

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση

(<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

ΘΕΜΑ 2

Έγινε μια έρευνα με στόχο να μελετηθούν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των 33.495 ατόμων με ηλικίες από τα 40 έως τα 49 έτη, μιας συγκεκριμένης περιφέρειας της Ελλάδας. Η εταιρεία που έκανε την έρευνα, δεν ήταν δυνατόν να συλλέξει στοιχεία από όλους τους/τις κατοίκους της συγκεκριμένης περιφέρειας ηλικίας 40 έως 49. Έτσι, συνέλεξε στοιχεία από ένα δείγμα 1.000 από αυτά τα 33.495 άτομα, αντιπροσωπευτικό των 33.495 ατόμων.

Τα χαρακτηριστικά που μελέτησε η έρευνα ήταν:

- Η ηλικία τους (σε έτη),
- αν εργάζονταν (ναι ή όχι),
- ο πιο πρόσφατος τίτλος σπουδών που είχαν (απολυτήριο γυμνασίου, λυκείου, κτλ.),
- το επάγγελμά τους (αν εργάζονταν),
- πόσα έτη είχαν εργαστεί στο παρελθόν,
- ο χρόνος που έκαναν για να φτάσουν στην εργασίας τους, σε λεπτά (αν εργάζονταν),
- η οικογενειακή τους κατάσταση (άγαμοι-άγαμες, έγγαμοι-έγγαμες, κτλ.).

Ανάμεσα στα ευρήματα της έρευνας καταγράφηκαν τα εξής:

- Η επικρατούσα τιμή, όσο αφορά την ηλικία τους ήταν τα 46 έτη.
- Οι έγγαμοι-έγγαμες ήταν 623.
- Στην ερώτηση αν εργάζονταν, όλοι/-ες απάντησαν με «ναι» ή «όχι». Το 8% απάντησαν «όχι».

α) Ποιο ήταν το μέγεθος του πληθυσμού της έρευνας και ποιο του δείγματος που επέλεξε η εταιρεία; (Μονάδες 6)

β) Ποια από τα χαρακτηριστικά που μελέτησε η έρευνα ήταν ποσοτικά και ποια ποιοτικά; (Μονάδες 7)

γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

i. Η ηλικία, σε έτη, στην οποία βρίσκονται περισσότερα άτομα του δείγματος από όλες τις άλλες ηλικίες ήταν 46.

ii. Από τα ευρήματα στο δείγμα μπορούμε να συμπεράνουμε με ασφάλεια ότι η επικρατούσα τιμή της ηλικίας, σε έτη, όλων των κατοίκων της περιφέρειας ήταν 46.

iii. Το 92% των ατόμων που συμμετείχαν στην έρευνα απάντησαν ότι εργάζονταν.

iv. Έχουμε ενδείξεις ότι, από όλους/-ες τους/τις κατοίκους της περιφέρειας με ηλικίες από τα 40 έως τα 49 έτη, οι περισσότεροι/-ες ήταν έγγαμοι-έγγαμες. (Μονάδες 12)

α) Το μέγεθος του πληθυσμού ήταν 33.495. Το μέγεθος του δείγματος ήταν 1.000.

β) Τα χαρακτηριστικά, τα οποία μελέτησε η έρευνα χωρίζονται σε:

Ποσοτικά	Ποιοτικά
• Η ηλικία τους (σε έτη) • Πόσα έτη είχαν εργαστεί στο παρελθόν • Ο χρόνος που έκαναν να φτάσουν στην εργασίας τους (σε λεπτά)	• Αν εργάζονταν (ναι ή όχι) • Ο πιο πρόσφατος τίτλος σπουδών τους • Το επάγγελμά τους • Η οικογενειακή τους κατάσταση

γ)

i. Η πρόταση είναι σωστή (Σ), γιατί η επικρατούσα τιμή, όσο αφορά την ηλικία των ατόμων του δείγματος ήταν τα 46 έτη.

ii. Η πρόταση είναι λανθασμένη (Λ). Η επικρατούσα τιμή της ηλικίας, σε έτη, του δείγματος της έρευνας ήταν 46. Άρα τα συμπεράσματα, ακόμα και αν γενικευτούν σε όλο τον πληθυσμό, αφορούν την ηλικιακή ομάδα 40 – 49. Δεν γνωρίζουμε αν το ίδιο ισχύει για όλους τους κατοίκους της περιφέρειας, συνολικά.

iii. Η πρόταση είναι σωστή (Σ). Εφόσον, στην ερώτηση «αν εργάζονταν», το 8% των ατόμων που συμμετείχαν στην έρευνα απάντησαν «όχι», το υπόλοιπο 92% απάντησαν «ναι».

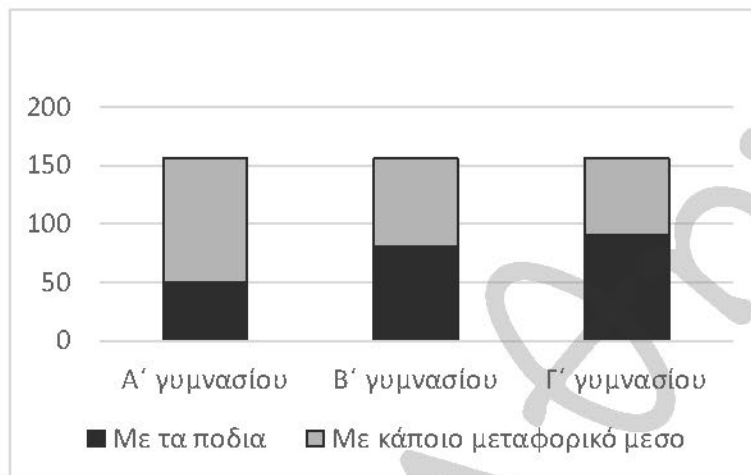
iv. Η πρόταση είναι σωστή (Σ). Εφόσον 623 από τα 1.000 άτομα είναι έγγαμα, αυτό ισχύει για το δείγμα των 1.000 ατόμων, το οποίο είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού (και μεγάλο σε σχέση με τον πληθυσμό). Άρα υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι τα αποτελέσματα μπορούν να γενικευτούν στον πληθυσμό, δηλαδή στα 33.495 άτομα.

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα γυμνάσιο στο κέντρο της Αθήνας, για μια έρευνα, όλα τα παιδιά κάθε τάξης απάντησαν στο εξής:

«Πώς έρχεστε συνήθως το πρωί στο σχολείο; Με τα πόδια ή με κάποιο μεταφορικό μέσο;»

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα.



Δίνεται ότι κάθε τάξη έχει 156 παιδιά.

