + 2\tau =$$

$$= \pi\mathrm{R} \cdot \frac{1}{180^o} \cdot 360^o + 2\tau = 2\pi\mathrm{R} + 2\tau = 2(\tau + \pi\mathrm{R})$$

8

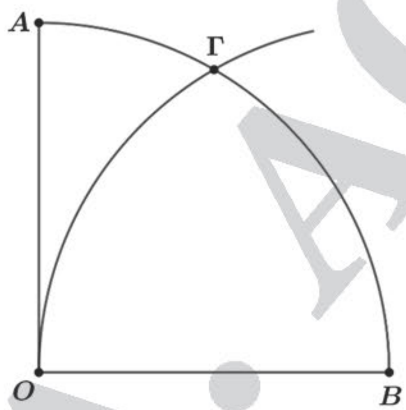
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τεταρτοκύκλιο $O\widehat{AB}$ κέντρου O και ακτίνας R. Αν ο κύκλος κέντρου B και ακτίνας R τέμνει το τόξο $\widehat{AB}$ στο σημείο Γ όπως στο σχήμα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και το μήκος $\ell_{B\Gamma}$ του τόξου $\widehat{B\Gamma}$ είναι $\ell_{\widehat{B\Gamma}}=\frac{\pi\cdot R}{3}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το μήκος του τόξου $\widehat{A\Gamma}$ είναι $\ell_{\widehat{A\Gamma}}=\frac{\pi\cdot R}{6}$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΟΑΓ που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ και τα τόξα $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{O\Gamma}$. (Μονάδες 9)



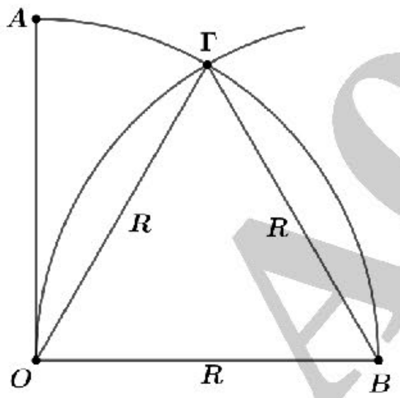
8 α

ΛΥΣΗ

α) Είναι $OB = O\Gamma = B\Gamma = R$ ως ακτίνες των ίσων κύκλων, επομένως το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο οπότε $B\hat{O}\Gamma = 60^\circ$.

Το μήκος ℓ τόξου μ° ενός κύκλου με ακτίνα R είναι $\ell = \dfrac{\pi \cdot R \cdot \mu}{180}$, άρα το μήκος του τόξου ΒΓ είναι:

$$\ell_{\widehat{B\Gamma}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 60}{180} = \frac{\pi \cdot R}{3}$$



β) Επειδή στο τεταρτοκύκλιο ΟΑΒ η γωνία $A\hat{O}B = 90^\circ$ έχουμε ότι:

$$A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}B - B\hat{O}\Gamma = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

και το μήκος $\ell_{\widehat{A\Gamma}}$ του αντίστοιχου τόξου ΑΓ της γωνίας ΑΟΓ = 30° είναι:

$$\ell_{\widehat{A\Gamma}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 30^o}{180^o} = \frac{\pi \cdot R}{6}$$

γ) Επειδή το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο, έχει ίσες γωνίες οπότε τα τόξα ΟΓ και ΒΓ είναι ίσα, ως αντίστοιχα τόξα των ίσων γωνιών $O\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{O}\Gamma$ ίσων κύκλων, συνεπώς από το (α) ερώτημα έχουμε:

$$\ell_{\widehat{O\Gamma}} = \ell_{\widehat{B\Gamma}} = \frac{\pi \cdot R}{3}$$

Η περίμετρος $T_{OA\Gamma}$ του μικτογράμμου τριγώνου ΟΑΓ είναι:

$$T_{OA\Gamma} = OA + \ell_{\widehat{A\Gamma}} + \ell_{\widehat{O\Gamma}} = R + \frac{\pi \cdot R}{6} + \frac{\pi \cdot R}{3} = R \cdot \left(1 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = R \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

9

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $R = 1$. Θεωρούμε ακτίνα ΟΓ την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα $ΓΒ = ΟΓ = R$ και το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $O\hat{B}A = 30^o$.

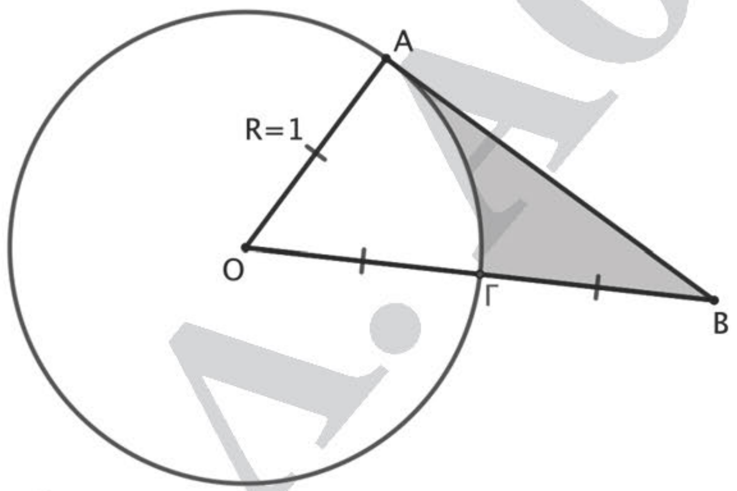
(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι $AB = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 10)

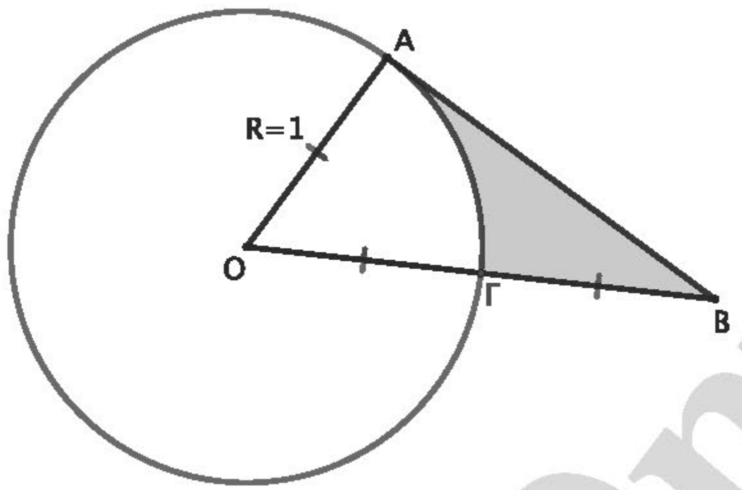
γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)



9 α

ΛΥΣΗ



α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε $BA \perp OA$. Άρα, η γωνία $O\hat{A}B$ είναι ορθή.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ η κάθετη πλευρά ΟΑ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΟΒ, οπότε η απέναντι γωνία της $O\hat{B}A$ ισούται με 30^o.

β) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε:

$$AB^2 = OB^2 - OA^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

Άρα, $AB = \sqrt{3}$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι $A\hat{O}B = 90^o - 30^o = 60^o$. Έτσι, το μήκος του τόξου $\widehat{A\Gamma}$ είναι:

$$\ell_{\widehat{A\Gamma}} = \frac{\pi R 60^o}{180^o} = \frac{\pi}{3}$$

Οπότε, η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου χωρίου ΑΒΓ είναι:

$$L = (AB) + (B\Gamma) + \ell_{\widehat{A\Gamma}} = \sqrt{3} + 1 + \frac{\pi}{3}$$

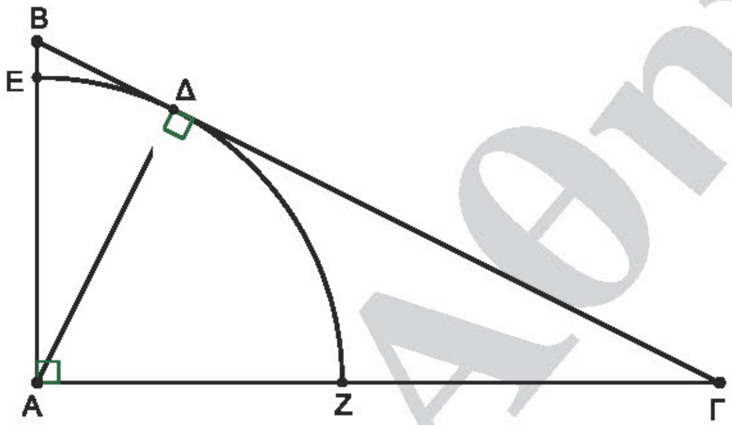
10

ΘΕΜΑ 2

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος, το Δ είναι η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$ και είναι $B\Delta = 1$ και $\Delta\Gamma = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 2$. (Μονάδες 12)

β) Με κέντρο το A και ακτίνα $A\Delta$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$, στα σημεία E και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\widehat{\mathrm{E\Delta Z}}$. (Μονάδες 13)



10 α

ΛΥΣΗ

α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα. Επομένως είναι

$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ ή $A\Delta^2 = 1 \cdot 4$ ή $A\Delta^2 = 2^2$ ή $A\Delta = 2$.

β) Το τόξο $\widehat{\mathrm{E\Delta Z}}$ είναι $\mu = 90°$ (επειδή $\hat{A} = 90°$) και είναι σε κύκλο ακτίνας $R = A\Delta = 2$. Επομένως το μήκος του είναι $l = \frac{\pi R \mu}{180°} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 90°}{180°} = \pi$.