α) Σε ποια από τις τρεις τάξεις του γυμνασίου απάντησαν τα λιγότερα παιδιά ότι έρχονται στο σχολείο με τα πόδια; (Μονάδες 9)

β) Δίνεται επιπλέον ότι τα παιδιά της Β' τάξης που απάντησαν «με τα πόδια» ήταν 80, ενώ τα παιδιά της Γ' τάξης που έδωσαν την ίδια απάντηση ήταν 90:

i. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας.

	Β' τάξη	Γ' τάξη
Παιδιά που απάντησαν ότι έρχονται στο σχολείο με τα πόδια		
Παιδιά που απάντησαν ότι έρχονται στο σχολείο με κάποιο μεταφορικό μέσο		

ii. Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί που φοιτά στη Β' τάξη του σχολείου. Ποια είναι η πιθανότητα να απάντησε ότι έρχεται στο σχολείο με μεταφορικό μέσο; (Μονάδες 16)

α) Όπως φαίνεται στο στοιβαγμένο ραβδόγραμμα, το μέρος της ράβδου στα αριστερά (Α' γυμνασίου), το οποίο αντιστοιχεί στην απάντηση «με τα πόδια» (δηλαδή το πιο σκούρο) είναι χαμηλότερο από το αντίστοιχο μέρος στις άλλες δύο ράβδους.

Άρα, στην Α' γυμνασίου απάντησαν τα λιγότερα παιδιά ότι έρχονται στο σχολείο με τα πόδια.

β)

i. Σύμφωνα με τα δεδομένα συμπληρώνουμε την δεύτερη γραμμή του πίνακα:

	Β' τάξη	Γ' τάξη
Παιδιά που απάντησαν ότι έρχονται στο σχολείο με τα πόδια	80	90
Παιδιά που απάντησαν ότι έρχονται στο σχολείο με κάποιο μεταφορικό μέσο		

Στη συνέχεια, εφόσον τα παιδιά κάθε τάξης ήταν 156, άρα, για την απάντηση «με κάποιο μεταφορικό μέσο» έχουμε:

- Για την Β' τάξη $156 - 80 = 76$.
- Για την Γ' τάξη $156 - 90 = 66$.

Άρα συμπληρώνουμε και την τελευταία γραμμή του πίνακα:

	Β' τάξη	Γ' τάξη
Παιδιά που απάντησαν ότι έρχονται στο σχολείο με τα πόδια	80	90
Παιδιά που απάντησαν ότι έρχονται στο σχολείο με κάποιο μεταφορικό μέσο	76	66

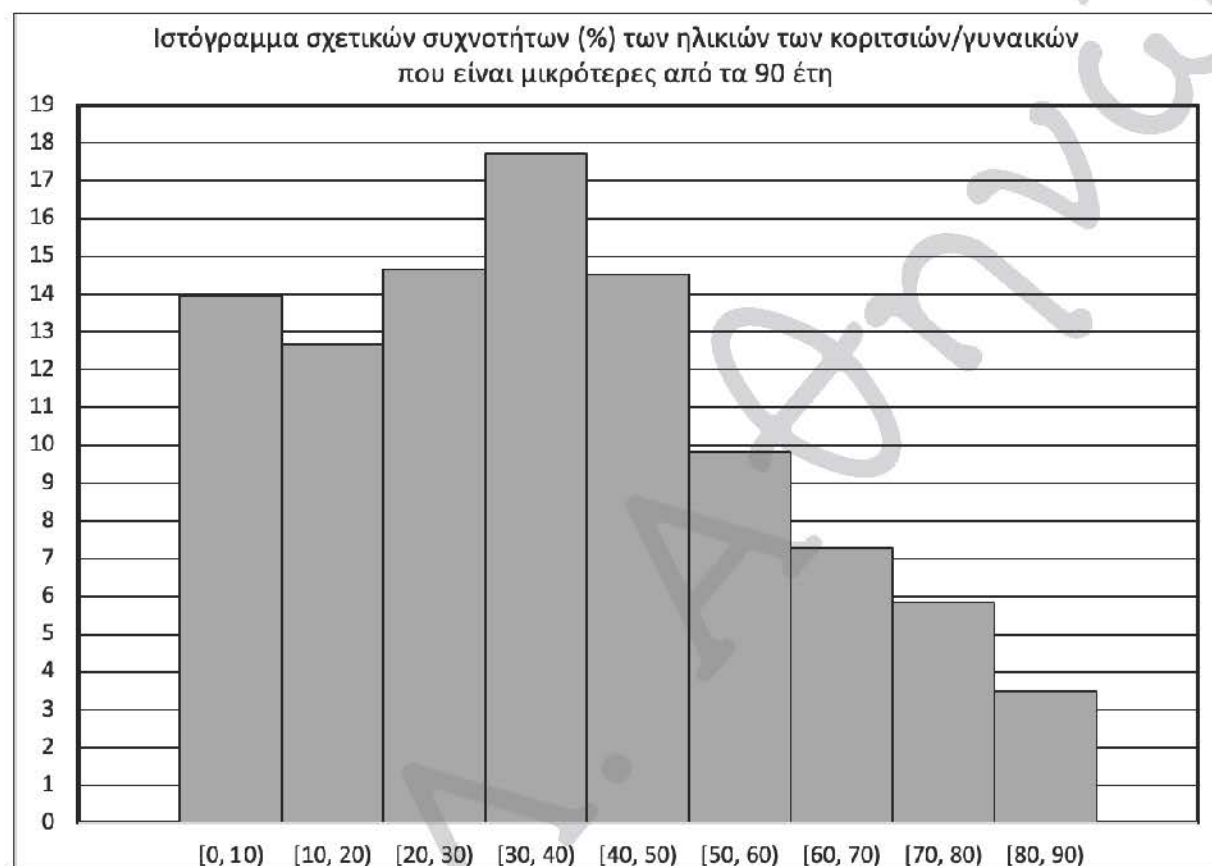
ii. Εφόσον επιλέγουμε το παιδί της Β' γυμνασίου τυχαία, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε παιδί από τα 156, της Β' γυμνασίου έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί.

Επομένως, από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε ότι η πιθανότητα το παιδί που επιλέξαμε να απάντησε ότι έρχεται στο σχολείο με τα πόδια είναι ίση με:

$$\frac{80}{156} = \frac{20}{39}$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων (%) παρουσιάζονται ομαδοποιημένες σε κλάσεις οι ηλικίες, σε έτη, ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος 10.000 κοριτσιών ή γυναικών που είναι μικρότερες από τα 90 έτη, μιας γεωγραφικής περιοχής της Ελλάδας. Όλα τα κορίτσια και οι γυναίκες της γεωγραφικής περιοχής ήταν περίπου 1 εκατομμύριο.



Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας:

α) Ποια ήταν η κλάση με τις λιγότερες παρατηρήσεις; (Μονάδες 5)

β) Το ορθογώνιο που αντιστοιχεί στην κλάση $[10, 20)$ έχει ύψος λίγο μικρότερο από 13.