11

ΘΕΜΑ 2

Το παρακάτω σχήμα (Σ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου AB και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται $AB = 8\ \text{cm}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

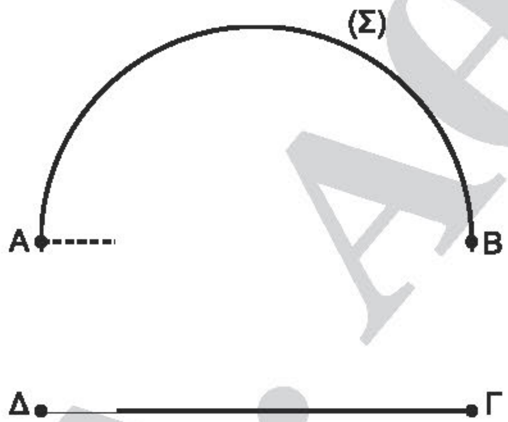
i. το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $E = 8\pi\ \ \text{cm}^2$, (Μονάδες 8)

ii. το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = 4\pi\ \ \text{cm}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. το μήκος της πλευράς ΑΔ του ορθογωνίου, (Μονάδες 5)

ii. την περίμετρο του σχήματος (Σ) . (Μονάδες 4)



11 α

ΛΥΣΗ

α) i) Επειδή η διάμετρος του ημικυκλίου είναι $AB = 8\ \mathrm{cm}$, η ακτίνα του είναι

$\rho = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4\ \mathrm{cm}$, άρα το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι

$E = \frac{1}{2} \cdot \pi\rho^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 = 8\pi\ \ \mathrm{cm}^2$.

ii) Το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\rho = \pi\rho = 4\pi\ \ \mathrm{cm}$.

β) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot A\Delta = 8 \cdot A\Delta\ \mathrm{cm}^2$.

Επειδή το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά , θα έχουμε

$(AB\Gamma\Delta) = E$ ή $8 \cdot A\Delta = 8\pi$ ή $A\Delta = \pi\ \mathrm{cm}$.

ii) Το μήκος του ημικυκλίου από το ερώτημα (α ii) είναι $L = 4\pi\ \ \mathrm{cm}$.

Στο (β i) βρήκαμε $A\Delta = \pi\ \mathrm{cm}$ και επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, είναι

$B\Gamma = A\Delta = \pi\ \mathrm{cm}$ και $\Delta\Gamma = AB = 8\ \mathrm{cm}$.

Η περίμετρος P του σχήματος (Σ) είναι

$P = L + A\Delta + \Delta\Gamma + B\Gamma$ ή $P = 4\pi + \pi + 8 + \pi = 6\pi + 8\ \ \mathrm{cm}$.

12

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ, που η κοινή κορυφή τους Α βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων (Α, ρ_1), (Α, ρ_2) και (Α, ρ_3), η κορυφή Γ βρίσκεται στον κύκλο (Α, ρ_3), οι κορυφές Β και Ε στον κύκλο (Α, ρ_2) και η κορυφή Δ στον κύκλο (Α, ρ_1), όπως στο σχήμα, με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Ονομάζουμε $E_{ΕΓ}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, ρ_2) και (Α, ρ_3), E_1 το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ_1), E_2 το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ_2) και E_3 το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ_3).

α) Αν $\frac{E_{ΕΓ}}{E_2} = \frac{7}{9}$, να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}$. (Μονάδες 07)

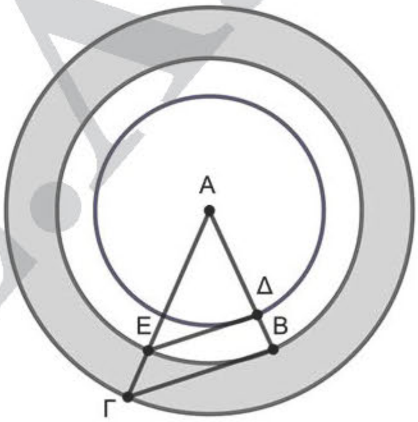
ii. $\frac{E_2}{E_3} = \frac{9}{16}$. (Μονάδες 05)

iii. Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $E_{ΕΓ} = E_2$ και επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι $E_{ΔΒ} = E_1$, όπου $E_{ΔΒ}$ είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, ρ_1) και (Α, ρ_2).

(Μονάδες 05)



12 α

ΛΥΣΗ

α) i. Για το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου ισχύει ότι $E_{ΕΓ} = E_3 - E_2$.

Επίσης $\dfrac{E_{ΕΓ}}{E_2} = \dfrac{E_3 - E_2}{E_2}$ ή $\dfrac{7}{9} = \dfrac{\pi\rho_3^{\,2} - \pi\rho_2^{\,2}}{\pi\rho_2^{\,2}}$ ή $\dfrac{7}{9} = \dfrac{\pi(\rho_3^{\,2} - \rho_2^{\,2})}{\pi\rho_2^{\,2}}$ ή $\dfrac{7}{9} = \dfrac{\rho_3^{\,2} - \rho_2^{\,2}}{\rho_2^{\,2}}$ ή

$7\rho_2^{\,2} = 9\rho_3^{\,2} - 9\rho_2^{\,2}$ ή $16\rho_2^{\,2} = 9\rho_3^{\,2}$ ή $\dfrac{\rho_2^{\,2}}{\rho_3^{\,2}} = \dfrac{9}{16}$ ή $\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_3}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$ ή $\dfrac{\rho_2}{\rho_3} = \dfrac{3}{4}$.

ii. Τα εμβαδά των κύκλων (Α, ρ_2) και (Α, ρ_3) είναι $E_2 = \pi\rho_2^{\,2}$ και $E_3 = \pi\rho_3^{\,2}$, αντίστοιχα.

Άρα $\dfrac{E_2}{E_3} = \dfrac{\pi\rho_2^{\,2}}{\pi\rho_3^{\,2}} = \dfrac{\rho_2^{\,2}}{\rho_3^{\,2}} = \left(\dfrac{\rho_2}{\rho_3}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$.

iii. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την παράλληλη ΔΕ στην πλευρά του ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ} \text{ ή } \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$$

Άρα, από την απάντηση στο α) i έχουμε $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{3}{4}$.

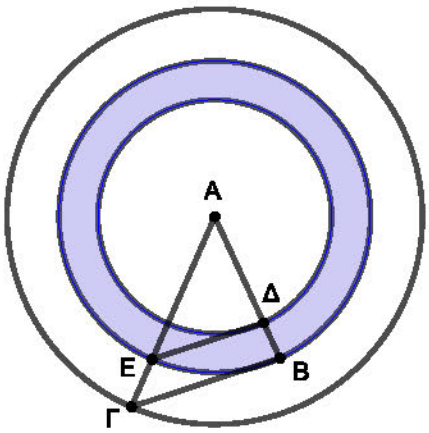
β) Έχουμε $E_{ΕΓ} = E_3 - E_2$ ή $E_2 = E_3 - E_2$ ή $2E_2 = E_3$ ή $2\pi\rho_2^{\,2} = \pi\rho_3^{\,2}$ ή $2\rho_2^{\,2} = \rho_3^{\,2}$ ή $\rho_3 = \rho_2\sqrt{2}$.

Όπως στο α) iii, από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα $\dfrac{ΑΔ}{ΑΒ} = \dfrac{ΑΕ}{ΑΓ} = \dfrac{ΔΕ}{ΒΓ}$ ή $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{\rho_2}{\rho_3} = \dfrac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

Επομένως $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{\rho_2}{\rho_2\sqrt{2}}$ ή $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ή $\rho_2 = \rho_1\sqrt{2}$ ή $\rho_2^{\,2} = \rho_1^{\,2}\left(\sqrt{2}\right)^2$ ή $\rho_2^{\,2} = 2\rho_1^{\,2}$ ή $\pi\rho_2^{\,2} = 2\pi\rho_1^{\,2}$

ή $E_2 = 2E_1$.

Επίσης, για το εμβαδόν $E_{ΔΒ}$ του δακτυλίου που είναι χρωματισμένος στο παρακάτω σχήμα έχουμε $E_{ΔΒ} = E_2 - E_1$ ή $E_{ΔΒ} = 2E_1 - E_1$ ή $E_{ΔΒ} = E_1$.



13

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε ώστε ΑΕ = ΑΒ. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνες ρ = ΑΔ , r = ΑΒ = ΑΕ και R = ΑΓ γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους (Α,ρ) , (Α,r) και (Α,R) όπως στο σχήμα. Έστω $E_{ΕΓ}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, r) και (Α, R) , $E_{ΔΒ}$ το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, ρ) και (Α, r), $E_{ΑΕ}$ το εμβαδόν του κύκλου (Α, r) και $E_{ΑΔ}$ το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ).

α) Να αποδείξετε ότι:

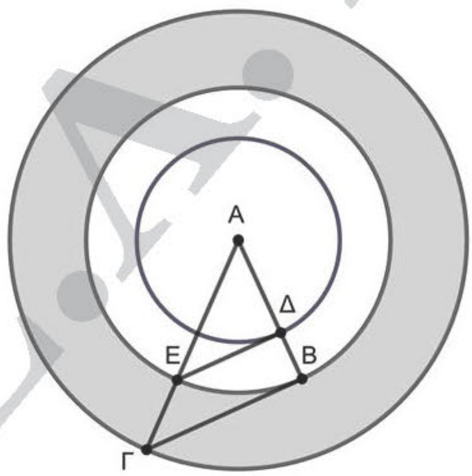
i. $\dfrac{E_{ΕΓ}}{E_{ΑΕ}} = \dfrac{R^2 - r^2}{r^2}$ (Μονάδες 10)

ii. $\dfrac{E_{ΔΒ}}{E_{ΑΔ}} = \dfrac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$ (Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{E_{ΕΓ}}{E_{ΑΕ}} = \frac{E_{ΔΒ}}{E_{ΑΔ}}$$

(Μονάδες 08)



13 α

ΛΥΣΗ

α) i. Το εμβαδόν E_{AE} του κύκλου (A, r) είναι ίσο με $E_{AE} = \pi \cdot r^2$ και το εμβαδόν $E_{E\Gamma}$ του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, r) και (A, R) είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο κύκλων, δηλαδή $E_{E\Gamma} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$ ή $E_{E\Gamma} = \pi(R^2 - r^2)$.

Άρα $\frac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{\pi \cdot r^2}$ ή $\frac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2}$.

ii. Με όμοιους συλλογισμούς προκύπτει ότι $E_{A\Delta} = \pi \cdot \rho^2$ και $E_{\Delta B} = \pi(r^2 - \rho^2)$.

Άρα $\frac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$.

β) Από τα α)i) και α)ii), για να αποδείξουμε τη ζητούμενη ισότητα $\frac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \frac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{R^2 - r^2}{r^2} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$ ή $\frac{R^2}{r^2} - 1 = \frac{r^2}{\rho^2} - 1$ ή $\frac{R^2}{r^2} = \frac{r^2}{\rho^2}$ ή $\frac{R}{r} = \frac{r}{\rho}$.

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, γιατί:

Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την παράλληλη ΔΕ στην πλευρά του ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$ ή $\frac{\rho}{r} = \frac{r}{R}$ ή $\frac{R}{r} = \frac{r}{\rho}$.

14

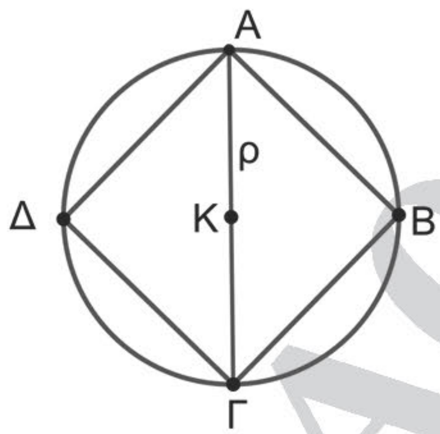
ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο (Κ, ρ) εμβαδού Ε = 4π είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ, όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα ρ του κύκλου (Κ, ρ). (Μονάδες 07)

β) το μήκος της διαμέτρου ΑΓ του κύκλου (Κ, ρ) και της πλευράς ΑΒ του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)



14 α

ΛΥΣΗ

α) Για το εμβαδόν Ε του κύκλου (Κ, ρ) ισχύει ότι $E = \pi\rho^2$. Όμως $E = 4\pi$, άρα $\pi\rho^2 = 4\pi$ ή $\rho^2 = 4$ ή $\rho = 2$.

β) Για τη διάμετρο ΑΓ του κύκλου (Κ, ρ) ισχύει ότι $A\Gamma = 2\rho = 4$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{B} = 90^\circ$ και ισοσκελές με ΑΒ = ΒΓ, που είναι ίσες ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = AB^2 + AB^2$ ή $2AB^2 = 16$ ή $AB^2 = 8$ ή $AB = \sqrt{8}$.

(εναλλακτικά:

Γνωρίζουμε ότι το μήκος της πλευράς λ_4 του τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ είναι $\lambda_4 = \rho\sqrt{2}$. Άρα $\lambda_4 = 2\sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8}$.)

γ) Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(AB\Gamma\Delta) = AB^2 = (\sqrt{8})^2 = 8$.

15

ΘΕΜΑ 2

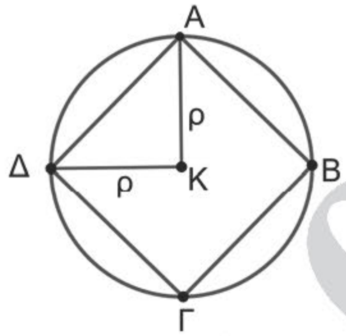
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ, ρ), όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 08)

β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι 4:

i. Να αποδείξετε ότι $\rho = \sqrt{8}$. (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (Κ, ρ). (Μονάδες 10)



15 α

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία $A\hat{K}\Delta$ είναι η κεντρική γωνία $\hat{\omega}_4$ του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Άρα $A\hat{K}\Delta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

Επομένως το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $A\hat{K}\Delta$ και υποτείνουσα την ΑΔ.

β) i. Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι $(AK\Delta) = \frac{1}{2} \cdot K\Delta \cdot KA = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \rho = \frac{1}{2}\rho^2$.

Όμως $(AK\Delta) = 4$, οπότε $\frac{1}{2}\rho^2 = 4$ ή $\rho^2 = 8$ ή $\rho = \sqrt{8}$.

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E = \pi\rho^2 = \pi \cdot (\sqrt{8})^2 = 8\pi$.

16

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α και με διαμέτρους τις ΒΓ και ΒΑ φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με π·α. (Μονάδες 07)

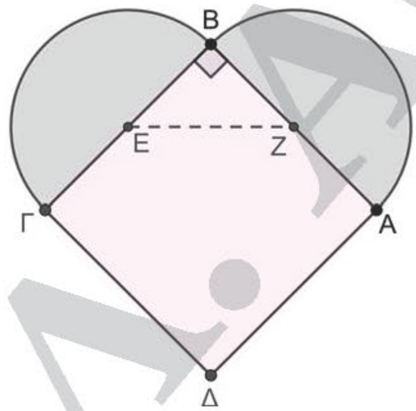
β)

i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι 2π+4, να υπολογίσετε το α. (Μονάδες 06)

ii. Αν α = 1 να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

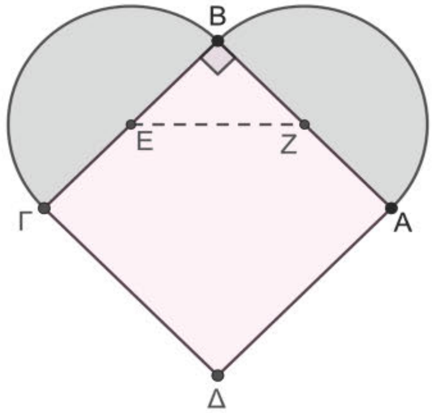
(Μονάδες 06)

γ) Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο $\frac{(\tau)}{(ΑΒΓΔ)}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 06)



16 α

ΛΥΣΗ



α) Το κάθε ημικύκλιο έχει ακτίνα ρ ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου, δηλαδή

ρ = $\frac{2\alpha}{2} = \alpha$. Το μήκος τόξου μ° θα είναι $\frac{\pi\rho\mu^\circ}{180^\circ}$, δηλαδή $\frac{\pi\alpha 180^\circ}{180^\circ} = \pi\alpha$.

β)

i. Η περίμετρος της καρδιάς αποτελείται από τα δύο ημικύκλια και τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ. Από το α) ερώτημα το κάθε ημικύκλιο έχει μήκος πα οπότε η περίμετρος θα ισούται με πα + πα + 2α + 2α = 2πα + 4α. Από υπόθεση έχουμε ότι η περίμετρος είναι 2π + 4, οπότε 2πα + 4α = 2π + 4 ή (2π + 4)α = 2π + 4, άρα α = 1.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ ($\widehat{B} = 90^\circ$) έχουμε ΒΕ = ΒΖ = α. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα: $EZ^2 = BE^2 + BZ^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$ ή $EZ = \alpha\sqrt{2}$. Για α = 1 έχουμε $EZ = \sqrt{2}$.

γ) Τα δύο ημικύκλια είναι ίσα γιατί έχουν την ίδια ακτίνα α, οπότε το άθροισμά τους θα είναι ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα α. Το εμβαδόν του θα είναι (τ) = $\pi\rho^2 = \pi\alpha^2$.

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν $(AB)^2 = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2$.

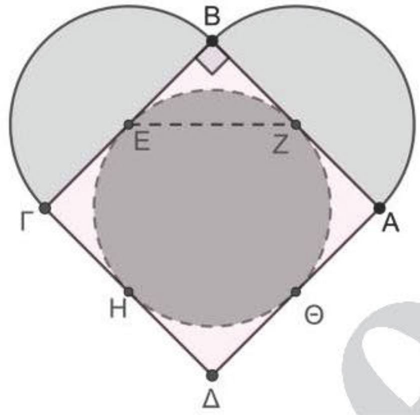
Ο ζητούμενος λόγος $\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{\pi\alpha^2}{4\alpha^2} = \frac{\pi}{4}$.

Επειδή π < 4 το κλάσμα $\frac{\pi}{4}$ θα είναι μικρότερο της μονάδας, το ίδιο και ο ζητούμενος λόγος.

Εναλλακτική λύση γ).

Το εμβαδόν των δύο ημικυκλίων θα είναι ίσο με το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τετραγώνου, διότι τα ημικύκλια έχουν ακτίνα α και ο εγγεγραμμένος στο τετράγωνο κύκλος έχει και αυτός ακτίνα α (η διάμετρος ισούται με 2α). Επειδή ο κύκλος είναι εγγεγραμμένος στο τετράγωνο (σχήμα) το εμβαδόν του είναι μικρότερο από αυτό του τετραγώνου, οπότε το κλάσμα

$$\frac{(\tau)}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}<1$$



17

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2α και Λ το μέσο της πλευράς του ΓΔ. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του ΑΒ, έχει εμβαδόν 10. Τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

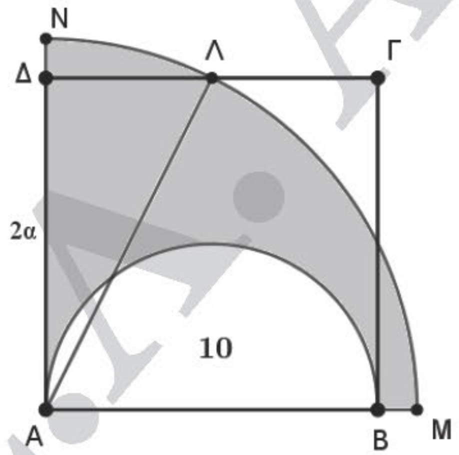
i. Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι (ΑΒΓΔ) = $\frac{80}{\pi}$. (Μονάδες 6)

ii. $\mathrm{A}\Lambda^2 = \frac{100}{\pi}$ (Μονάδες 6)

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΛ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{MN}}$, και έστω Μ, Ν είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ. (Μονάδες 8)

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{MN}}$ προς το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 5)



17 α

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Το ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2\alpha$ έχει ακτίνα α και εμβαδόν $E_{AB} = \dfrac{\pi\alpha^2}{2}$. Αφού το εμβαδό του ημικυκλίου είναι 10 τότε:

$$E_{AB} = \frac{\pi\alpha^2}{2} \quad ή \quad 10 = \frac{\pi\alpha^2}{2} \quad ή \quad \pi\alpha^2 = 20 \quad ή \quad \alpha^2 = \frac{20}{\pi}$$

Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ με πλευρά 2α είναι:

$$(ΑΒΓΔ) = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2 = 4 \cdot \frac{20}{\pi} = \frac{80}{\pi}$$

ii. Το σημείο Λ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ του τετραγώνου, επομένως $ΔΛ = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΛ εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΑΛ^2 = ΑΔ^2 + ΔΛ^2 = (2\alpha)^2 + \alpha^2 = 5\alpha^2$$

Από το α) i. ερώτημα είναι $\alpha^2 = \dfrac{20}{\pi}$, επομένως $ΑΛ^2 = 5\alpha^2 = 5 \cdot \dfrac{20}{\pi} = \dfrac{100}{\pi}$

β)

i. Το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος, υπολογίζεται αν από το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου $Α\widehat{ΜΝ}$ αφαιρέσουμε το εμβαδό E_{AB} του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ.