Πώς το ερμηνεύετε; (Μονάδες 5)

γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

i. Το δείγμα της έρευνας είχε πλήθος περίπου 1 εκατομμύριο.

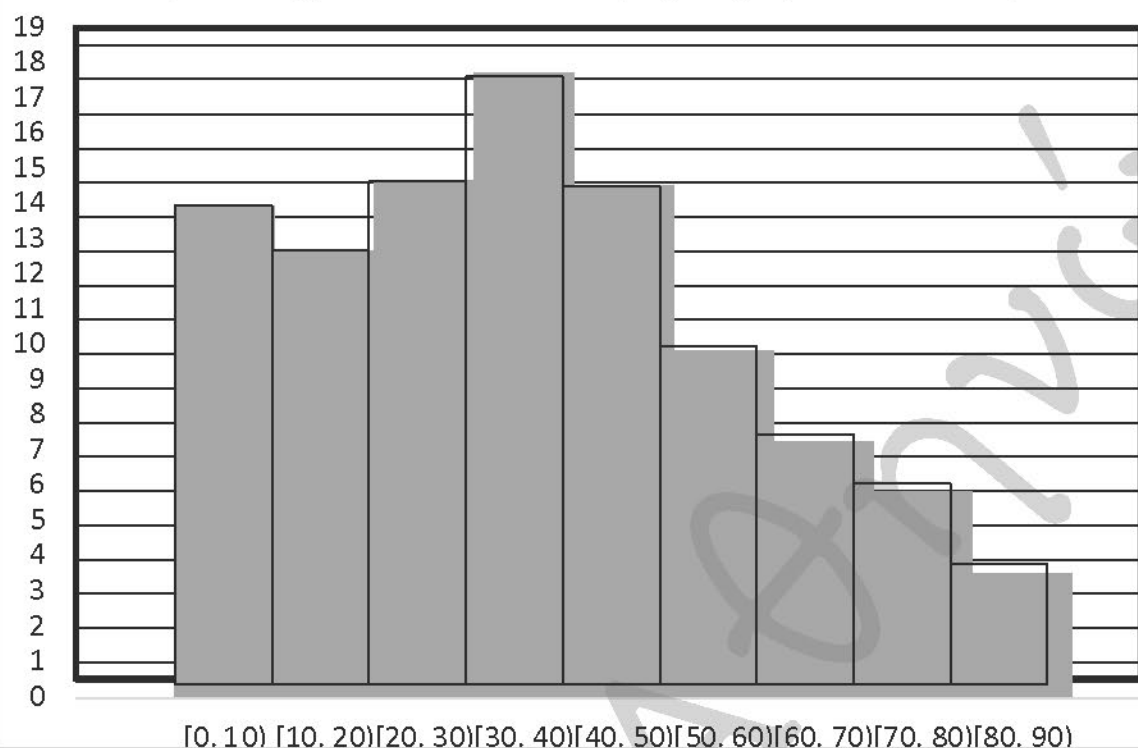
ii. Η κλάση των κοριτσιών/γυναικών με τις μικρότερες ηλικίες, σε έτη, είναι η $[80, 90)$.

iii. Οι κάτοικοι (άνδρες και γυναίκες) της γεωγραφικής περιοχής, με ηλικία, σε έτη, που ανήκει στην κλάση $[30, 40)$ είναι λίγο λιγότεροι από το 18%, όλου του πληθυσμού της περιοχής.

iv. Υπάρχει κλάση που να αντιστοιχεί στο 10%, περίπου, των παρατηρήσεων του δείγματος.

v. Λίγο περισσότερο από το 3% του δείγματος της έρευνας είχαν ηλικία, σε έτη, μεγαλύτερη ή ίση με 80 και μικρότερη από 90. (Μονάδες 15)

Ιστογράμμα σχετικών συχνοτήτων (%) των ηλικιών των κοριτσιών/γυναικών που είναι μικρότερες από τα 90 έτη



α) Η κλάση με τις λιγότερες παρατηρήσεις ήταν η $[80, 90)$, γιατί αντιστοιχεί στο ορθογώνιο του ιστογράμματος με το μικρότερο ύψος.

β) Το ποσοστό των ατόμων του δείγματος με ηλικία, σε έτη, που ανήκει στο διάστημα $[10, 20)$ ήταν λίγο μικρότερο από 13%. Άρα, εφόσον το δείγμα έχει μέγεθος 10.000, οι γυναίκες/κορίτσια του δείγματος με ηλικία, σε έτη, που ανήκει στο διάστημα $[10, 20)$ ήταν

λίγο λιγότερες από: $\frac{13}{100} \cdot 10.000 = 1.300$

- γ)
- Η πρόταση είναι λανθασμένη (Λ), γιατί το δείγμα είχε πλήθος 10.000.
 - Η πρόταση είναι λανθασμένη (Λ), γιατί αυτή είναι η κλάση με τις μεγαλύτερες ηλικίες. Οι μικρότερες ηλικίες ανήκουν στην κλάση $[0, 10)$.
 - Η πρόταση είναι λανθασμένη (Λ). Τα αποτελέσματα της έρευνας ισχύουν για το δείγμα και, αν γενικευθούν, αυτό θα αφορά το σύνολο των κοριτσιών ή γυναικών που είναι μικρότερες από τα 90 έτη, της ίδιας γεωγραφικής περιοχής της Ελλάδας και όχι το σύνολο του πληθυσμού της γεωγραφικής περιοχής αυτής.
 - Η πρόταση είναι σωστή (Σ). Είναι η κλάση $[50, 60)$.
 - Η πρόταση είναι σωστή (Σ), σύμφωνα με ύψος του ορθογωνίου $[80, 90)$.

ΘΕΜΑ 2

Ρωτήσαμε μαθητές ενός τμήματος «πόσο χρόνο χρειάζονται για την διαδρομή από το σπίτι τους μέχρι το σχολείο» και οι απαντήσεις που πήραμε φαίνονται στο διπλανό ιστόγραμμα συχνοτήτων. Όπου ο οριζόντιος άξονας παριστάνει χρόνο σε λεπτά και ο κατακόρυφος μαθητές.



α) Να αντιγράψετε τον επόμενο πίνακα συχνοτήτων στο γραπτό σας και να τον συμπληρώσετε. (Μονάδες 5)

Κλάσεις με χρόνους (min)	Συχνότητα (μαθητές)
[0,5)	
[5,10)	
[10,15)	
[15,20)	
[20,25)	
Σύνολο	

β) Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα με τις σχετικές συχνότητες ($f_i, f_i\%$). (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που αφιερώνουν τουλάχιστον 15 λεπτά για αυτήν τη διαδρομή. (Μονάδες 5)

δ) Να μεταφέρετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων στο γραπτό σας και να σχεδιάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος.