Το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου $Α\widehat{ΜΝ}$ είναι:

$$\left(Α\widehat{ΜΝ}\right) = \frac{\pi \cdot ΑΛ^2}{4} = \frac{\pi \cdot \frac{100}{\pi}}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

επομένως το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος είναι:

$$E = \left(Α\widehat{ΜΝ}\right) - E_{AB} = 25 - 10 = 15$$

ii. Από το ερώτημα (β.i) το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου $Α\widehat{ΜΝ}$ είναι $\left(Α\widehat{ΜΝ}\right) = 25$ και από το α) i. ερώτημα το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(ΑΒΓΔ) = \dfrac{80}{\pi}$, επομένως ο λόγος του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $\left(Α\widehat{ΜΝ}\right)$ προς το εμβαδό του τετραγώνου (ΑΒΓΔ) θα είναι:

$$\frac{\left(Α\widehat{ΜΝ}\right)}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{25}{\frac{80}{\pi}} = \frac{25\pi}{80} = \frac{5\pi}{16}$$

18

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π.

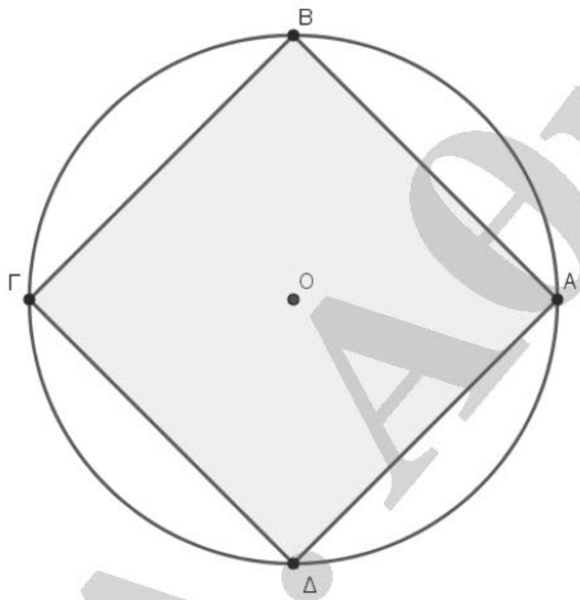
α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου. (Μονάδες 07)

β) Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο. (Μονάδες 09)

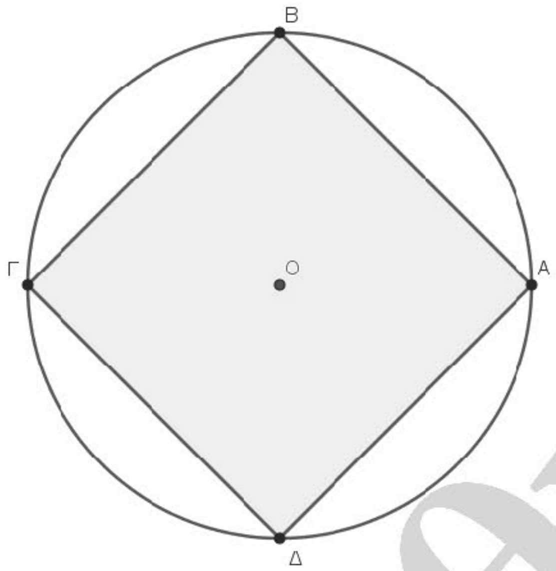
ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.

(Μονάδες 09)



18 α

ΛΥΣΗ



α) Το εμβαδόν του κύκλου δίνεται από τον τύπο Ε = $\pi\rho^2$. Επομένως $16\pi = \pi\rho^2$, άρα $\rho = 4$.

β)

i. Η πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα ρ ισούται με $\rho\sqrt{2}$. Επομένως για $\rho = 4$ έχουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι $ΑΒ = \rho\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι 16π, ενώ το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $Ε = ΑΒ^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 16 \cdot 2 = 32$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το τετράγωνο θα είναι ίσο με $16\pi - 32$.

19

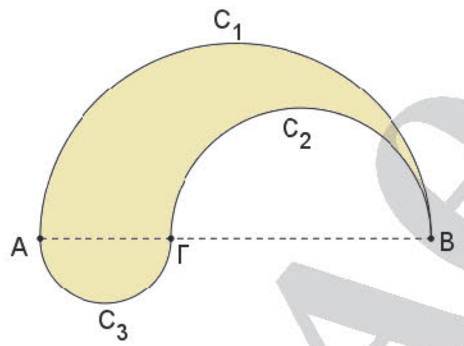
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6$, και σημείο του Γ, ώστε $BΓ = 4$. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΒ σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1, C_2 και C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}$, 2π και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου. (Μονάδες 10)



19 α

ΛΥΣΗ

α) Η ακτίνα του ημικυκλίου C_1 είναι $R_1 = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ και το εμβαδόν του ισούται με

$$E_1 = \frac{\pi R_1^2}{2} = \frac{9\pi}{2}.$$

Η ακτίνα του ημικυκλίου C_2 είναι $R_2 = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$ και το εμβαδόν του ισούται με

$$E_2 = \frac{\pi R_2^2}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi\,.$$

Η ακτίνα του ημικυκλίου C_3 είναι $R_3 = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = 1$ και το εμβαδόν του ισούται με

$$E_3 = \frac{\pi R_3^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

β) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου ισούται με

$$E_1 - E_2 + E_3 = \frac{9\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{6\pi}{2} = 3\pi.$$

20

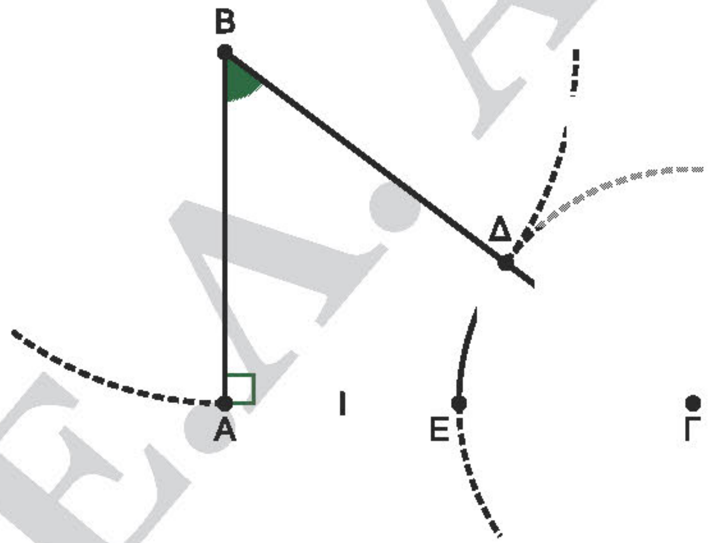
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$. Με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα $R = BA$ γράφουμε τον κύκλο (B, R) ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα $\rho = \Gamma\Delta$ γράφουμε τον κύκλο (Γ, ρ) ο οποίος τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Έστω ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{2}{3}R$. (Μονάδες 8)

β) Έστω E_1 το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ και E_2 το εμβαδόν του κύκλου (B, R). Να αποδείξετε ότι $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3\pi}{2}$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω $\widehat{B} = \mu°$ και E_3 και E_4 είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων $B\widehat{A\Delta}$ και $\Gamma\widehat{\Delta E}$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{E_4}{E_3} = \frac{4(90-\mu)}{9\mu}$. (Μονάδες 9)



20 α

ΛΥΣΗ

α) Είναι $BA = B\Delta = R$ και $\Gamma\Delta = \Gamma E = \rho$.

Επειδή το E είναι το μέσο της $A\Gamma$, είναι $A\Gamma = 2\Gamma E = 2\rho$.

Επίσης είναι $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = R + \rho$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90°$) έχουμε

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

$(R + \rho)^2 = R^2 + (2\rho)^2$

$R^2 + 2R\rho + \rho^2 = R^2 + 4\rho^2$

$2R\rho = 3\rho^2$

$\rho = \frac{2}{3}R$.

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$E_1 = \frac{1}{2}A\Gamma \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2\rho \cdot R = \frac{2}{3}R \cdot R = \frac{2}{3}R^2$

και του κύκλου (B, R), $E_2 = \pi R^2$, άρα

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\pi R^2}{\frac{2}{3}R^2} = \frac{3\pi}{2} .$$

γ) Ο κυκλικός τομέας $B\widehat{A\Delta}$ είναι ακτίνας R και γωνίας $\widehat{B} = \mu°$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$E_3 = \frac{\pi R^2 \mu}{360}.$$

Ο κυκλικός τομέας $\Gamma\widehat{\Delta E}$ είναι ακτίνας $\rho = \frac{2}{3}R$ και γωνίας $\widehat{\Gamma} = 90° - \mu°$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$E_4 = \frac{\pi\rho^2(90-\mu)}{360} = \frac{4\pi R^2(90-\mu)}{9 \cdot 360} .$$

Άρα

$$\frac{E_4}{E_3} = \frac{4\pi R^2(90-\mu) \cdot 360}{9 \cdot 360 \cdot \pi R^2 \mu} = \frac{4(90-\mu)}{9\mu} .$$

21

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) με ΑΒ= γ , ΑΓ= β και

ΒΓ= $\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με $\widehat{A} > 90^0$. (Μονάδες 8)

β) η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με 120^0. Δίνεται συν120^0 = $-\frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

γ) η γωνία ΒΟΓ ισούται με 120^0. (Μονάδες 5)

δ) το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος, που ορίζεται από τη χορδή ΒΓ και το κυρτογώνιο τόξο ΒΓ, είναι: Ε = $\frac{(4\pi-3\sqrt{3})R^2}{12}$. Δίνεται ημ$120^0$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 7)

21 α

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ= γ , ΑΓ= β και ΒΓ= $\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}$.

Είναι: $ΒΓ^2 = \beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$ και $ΑΓ^2 + ΑΒ^2 = \beta^2+\gamma^2$.