Κλάσεις με χρόνους (min)	Συχνότητα (μαθητές)
[0,5)	2
[5,10)	4
[10,15)	6
[15,20)	8
[20,25)	5
Σύνολο	25

β) Ισχύει:

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{2}{25} = 0,08, \quad f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{4}{25} = 0,16, \quad f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{6}{25} = 0,24, \quad f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{8}{25} = 0,32$$

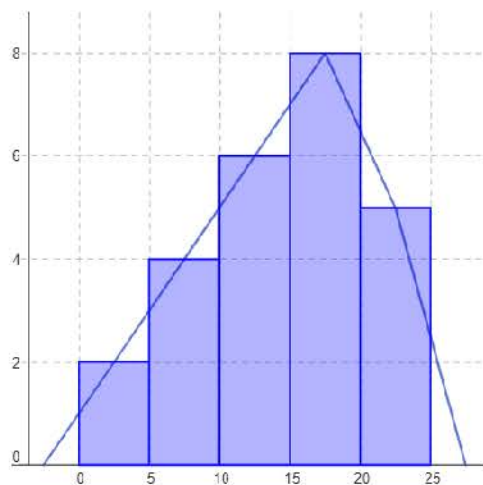
$$\text{και } f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{5}{25} = 0,20.$$

Οπότε ο πίνακας που προκύπτει είναι:

Κλάσεις με χρόνους (min)	Συχνότητα (μαθητές)	f_i	$f_i\%$
[0,5)	2	0,08	8%
[5,10)	4	0,16	16%
[10,15)	6	0,24	24%
[15,20)	8	0,32	32%
[20,25)	5	0,20	20%
Σύνολο	25	1,00	100%

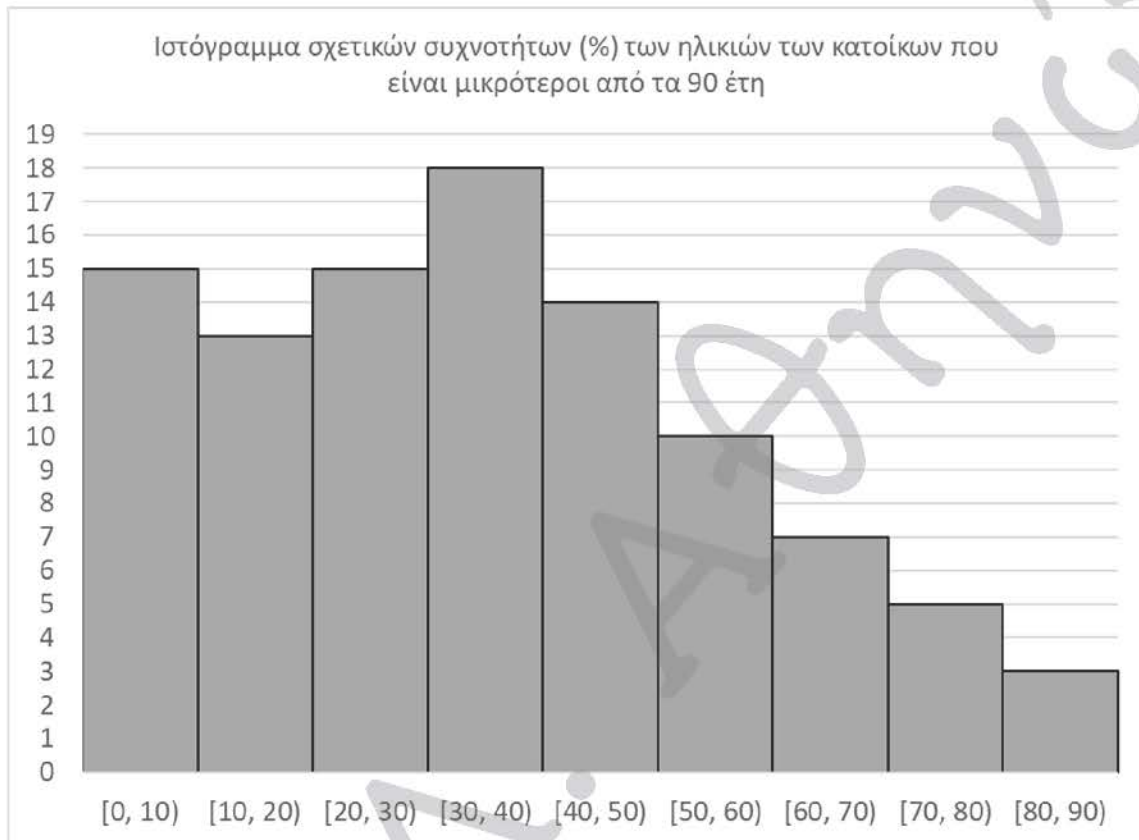
γ) Οι μαθητές που αφιερώνουν τουλάχιστον 15 λεπτά για την διαδρομή αυτή ανήκουν στις κλάσεις [15,20) και [20,25) όπου τα αντίστοιχα ποσοστά είναι 32% και 20%, οπότε συνολικά είναι 52%.

δ) Θεωρούμε δύο επιπλέον κλάσεις ίσου πλάτους, μια στην αρχή και μια στο τέλος, με μηδενική συχνότητα. Ενώνουμε τα μέσα των άνω βάσεων και προκύπτει το πολύγωνο συχνοτήτων.



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων (%) παρουσιάζονται οι ηλικίες όλων των κατοίκων μιας περιοχής της Ελλάδας, που είναι μικρότεροι/-ες από τα 90 έτη ομαδοποιημένες σε κλάσεις.



Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας:

α) Ποια ήταν η κλάση με τις περισσότερες παρατηρήσεις; (Μονάδες 4)

β) Οι κλάσεις $[0, 10)$ και $[20, 30)$ έχουν το ίδιο ύψος. Πώς το ερμηνεύετε; (Μονάδες 5)

γ) Οι παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένες. Να εξηγήσετε γιατί.