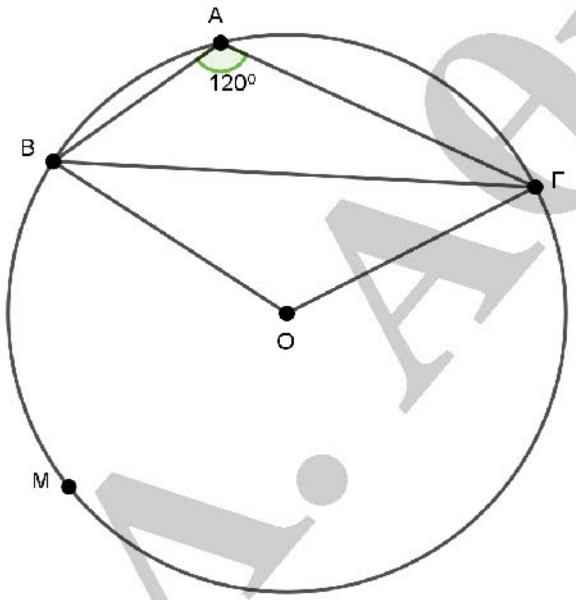
Οπότε: $ΒΓ^2 > ΑΓ^2 + ΑΒ^2 \Rightarrow \widehat{A} > 90^0$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2 – 2ΑΓ·ΑΒ·συνΑ = \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot συνΑ$.

Επίσης από το ερώτημα (α): $ΒΓ^2 = \beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$.

Άρα: $\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot συνΑ = \beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$ ή συνΑ = $-\frac{1}{2}$, άρα $\widehat{A} = 120^0$.



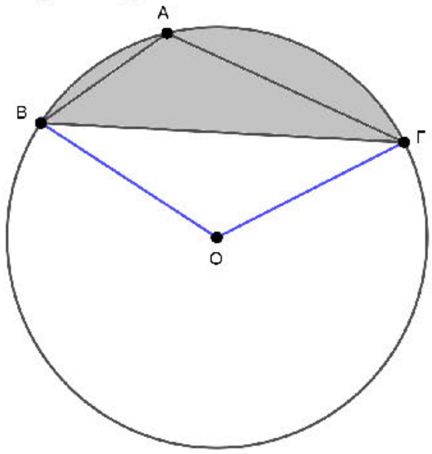
γ) Η γωνία ΒΑΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, οπότε το τόξο στο οποίο βαίνει θα έχει μέτρο διπλάσιο από αυτήν. Άρα $\overset{\frown}{ΒΜΓ} = 2\cdot120^0 = 240^0$.

Έτσι για το κυρτογώνιο τόξο ΒΑΓ θα ισχύει: $\overset{\frown}{ΒΑΓ} = 360^0 - 240^0 = 120^0$, οπότε η επίκεντρη γωνία ΒΟΓ ισούται με 120^0.

δ) Λόγω του ερωτήματος (γ) είναι: $\widehat{ΒΟΓ} = 120^0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$Ε = (Ο\ \overset{\frown}{ΒΑΓ}) – (ΟΒΓ) = \frac{\pi R^2\mu}{360} - \frac{1}{2}ΟΒ\cdot ΟΓ\cdot ημ120^0 = \frac{\pi R^2 120}{360} - \frac{1}{2}\cdot R\cdot R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi R^2-3\sqrt{3}R^2}{12} = \frac{(4\pi-3\sqrt{3})R^2}{12}.$$



22

ΘΕΜΑ 4

Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

α) Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές Α, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι:

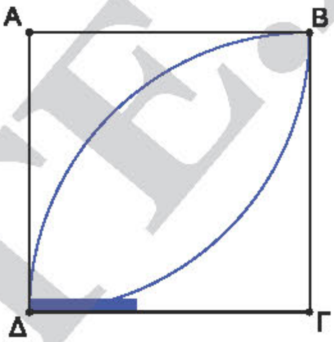
i. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25\pi\ \mathrm{m}^2$. (Μονάδες 4)

ii. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι $50(\pi-2)\ \mathrm{m}^2$. (Μονάδες 5)

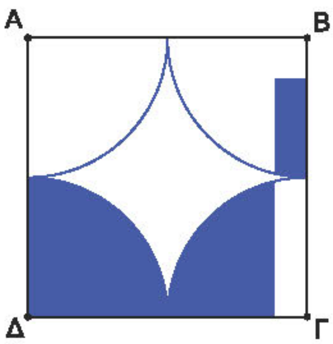
β) Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

i. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται. (Μονάδες 8)

ii. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

22 α

ΛΥΣΗ

Το εμβαδόν του τετράγωνου κήπου είναι $\mathrm{E} = 10^2 = 100\ \mathbf{m}^2$.

α) i. Ο κάθε ένας από τους δύο μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90^{o} και ακτίνας 10m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι

$$\mathrm{E}_1 = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 90}{360} = 25\pi\ \mathbf{m}^2.$$

ii. Οι δύο μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ μια περιοχή του κήπου ποτίζεται και από τους δύο μηχανισμούς. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τομέων ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν της περιοχής του κήπου που ποτίζεται από τους δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτής της περιοχής είναι

$$2\mathrm{E}_1 - \mathrm{E} = 50\pi - 100 = 50(\pi - 2)\ \mathbf{m}^2.$$

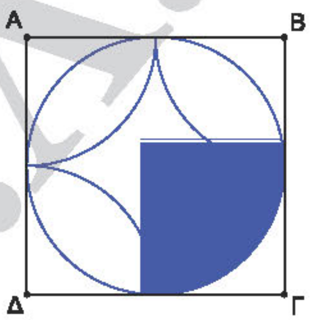
β) i. Ο κάθε ένας από τους τέσσερις μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90^{o} και ακτίνας 5m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι

$$\mathrm{E}_2 = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 90}{360} = \frac{25\pi}{4}\ \mathbf{m}^2.$$

Το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται είναι

$$\mathrm{E} - 4\mathrm{E}_2 = 100 - 25\pi = 25(4 - \pi)\ \mathbf{m}^2.$$

ii.



Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που ποτίζει ο πέμπτος μηχανισμός είναι

$$\mathrm{E}_3 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi.$$

Οι πέντε μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ τέσσερις περιοχές του κήπου ποτίζονται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων κυκλικών τομέων αυξημένο κατά το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτό είναι

$$4\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_3 - \mathrm{E} = 25\pi + 25\pi - 100 = 50(\pi - 2)\ \mathbf{m}^2.$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή του εμβαδού είναι ίση με αυτή του ερωτήματος α).

23

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $ΑΒ = 4α$ και $ΑΔ = πα$. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

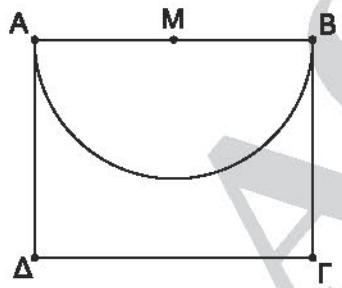
(Μονάδες 8)

β) Αν η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε και Μ είναι το μέσο της ΑΒ,

i. να αποδείξετε ότι $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΕ$ και $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΕ$. (Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $ΒΕ = \frac{16α}{\sqrt{16+π^2}}$ και $ΔΕ = \frac{π^2α}{\sqrt{16+π^2}}$, (Μονάδες 6)

iii. να υπολογίσετε το $συν\widehat{ΒΜΕ}$. (Μονάδες 5)



23 α

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΔ} = 4\alpha \cdot \pi\alpha = 4\pi\alpha^2.$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου ακτίνας $R = \frac{\text{ΑΒ}}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha$ δίνεται από τον τύπο

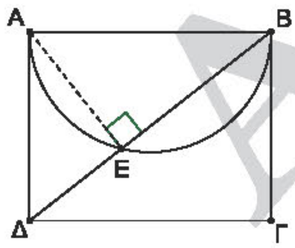
$$\text{Ε}_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(2\alpha)^2}{2} = \frac{4\pi\alpha^2}{2} = 2\pi\alpha^2 \ (1).$$

Το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και εξωτερικά του ημικυκλίου γίνεται από τον τύπο

$$\text{Ε}_2 = (\text{ΑΒΓΔ}) - \text{Ε}_1 = 4\pi\alpha^2 - 2\pi\alpha^2 = 2\pi\alpha^2 \ (2).$$

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $\text{Ε}_1 = \text{Ε}_2$, επομένως το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ.



i. Η γωνία $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β}$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, επομένως $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = 90°$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως

$$\text{ΑΒ}^2 = \text{ΒΔ} \cdot \text{ΒΕ} \quad (1).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΔΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΔ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως

$$\text{ΑΔ}^2 = \text{ΒΔ} \cdot \text{ΔΕ} \quad (2).$$

ii. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι

$$\text{ΒΔ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΔ}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\text{ΑΒ} = 4\alpha$, $\text{ΑΔ} = \pi\alpha$, οπότε

$$\text{ΒΔ}^2 = (4\alpha)^2 + (\pi\alpha)^2 \ \text{ ή } \ \text{ΒΔ}^2 = (16 + \pi^2)\alpha^2 \ \text{ ή } \ \text{ΒΔ} = \alpha\sqrt{16 + \pi^2}.$$

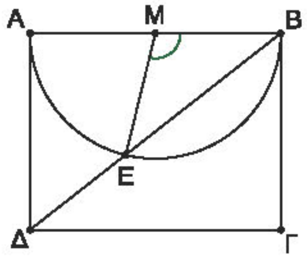
Είναι $\text{ΑΒ} = 4\alpha$ και $\text{ΒΔ} = \alpha\sqrt{16 + \pi^2}$, επομένως η (1) γίνεται

$$(4\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16 + \pi^2} \cdot \text{ΒΕ} \ \text{ ή } \ \text{ΒΕ} = \frac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}.$$

Είναι $\text{ΑΔ} = \pi\alpha$ και $\text{ΒΔ} = \alpha\sqrt{16 + \pi^2}$, επομένως η (2) γίνεται

$$(\pi\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16+\pi^2}\cdot \Delta E \quad ή \quad \Delta E = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}.$$

iii. Έστω Μ το μέσο της ΑΒ.



Τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΕ και ΜΒ είναι ακτίνες του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ, επομένως

$$ME = MB = \frac{AB}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha.$$

Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΕΜ ισχύει

$$BE^2 = MB^2 + ME^2 - 2MB\cdot ME\cdot συν B\widehat{M}E \quad ή \quad συν B\widehat{M}E = \frac{MB^2+ME^2-BE^2}{2MB\cdot ME}.$$

Όμως $ME = MB = 2\alpha$ και $BE = \frac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$, οπότε

$$συν B\widehat{M}E = \frac{(2\alpha)^2+(2\alpha)^2-\frac{256\alpha^2}{16+\pi^2}}{2\cdot 2\alpha\cdot 2\alpha} \quad ή \quad συν B\widehat{M}E = \frac{\left(8-\frac{256}{16+\pi^2}\right)\alpha^2}{8\alpha^2} \quad ή \quad συν B\widehat{M}E = \frac{\pi^2-16}{16+\pi^2}.$$

24

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα R. Έστω ΑΒ διάμετρος του κύκλου και Δ, Ε σημεία της τέτοια ώστε ΑΔ = ΔΕ = ΕΒ. Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια ΑΔ και ΑΕ πάνω από τη διάμετρο ΑΒ και τα ημικύκλια ΒΕ και ΒΔ κάτω από τη διάμετρο ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ε_1 και ε_3 των καμπυλόγραμμων σχημάτων ΑΔΒΖ και ΒΕΑΗ αντίστοιχα.

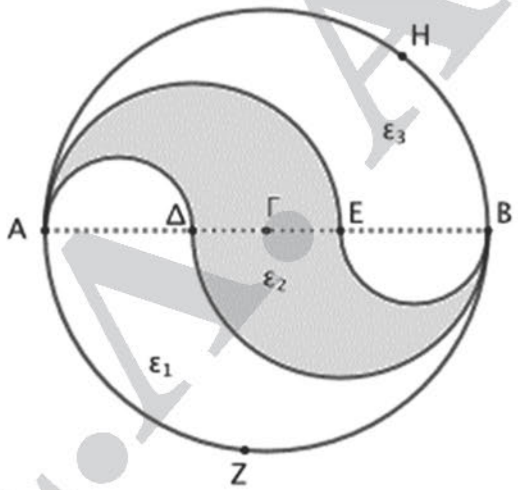
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ε_2 του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος ΑΔΒΕ.

(Μονάδες 08)

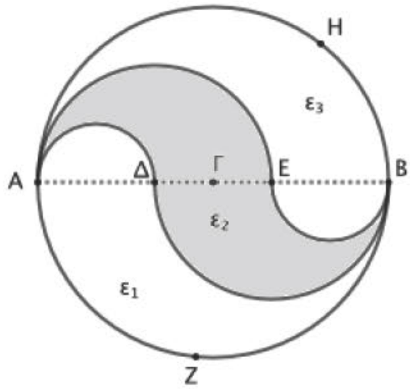
γ) Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

(Μονάδες 05)



24 α

ΛΥΣΗ



α) Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$\mathrm{A\Delta} = \mathrm{\Delta E} = \mathrm{EB} = \frac{\mathrm{AB}}{3} = \frac{2\mathrm{R}}{3}$$

Τα ημικύκλια $\widehat{\mathrm{A\Delta}}$ και $\widehat{\mathrm{BE}}$ έχουν ακτίνα

$$\rho_1 = \frac{\mathrm{A\Delta}}{2} = \frac{\mathrm{R}}{3}$$

και εμβαδόν

$$\varepsilon = \frac{\pi{\rho_1}^2 180^o}{360^o} = \frac{\pi\left(\frac{\mathrm{R}}{3}\right)^2 180^o}{360^o} = \frac{\pi\mathrm{R}^2}{18}$$

Τα ημικύκλια $\widehat{\mathrm{AE}}$ και $\widehat{\mathrm{B\Delta}}$ έχουν ακτίνα

$$\rho_2 = \frac{\mathrm{AE}}{2} = \mathrm{A\Delta} = \frac{2\mathrm{R}}{3}$$

και εμβαδόν

$$\tau = \frac{\pi{\rho_2}^2 180^o}{360^o} = \frac{\pi\left(\frac{2\mathrm{R}}{3}\right)^2 180^o}{360^o} = \frac{2\pi\mathrm{R}^2}{9}$$

Τα ημικύκλια $\widehat{\mathrm{AHB}}$ και $\widehat{\mathrm{AZB}}$ έχουν ακτίνα R και εμβαδόν

$$\sigma = \frac{\pi\mathrm{R}^2}{2}$$

Οπότε, τα καμπυλόγραμμα σχήματα ΑΔΒΖ και ΒΕΑΗ έχουν εμβαδόν

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \sigma + \varepsilon - \tau = \frac{\pi\mathrm{R}^2}{2} + \frac{\pi\mathrm{R}^2}{18} - \frac{2\pi\mathrm{R}^2}{9} = \frac{9\pi\mathrm{R}^2}{18} + \frac{\pi\mathrm{R}^2}{18} - \frac{4\pi\mathrm{R}^2}{18} = \frac{6\pi\mathrm{R}^2}{18} = \frac{\pi\mathrm{R}^2}{3}$$

β) Το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΑΒ είναι

$$\mathrm{E} = \pi\mathrm{R}^2$$

Επομένως, το καμπυλόγραμμο σχήμα ΑΔΒΕ έχει εμβαδόν

$$\varepsilon_2 = E - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{\pi R^2}{3}$$

γ) Παρατηρούμε ότι

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\pi R^2}{3} = \frac{E}{3}$$

Άρα, ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

25

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα α σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του α.

(Μονάδες 08)

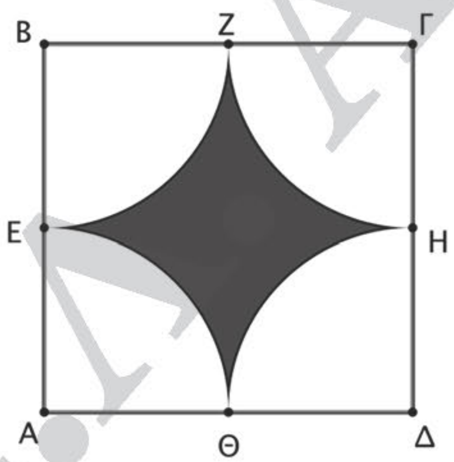
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$E = \alpha^2(4 - \pi)$$

(Μονάδες 12)

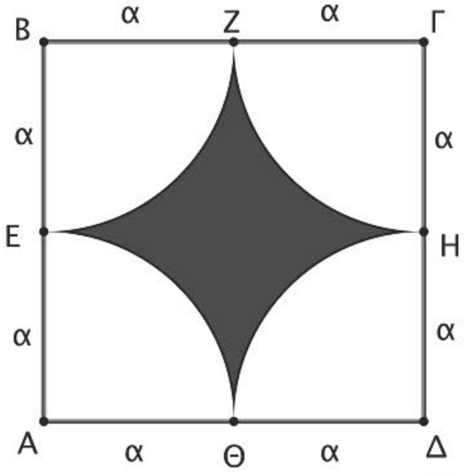
γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.

(Μονάδες 05)



25 α

ΛΥΣΗ



α) Τα τόξα $\overset{\frown}{ΘΕ}$, $\overset{\frown}{ΕΖ}$, $\overset{\frown}{ΖΗ}$, $\overset{\frown}{ΗΘ}$ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας α και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90^o. Επομένως, οι κυκλικοί τομείς $Α\overset{\frown}{ΘΕ}$, $Β\overset{\frown}{ΕΖ}$, $Γ\overset{\frown}{ΖΗ}$, $Δ\overset{\frown}{ΗΘ}$ έχουν ο καθένας εμβαδόν

$$(Α\,\overset{\frown}{ΘΕ}\,) = (Β\,\overset{\frown}{ΕΖ}\,) = (Γ\,\overset{\frown}{ΖΗ}\,) = (Δ\,\overset{\frown}{ΗΘ}\,) = \frac{πα^2 90^o}{360^o} = \frac{πα^2}{4}$$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι

$$Ε_τ = (2α)^2 = 4α^2$$

Οπότε, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι:

$$Ε = Ε_τ - 4(Α\,\overset{\frown}{ΘΕ}\,) = 4α^2 - 4\frac{πα^2}{4} = 4α^2 - πα^2 = α^2(4-π)$$

γ) Το μήκος καθενός από τα ίσα τόξα $\overset{\frown}{ΘΕ}$, $\overset{\frown}{ΕΖ}$, $\overset{\frown}{ΖΗ}$, $\overset{\frown}{ΗΘ}$ είναι:

$$\ell_{\overset{\frown}{ΘΕ}} = \ell_{\overset{\frown}{ΕΖ}} = \ell_{\overset{\frown}{ΖΗ}} = \ell_{\overset{\frown}{ΗΘ}} = \frac{πα 90^o}{180^o} = \frac{πα}{2}$$

Οπότε, η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$L = 4\ell_{\overset{\frown}{ΘΕ}} = 4\frac{πα}{2} = 2πα$$

26

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τυχαίο σημείο του Μ, τέτοιο ώστε $ΑΜ = 2α$ και $ΜΒ = 2β$. Με διαμέτρους ΑΜ, ΜΒ και ΑΒ γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής του ημικυκλίου ΑΒ και της κάθετης από το Μ στο ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια $Ζ\widehat{ΑΜ}$, $Ε\widehat{ΜΒ}$ και $Δ\widehat{ΑΒ}$, όπου Ζ, Ε, Δ είναι τα μέσα των ΑΜ, ΜΒ και ΑΒ αντίστοιχα.

(Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

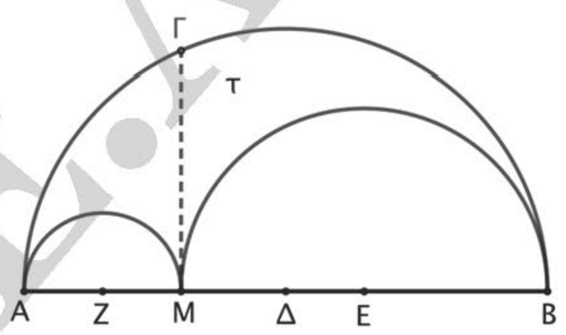
(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου ΜΓ.

(Μονάδες 05)

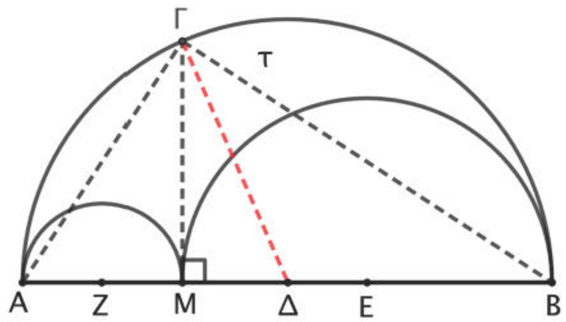
δ) Για ποια θέση του Μ μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ;

(Μονάδες 05)



26 α

ΛΥΣΗ



α) Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης είναι $AZ = ZM = \alpha$, $ME = EB = \beta$ και $A\Delta = \Delta B = \alpha + \beta$.