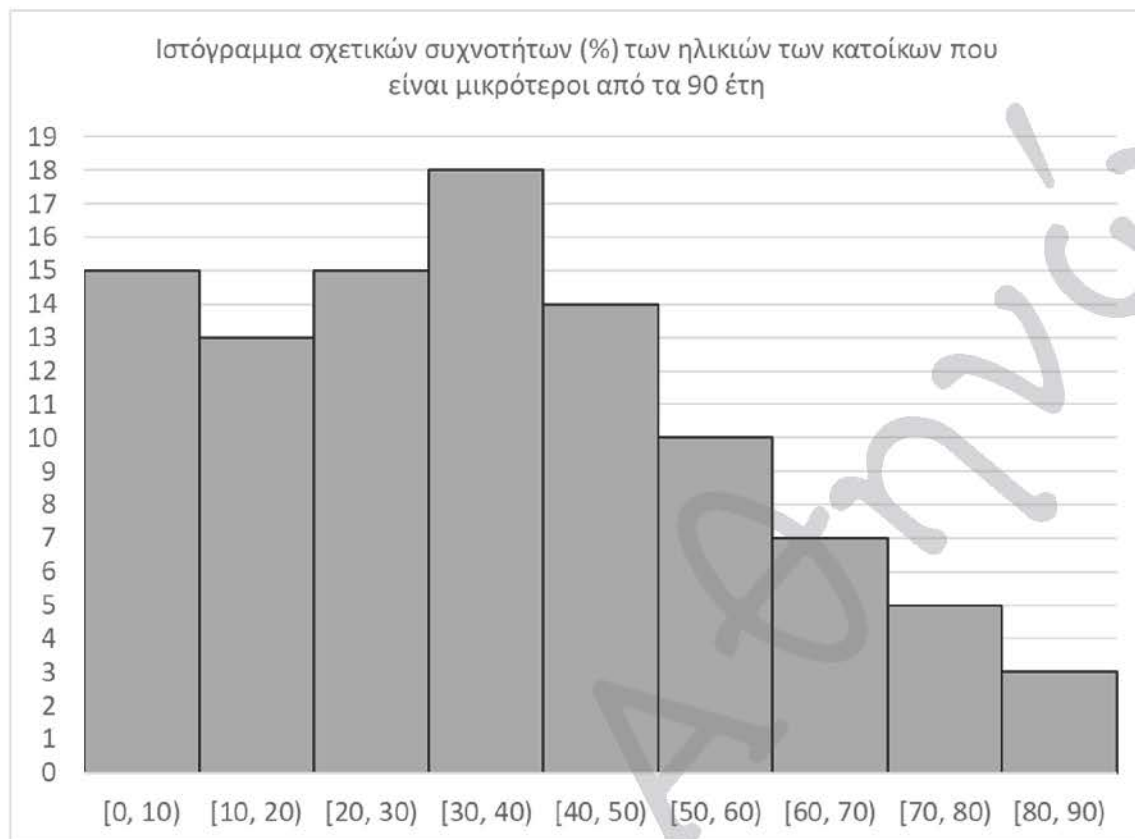
i. Η κλάση με τις λιγότερες παρατηρήσεις είναι η $[0, 10)$.

ii. Η κλάση με τις μικρότερες ηλικίες είναι η $[80, 90)$.

iii. Δεν υπάρχει κλάση που να αντιστοιχεί στο 10% των παρατηρήσεων.

iv. Το 18% των κατοίκων της παραπάνω περιοχής ήταν μικρότεροι/-ες από τα 40 έτη.

(Μονάδες 16)



α) Η κλάση με τις περισσότερες παρατηρήσεις είναι η $[30, 40)$, γιατί αντιστοιχεί στο ορθογώνιο του ιστογράμματος με το μεγαλύτερο ύψος, το οποίο είναι 18.

β) Και οι δύο κλάσεις $[0, 10)$ και $[20, 30)$ έχουν ύψος 15. Αυτό σημαίνει ότι η κάθε μία αντιστοιχεί στο ίδιο ποσοστό, στο 15% των κατοίκων της περιοχής, οι οποίοι/-ες έχουν ηλικία μικρότερη από 90 έτη.

γ)

i. Η κλάση με τις λιγότερες παρατηρήσεις είναι η $[80, 90)$, η οποία αντιστοιχεί στο ορθογώνιο με το μικρότερο ύψος.

ii. Αυτή είναι η κλάση με τις μεγαλύτερες ηλικίες. Οι μικρότερες ηλικίες ανήκουν στην κλάση $[0, 10)$.

iii. Η κλάση $[50, 60)$ αντιστοιχεί στο 10% των παρατηρήσεων, γιατί το ύψος του αντίστοιχου ορθογωνίου είναι 10.

iv. Οι κάτοικοι που ήταν μικρότεροι/-ες από 40 έτη ήταν περισσότεροι από 18%. Οι ηλικίες τους ανήκουν στις κλάσεις $[0, 10)$, $[10, 20)$, $[20, 30)$ και $[30, 40)$.

Άρα ήταν $15\% + 13\% + 15\% + 18\% = 61\%$.

ΘΕΜΑ 2

150 άτομα συμμετείχαν σε έναν διαγωνισμό παζλ, όπου ο στόχος είναι η συναρμολόγηση ενός παζλ στο μικρότερο δυνατό χρόνο. Αφού καταγράφηκε ο χρόνος σε λεπτά, που χρειάστηκε το κάθε άτομο για τη συναρμολόγηση του παζλ, τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν με το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων.

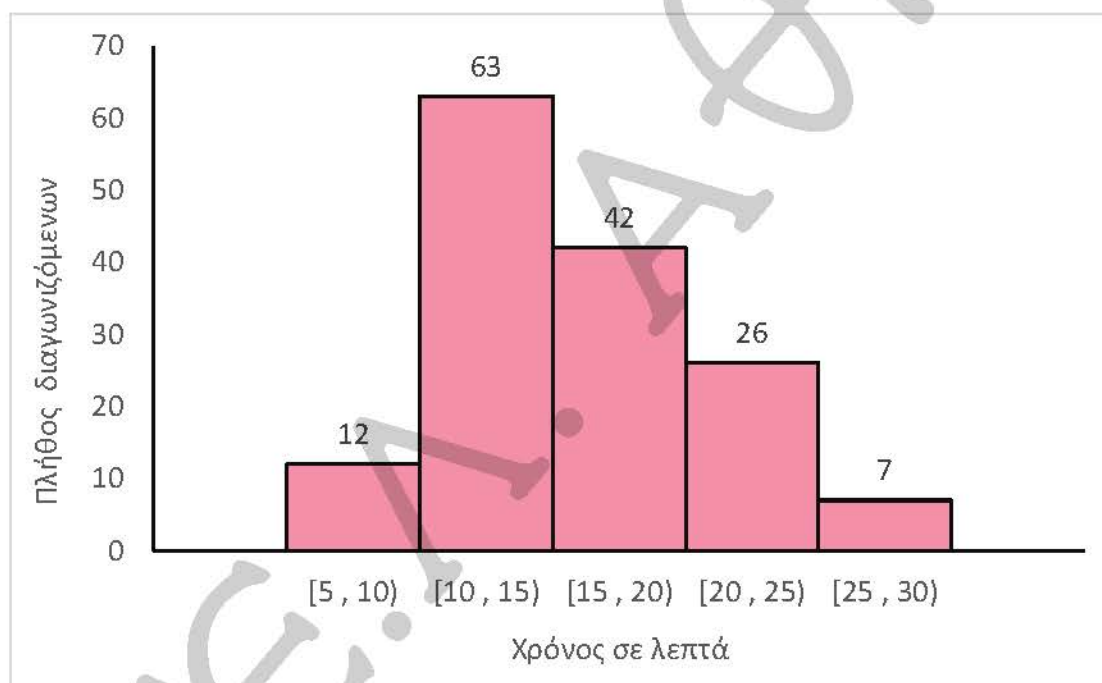
α) Για την παραπάνω έρευνα:

i. ποιο είναι το μέγεθος του δείγματος; (Μονάδες 4)

ii. ποια είναι η μεταβλητή του δείγματος και ποιο είναι το είδος της; (Μονάδες 5)

β) Πόσα άτομα συναρμολόγησαν το παζλ, σε χρόνο λιγότερο από 20 λεπτά; (Μονάδες 8)

γ) Τα άτομα που έκαναν χρόνο λιγότερο από 10 λεπτά, προκρίνονται στην επόμενη φάση του διαγωνισμού. Ποιο είναι το ποσοστό αυτών των ατόμων; (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) i. Το μέγεθος του δείγματος είναι 150 άτομα.

ii. Η μεταβλητή του δείγματος είναι ο «χρόνος» σε λεπτά, που χρειάστηκε το κάθε άτομο για τη συναρμολόγηση του παζλ. Είναι ποσοτική μεταβλητή και συνεχής αφού μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος.

β) Τα άτομα που συναρμολόγησαν το παζλ, σε χρόνο λιγότερο από 20 λεπτά, είναι όσοι/όσες ανήκουν στις κλάσεις $[5, 10)$, $[10, 15)$ και $[15, 20)$. Οπότε προσθέτοντας τις συχνότητες αυτών των κλάσεων προκύπτει ότι είναι $12 + 63 + 42 = 117$.

γ) Τα άτομα που έκαναν χρόνο λιγότερο από 10 λεπτά, είναι όσοι/όσες ανήκουν στην κλάση $[5, 10)$ που είναι 12. Επομένως, το ποσοστό των ατόμων που προκρίνονται στην επόμενη φάση του διαγωνισμού, είναι η σχετική συχνότητα της κλάσης $[5, 10)$ η οποία είναι

$$\frac{12}{150} = 0,08 = 8\%.$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω χρονόγραμμα φαίνεται η χρονική εξέλιξη της χρήσης του διαδικτύου των νοικοκυριών στη χώρα μας, από το 2012 έως και το 2022 (Πηγή: ΕΛΣΤΑΤ, Δεκέμβριος 2022).

α) Ποιο ποσοστό νοικοκυριών είχαν πρόσβαση στο διαδίκτυο από την κατοικία τους:

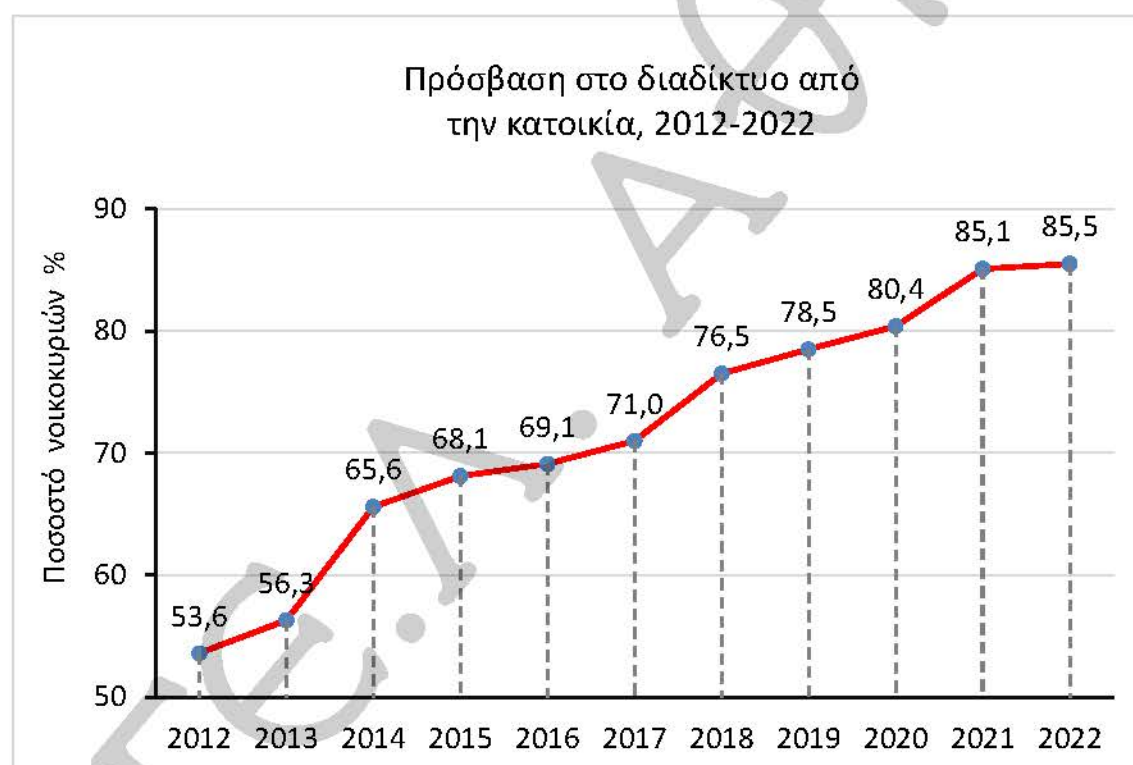
i. το έτος 2012; (Μονάδες 6)

ii. το έτος 2022; (Μονάδες 6)

β) Στην πρόσβαση στο διαδίκτυο από την κατοικία, ποιο έτος, σε σχέση με το προηγούμενο έτος, σημειώθηκε:

i. η μεγαλύτερη αύξηση; (Μονάδες 6)

ii. η μικρότερη αύξηση; (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α)

i. Το ποσοστό %, των νοικοκυριών που είχαν πρόσβαση στο διαδίκτυο από την κατοικία τους το έτος 2012, ήταν 53,6.

ii. Το ποσοστό %, των νοικοκυριών που είχαν πρόσβαση στο διαδίκτυο από την κατοικία τους το έτος 2022, ήταν 85,5.

β)

i. Στην πρόσβαση στο διαδίκτυο από την κατοικία, η μεγαλύτερη αύξηση, σημειώθηκε το έτος 2014, σε σχέση με το 2013, κατά $65,6 - 56,3 = 9,3$ ποσοστιαίες μονάδες.

ii. Στην πρόσβαση στο διαδίκτυο από την κατοικία, η μικρότερη αύξηση, σημειώθηκε το έτος 2022, σε σχέση με το 2021, κατά $85,5 - 85,1 = 0,4$ ποσοστιαίες μονάδες.