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $Z\widehat{AM}$ είναι:

$$(Z\widehat{AM}) = \frac{\pi \cdot ZM^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot \alpha^2}{2}$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $E\widehat{MB}$ είναι:

$$(E\widehat{MB}) = \frac{\pi \cdot EB^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot \beta^2}{2}$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $\Delta\widehat{AB}$ είναι:

$$(\Delta\widehat{AB}) = \frac{\pi \cdot \Delta B^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot (\alpha+\beta)^2}{2}$$

β) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων υπολογίζεται αν αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του ημικυκλίου $\Delta\widehat{AB}$ τα εμβαδά των ημικυκλίων $Z\widehat{AM}$ και $E\widehat{MB}$, δηλαδή:

$$(\tau) = (\Delta\widehat{AB}) - (Z\widehat{AM}) - (E\widehat{MB}) = \frac{\pi \cdot (\alpha+\beta)^2}{2} - \frac{\pi \cdot \alpha^2}{2} - \frac{\pi \cdot \beta^2}{2}$$

Οπότε

$$(\tau) = \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 - \beta^2) = \frac{\pi}{2}2\alpha\beta = \pi\alpha\beta$$

γ) Ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ έχει ακτίνα $\rho = \frac{M\Gamma}{2}$ και εμβαδόν

$$E = \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot \left(\frac{M\Gamma}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot M\Gamma^2}{4}$$

Όμως, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ, αφού η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ. Οπότε:

$$M\Gamma^2 = AM \cdot MB = 2\alpha \cdot 2\beta = 4\alpha\beta$$

Άρα, έχουμε τελικά:

$$E = \frac{\pi \cdot 4\alpha\beta}{4} = \pi\alpha\beta$$

Επομένως, $E = (\tau)$, δηλαδή ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ είναι ισοδύναμος με το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

δ) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ θα γίνει μέγιστο όταν το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν μεγιστοποιηθεί το κλάσμα

$$\frac{\pi \cdot M\Gamma^2}{4}$$

Το κλάσμα αυτό παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν το κάθετο τμήμα ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν $M\Gamma = R$, αφού $M\Gamma \leq \Delta\Gamma = R$. Άρα, το σημείο Μ θα είναι το μέσο του ΑΒ, δηλαδή θα είναι $\alpha = \beta$.

27

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$ και $ΒΓ = 2ρ$. Με διάμετρο ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου. Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα $Α\widehat{ΒΓ}$ με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = ρ\sqrt{2}$.

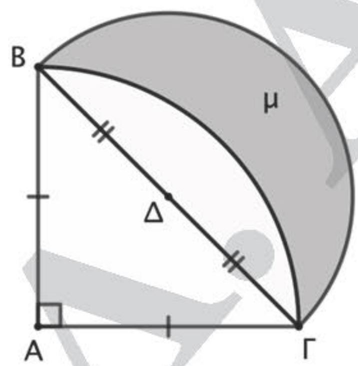
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου μ ως συνάρτηση του ρ.

(Μονάδες 10)

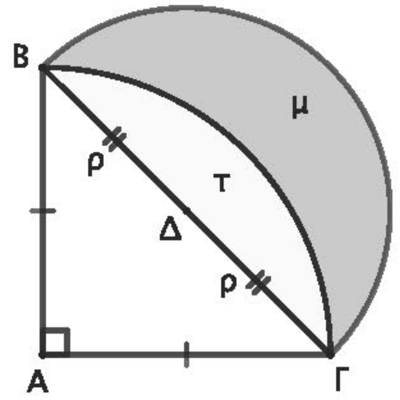
γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Τι συμπέρασμα προκύπτει;

(Μονάδες 05)



27 α

ΛΥΣΗ



α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο είναι ΑΒ = ΑΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$$

$$(2ρ)^2 = ΑΒ^2 + ΑΒ^2$$

$$4ρ^2 = 2ΑΒ^2$$

$$ΑΒ^2 = 2ρ^2$$

Επομένως, $ΑΒ = ρ\sqrt{2}$.

β) Το εμβαδόν (μ) του σχηματιζόμενου μηνίσκου προκύπτει αν από το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου ΒΓ αφαιρέσουμε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος με χορδή ΒΓ, δηλαδή:

$$(μ) = (Δ\,\widehat{ΒΓ}) - (τ)$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $Δ\,\widehat{ΒΓ}$ είναι:

$$(Δ\,\widehat{ΒΓ}) = \frac{π \cdot ΔΓ^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{π \cdot ρ^2}{2}$$

Το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος με χορδή ΒΓ υπολογίζεται αφαιρώντας από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $Α\,\widehat{ΒΓ}$ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή:

$$(τ) = (Α\,\widehat{ΒΓ}) - (ΑΒΓ) = \frac{π \cdot ΑΒ^2 \cdot 90^o}{360^o} - \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{π \cdot 2ρ^2}{4} - \frac{1}{2}2ρ^2 = \frac{π \cdot ρ^2}{2} - ρ^2$$

Επομένως, έχουμε τελικά:

$$(μ) = \frac{π \cdot ρ^2}{2} - \left(\frac{π \cdot ρ^2}{2} - ρ^2\right) = ρ^2$$

γ) Στο προηγούμενο ερώτημα βρέθηκε ότι $(μ) = ρ^2$.

Επίσης, είναι:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2}2ρ^2 = ρ^2$$

Επομένως, (μ) = (ΑΒΓ), δηλαδή ο σχηματιζόμενος μηνίσκος είναι ισοδύναμος με το τρίγωνο ΑΒΓ.

28

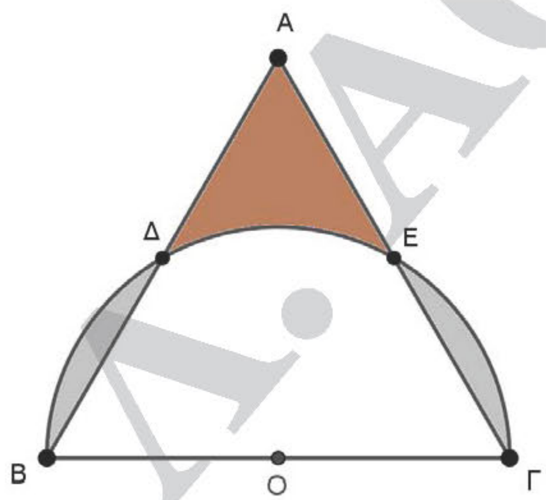
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, πλευράς 2α. Με διάμετρο τη ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ,Ε αντίστοιχα. Αν Ο είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΓ = α\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

β) το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ισούται με $Ε = \dfrac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{6}$. (Μονάδες 9)

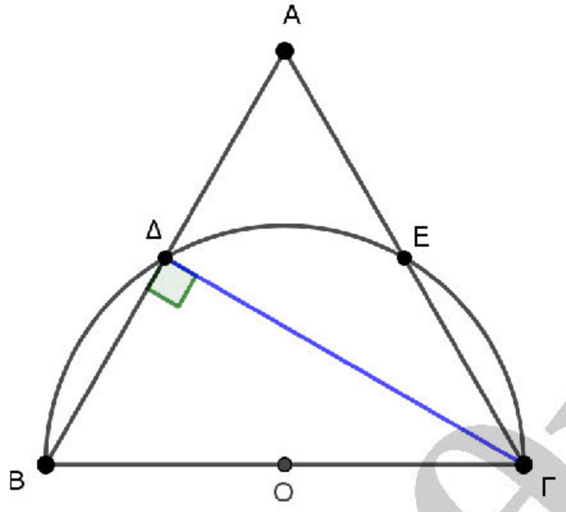
γ) το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΑΕ και το τόξο ΔΕ είναι: $Ε' = \dfrac{(3\sqrt{3}-π)α^2}{6}$. (Μονάδες 8)



28 α

ΛΥΣΗ

α)



Από τα δεδομένα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 2α. Άρα έχουμε:

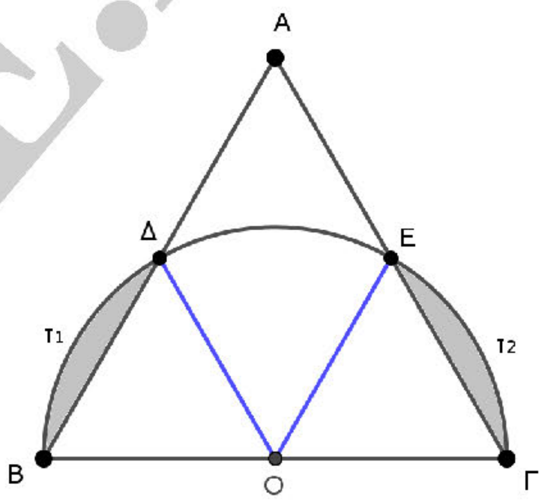
ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ = 2α, ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ΟΕ = α και $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60^0$.

Επίσης η ΒΓ είναι διάμετρος του ημικυκλίου, άρα $B\widehat{\Delta}\Gamma = 90^0$. Δηλαδή στο ισόπλευρο τρίγωνο ΓΑΒ, το ΓΔ είναι ύψος, οπότε θα είναι και διάμεσος. Άρα το Δ είναι μέσο της ΑΒ και όμοια το Ε, είναι μέσο της ΑΓ, οπότε ΔΒ = ΔΑ = ΕΑ = ΕΓ = α.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ, από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$\Delta\Gamma^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2$ ή $\Delta\Gamma^2 = (2\alpha)^2 - \alpha^2$ ή $\Delta\Gamma^2 = 3\alpha^2$, επομένως $\Delta\Gamma = \alpha\sqrt{3}$.

β)



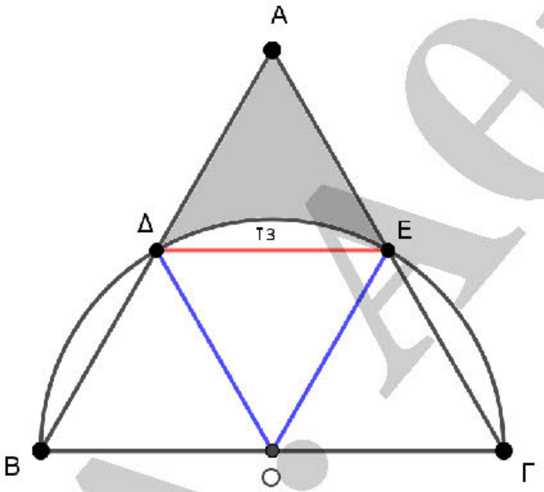
Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΟΒΔ, ΟΓΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α, οπότε θα είναι ίσα. Επομένως τα εμβαδά $τ_1$, $τ_2$ των δύο κυκλικών τμημάτων θα είναι ίσα. Άρα Ε = $τ_1 + τ_2 = 2 τ_1$ (1).

Όμως $τ_1 = (Ο\overset{\frown}{ΒΔ}) - (ΟΒΔ) =$

$\frac{πα^2 60}{360} - \frac{α^2\sqrt{3}}{4} = \frac{πα^2}{6} - \frac{α^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2πα^2 - 3α^2\sqrt{3}}{12} = \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12}$.

Οπότε από την (1): Ε = $2\frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12} = \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{6}$.

γ)



Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΟΔΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α. Οπότε το εμβαδό $τ_3$, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από τη χορδή ΔΕ θα ισούται με τα εμβαδά $τ_1$ και $τ_2$. Δηλαδή $τ_3 = \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12}$.

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$Ε' = (ΑΔΕ) - τ_3 = \frac{α^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12} = \frac{3\sqrt{3}α^2 - 2πα^2 + 3\sqrt{3}α^2}{12} = \frac{6\sqrt{3}α^2 - 2πα^2}{12} =$

$\frac{2(3\sqrt{3}-π)α^2}{12} = \frac{(3\sqrt{3}-π)α^2}{6}$.

29

ΘΕΜΑ 2

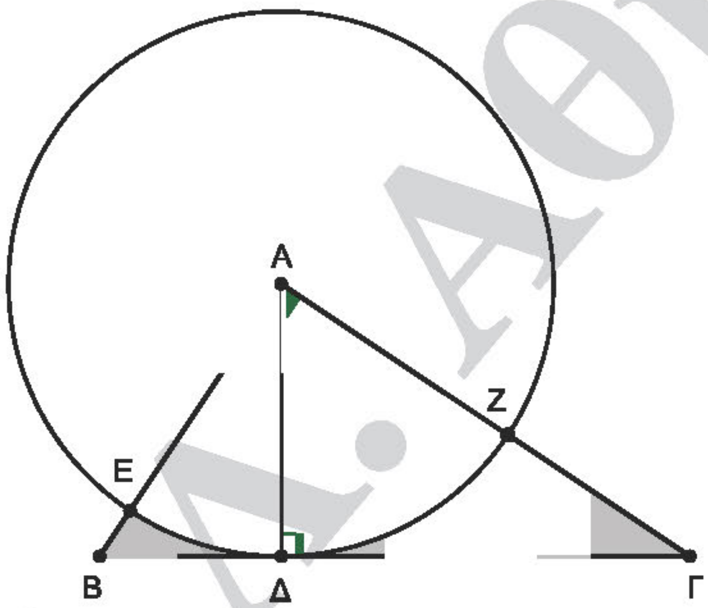
Στο παρακάτω σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχει υποτείνουσα $ΒΓ = 13$ και αντίστοιχο ύψος $ΑΔ = 6$. Με κέντρο το $Α$ και ακτίνα $ΑΔ$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

i. του κυκλικού τομέα $Α\,\widehat{ΕΔΖ}$, (Μονάδες 9)

ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $ΑΒΓ$ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. (Μονάδες 8)



29 α

ΛΥΣΗ

α) Είναι $ΒΓ \quad 13$ και $ΑΔ \quad 6$, επομένως το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot ΒΓ \cdot ΑΔ \quad \text{ή} \quad (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 \quad \text{ή} \quad (ΑΒΓ) = 39.$$

β) i) Ο κυκλικός τομέας $\mathrm{Α}\widehat{\mathrm{ΕΔΖ}}$ είναι γωνίας $\mu \quad \hat{A} \quad 90^\circ$ και ακτίνας $R \quad \mathrm{ΑΔ} \quad 6$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\left(\mathrm{Α}\widehat{\mathrm{ΕΔΖ}}\right) \quad \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ} \quad \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} \quad 9\pi \,.$$

ii) Το εμβαδόν E του χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $ΑΒΓ$ και εξωτερικά του κύκλου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών του τριγώνου $ΑΒΓ$ και του κυκλικού τομέα $\mathrm{Α}\widehat{\mathrm{ΕΔΖ}}$. Επομένως είναι

$$E \quad (ΑΒΓ) - \left(\mathrm{Α}\widehat{\mathrm{ΕΔΖ}}\right) \quad 39 - 9\pi \,.$$

30

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha = 4$. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\rho = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

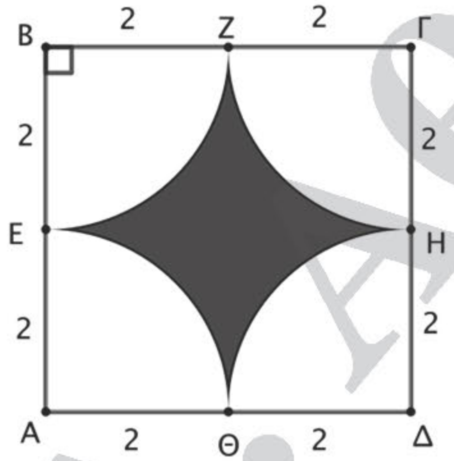
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι

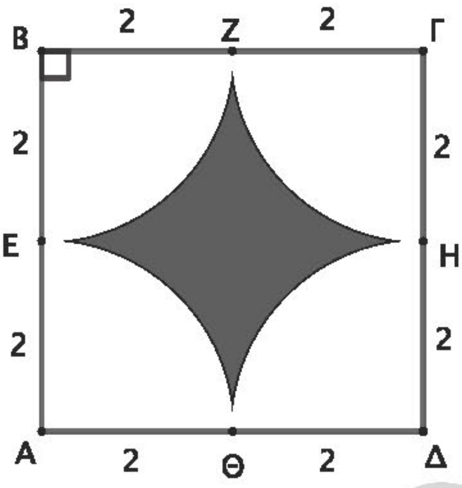
$$E = 4(4 - \pi)$$

(Μονάδες 12)



30 α

ΛΥΣΗ



α) Τα τόξα ΘΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας $\rho = 2$ και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90^o. Επομένως, οι κυκλικοί τομείς $\widehat{ΑΘΕ}$, $\widehat{ΒΕΖ}$, $\widehat{ΓΖΗ}$, $\widehat{ΔΗΘ}$ έχουν καθένας εμβαδόν ίσο με

$$(\widehat{ΑΘΕ}) = (\widehat{ΒΕΖ}) = (\widehat{ΓΖΗ}) = (\widehat{ΔΗΘ}) = \frac{\pi\rho^2 90^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90^o}{360^o} = \pi$$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι

$$E_\tau = \alpha^2 = 4^2 = 16$$

Οπότε, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι:

$$E = E_\tau - 4(\widehat{ΑΘΕ}) = 16 - 4\pi = 4(4 - \pi)$$

31

ΘΕΜΑ 4

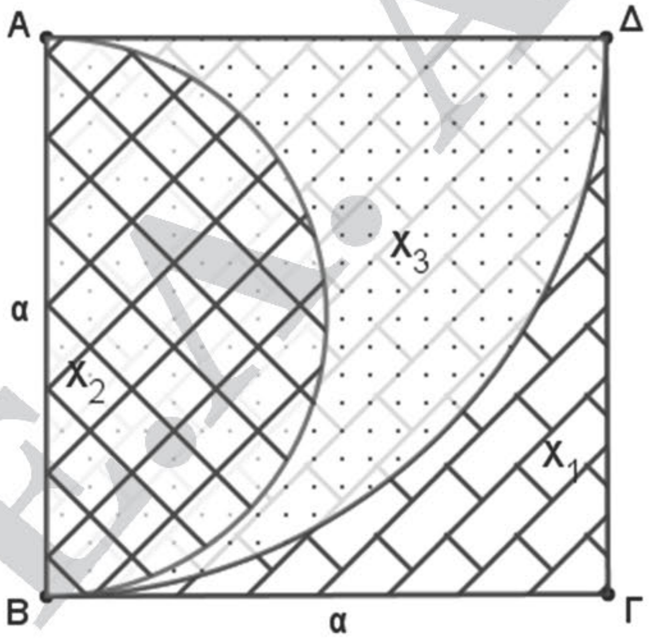
Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Α και ακτίνα α.

α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με: $(X_1) = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (4-\pi)$ (Μονάδες 5)

β) Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3.

(Μονάδες 11)

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 κι X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



31 α

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του χωρίου X_1 θα υπολογιστεί, αν από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ. Έχουμε: (ΑΒΓΔ) = α · α = α^2 και $(\mathrm{AB\Delta}) = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2 \cdot 90^o}{360^o} = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{4}$.

$(X_1) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) - (\mathrm{AB\Delta}) = \alpha^2 - \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{4} = \dfrac{\alpha^2}{4} \cdot (4-\pi)$

β) Το εμβαδόν X_2 του ημικυκλίου με διάμετρο ΑΒ ισούται με:

$(X_2) = \dfrac{\pi \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot 180^o}{360^o} = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8}$ Το εμβαδόν X_3 θα υπολογισθεί αν από το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου αφαιρέσουμε το X_2 και θα έχουμε:

$X_3 = (\mathrm{AB\Delta}) - X_2 = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{4} - \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8} = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8}$.

γ) $X_2 - X_1 = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8} - \dfrac{\alpha^2}{4} \cdot (4-\pi) = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8} - \dfrac{2 \cdot \alpha^2}{8} \cdot (4-\pi) = \dfrac{\alpha^2}{8} \cdot [\pi - 2(4-\pi)] =$

$\dfrac{\alpha^2}{8} \cdot (\pi - 8 + 2\,\pi) = \dfrac{\alpha^2}{8} \cdot (3\,\pi - 8) > 0$ που σημαίνει ότι ισχύει $X_2 > X_1$