ΘΕΜΑ 4

Σ' έναν διαγωνισμό Στατιστικής, συμμετείχαν 5 αγόρια και 30 κορίτσια του 1^{ου} Λυκείου μιας πόλης και 15 αγόρια και 10 κορίτσια του 2^{ου} Λυκείου της πόλης. Ο αριθμός των επιτυχόντων και των επιτυχουσών του διαγωνισμού των δύο Λυκείων, δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός επιτυχόντων και επιτυχουσών			
		Φύλο	
		Αγόρια	Κορίτσια
Σχολείο	1 ^ο Λύκειο	1	20
	2 ^ο Λύκειο	6	8

α) Να αποδείξετε ότι τα ποσοστά επιτυχίας ανά φύλο, του 2^{ου} Λυκείου είναι:

- i. 40% μεταξύ των αγοριών, (Μονάδες 5)
- ii. 80% μεταξύ των κοριτσιών. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα ποσοστά επιτυχίας ανά φύλο, του 1^{ου} Λυκείου είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά του 2^{ου} Λυκείου. (Μονάδες 9)

γ) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι, εφόσον τα ποσοστά επιτυχίας των αγοριών και των κοριτσιών του 1^{ου} Λυκείου είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά των αγοριών και των κοριτσιών του 2^{ου} Λυκείου, τότε και το συνολικό ποσοστό επιτυχίας του 1^{ου} Λυκείου, θα είναι και αυτό μικρότερο από το αντίστοιχο συνολικό ποσοστό επιτυχίας του 2^{ου} Λυκείου. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Γιάννη; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) i. Τα αγόρια του 2^{ου} Λυκείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό είναι 15 και από αυτά επιτυχόντες είναι 6. Επομένως το ποσοστό επιτυχίας μεταξύ των αγοριών, του 2^{ου} Λυκείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό, είναι $\frac{6}{15} = 0,4 = 40\%$.

ii. Τα κορίτσια του 2^{ου} Λυκείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό είναι 10 και από αυτά επιτυχούσες είναι 8. Επομένως το ποσοστό επιτυχίας μεταξύ των κοριτσιών, του 2^{ου} Λυκείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό, είναι $\frac{8}{10} = 0,8 = 80\%$.

β) Τα αγόρια του 1^{ου} Λυκείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό είναι 5 και από αυτά επιτυχών είναι 1. Άρα το ποσοστό επιτυχίας μεταξύ των αγοριών, του 1^{ου} Λυκείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό, είναι $\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$, το οποίο είναι μικρότερο από το αντίστοιχο ποσοστό επιτυχίας των αγοριών του 2^{ου} Λυκείου που είναι 40%.

Τα κορίτσια του 1^{ου} Λυκείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό είναι 30 και από αυτά επιτυχούσες είναι 20. Άρα το ποσοστό επιτυχίας μεταξύ των κοριτσιών, του 1^{ου} Λυκείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό, είναι $\frac{20}{30} \cong 0,667 = 66,7\%$, το οποίο είναι μικρότερο από το αντίστοιχο ποσοστό επιτυχίας των κοριτσιών του 2^{ου} Λυκείου που είναι 80%.

Επομένως, τα ποσοστά επιτυχίας ανά φύλο του 1^{ου} Λυκείου, είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά του 2^{ου} Λυκείου.

γ) Συνολικά οι μαθητές/μαθήτριες του 1^{ου} Λυκείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό είναι $5 + 30 = 35$ και οι επιτυχόντες/επιτυχούσες είναι $1 + 20 = 21$. Άρα το ποσοστό επιτυχίας μεταξύ όλων των παιδιών του 1^{ου} Λυκείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό, είναι

$$\frac{21}{35} = 60\%.$$

Συνολικά οι μαθητές/μαθήτριες του 2^{ου} Λυκείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό είναι $15 + 10 = 25$ και οι επιτυχόντες/επιτυχούσες είναι $6 + 8 = 14$. Άρα το ποσοστό επιτυχίας μεταξύ όλων των παιδιών του 2^{ου} Λυκείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό, είναι

$$\frac{14}{25} = 56\%.$$

Επομένως, δε θα συμφωνήσουμε με τον ισχυρισμό του Γιάννη, αφού το συνολικό ποσοστό επιτυχίας του 1^{ου} Λυκείου είναι 60%, το οποίο είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ποσοστό επιτυχίας του 2^{ου} Λυκείου, που είναι 56%.

Σχόλιο:

Παρατηρούμε ότι τα κορίτσια φαίνεται γενικά, να τα πηγαίνουν πολύ καλύτερα από τα

αγόρια, αφού το συνολικό ποσοστό επιτυχίας των κοριτσιών είναι $\frac{20+8}{30+10} = \frac{28}{40} = 70\%$,

έναντι του συνολικού ποσοστού επιτυχίας των αγοριών που είναι $\frac{1+6}{5+15} = \frac{7}{20} = 35\%$.

Επιπλέον, το 1^ο Λύκειο συμμετέχει στον διαγωνισμό με 30 κορίτσια έναντι 5 αγοριών,

δηλαδή με λόγο $\frac{30}{5} = \frac{6}{1}$ ή 6 κορίτσια προς 1 αγόρι.

Από την άλλη πλευρά, το 2^ο Λύκειο συμμετέχει στον διαγωνισμό με 10 κορίτσια έναντι 15

αγοριών, δηλαδή με λόγο $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ ή 2 κορίτσια προς 3 αγόρια, πολύ μικρότερο από τον

αντίστοιχο λόγο του 1^{ου} Λυκείου.

Επομένως, το συνολικό ποσοστό επιτυχίας του 1^{ου} Λυκείου, δικαιολογείται να είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο συνολικό ποσοστό επιτυχίας του 2^{ου} Λυκείου.

ΘΕΜΑ 4

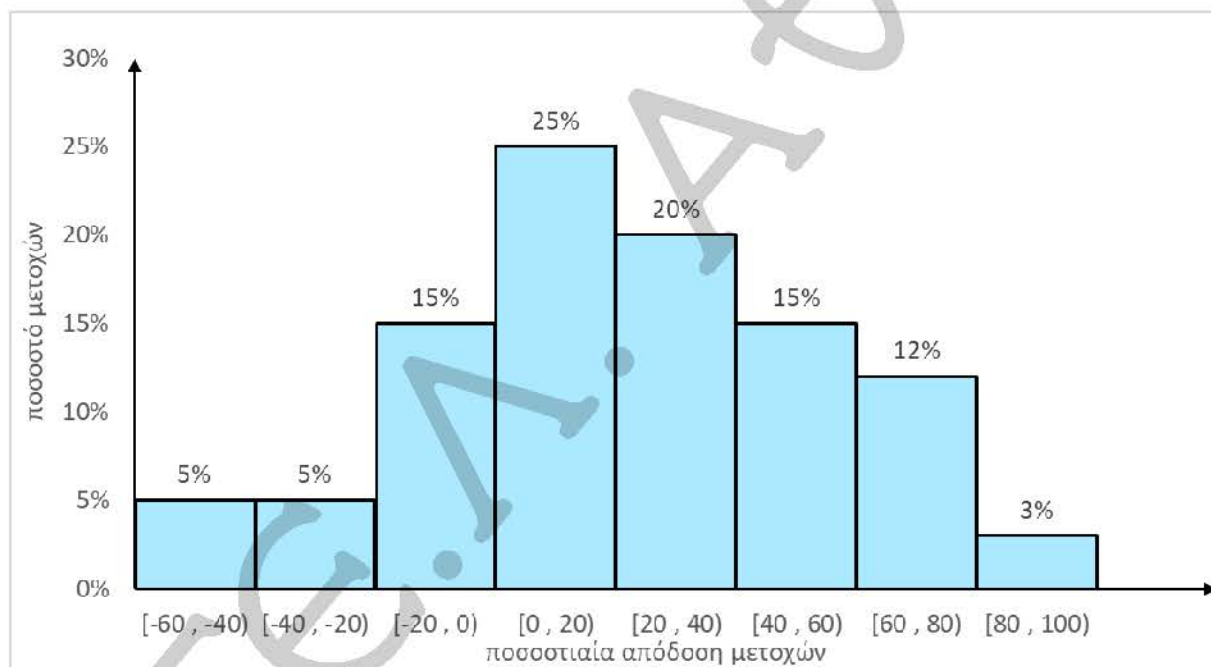
Το παρακάτω ιστόγραμμα δείχνει την κατανομή των ποσοσטיαίων ετήσιων αποδόσεων, όλων των μετοχών που είναι εισηγμένες σε ένα Χρηματιστήριο. Για παράδειγμα, η απόδοση για μια μετοχή -20 σημαίνει μείωση της τιμής της κατά 20% , ενώ η απόδοση 20 σημαίνει αύξηση της τιμής της κατά 20% .

α) Μεταξύ ποιων τιμών είναι η μικρότερη ποσοστιάα ετήσια απόδοση και μεταξύ ποιων τιμών είναι η μεγαλύτερη; (Μονάδες 7)

β) Επιλέγουμε τυχαία μία μετοχή. Να βρείτε τις πιθανότητες για αυτή τη μετοχή:

- η τιμή της να αυξηθήκε, αλλά η ποσοστιάα αύξηση είναι μικρότερη από 20% ,
- η τιμή της να μειώθηκε,
- η τιμή της να μεταβλήθηκε το πολύ κατά 20% .

(Μονάδες 18)



ΛΥΣΗ

α) Η μικρότερη ετήσια απόδοση είναι στην πρώτη κλάση του ιστογράμματος από αριστερά, την $[-60, -40)$ άρα είναι μείωση της τιμής μιας μετοχής μεταξύ 60% και 40%.

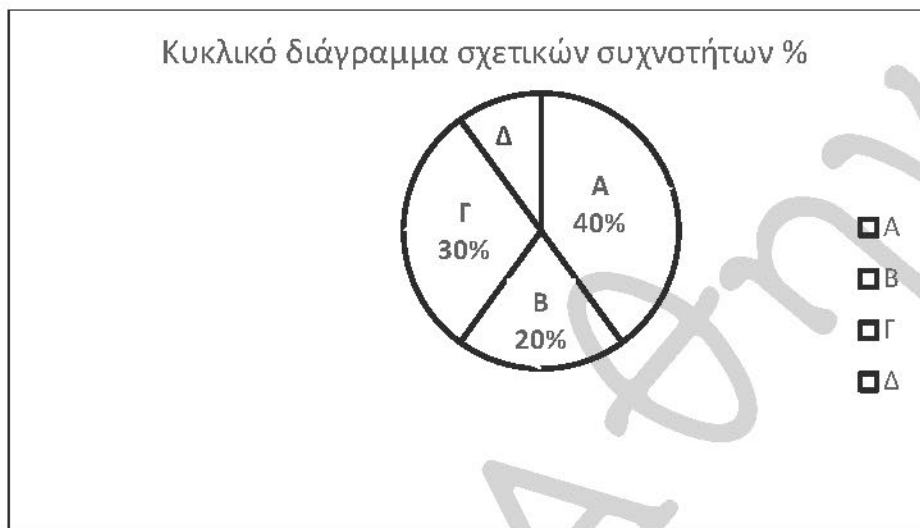
Η μεγαλύτερη ετήσια απόδοση είναι στην πρώτη κλάση του ιστογράμματος από δεξιά, την $[80, 100)$ άρα είναι αύξηση της τιμής μιας μετοχής μεταξύ 80% και 100%.

β) Επειδή η επιλογή της μετοχής γίνεται τυχαία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλες οι μετοχές είναι εξίσου πιθανές να επιλεγούν. Άρα από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε:

- i. Η πιθανότητα η τιμή της μετοχής να αυξήθηκε, αλλά η ποσοστιαία αύξηση είναι μικρότερη από 20%, είναι ίση με τη σχετική συχνότητα της κλάσης $[0, 20)$ που είναι 25%. Άρα η πιθανότητα είναι 0,25.
- ii. Η πιθανότητα η τιμή της μετοχής να μειώθηκε, είναι ίση με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων των κλάσεων $[-60, -40)$, $[-40, -20)$ και $[-20, 0)$ που είναι $5\% + 5\% + 15\% = 25\%$. Άρα η πιθανότητα είναι 0,25.
- iii. Η πιθανότητα η τιμή της μετοχής να μεταβλήθηκε το πολύ κατά 20%, είναι ίση με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων των κλάσεων $[-20, 0)$ και $[0, 20)$ που είναι $15\% + 25\% = 40\%$. Άρα η πιθανότητα είναι 0,4.

ΘΕΜΑ 2

Στη σχολική εκδρομή ενός Δημοτικού Σχολείου πήγαν ορισμένα παιδιά από κάθε μια από τις τάξεις Α', Β', Γ' και Δ'. Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παριστάνονται αυτά τα παιδιά ανά τάξη, ως ποσοστό επί του συνόλου των παιδιών που πήγαν στην εκδρομή.



α) Με τη βοήθεια του κυκλικού διαγράμματος να απαντήσετε στο εξής: Από ποια τάξη, από τις Α', Β', Γ' ή Δ' ήταν τα περισσότερα στην εκδρομή και από ποια τα λιγότερα;

(Μονάδες 8)

β) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

Τάξη	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
A	
B	
Γ	
Δ	
Σύνολο	

(Μονάδες 10)

γ) Να σχεδιάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων %.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ο μικρότερος κυκλικός τομέας του κυκλικού διαγράμματος είναι ο Δ, άρα τα παιδιά της Δ' τάξης ήταν τα λιγότερα στην εκδρομή.

Αντίστοιχα, ο μεγαλύτερος κυκλικός τομέας είναι ο Α, άρα τα παιδιά της Α' τάξης ήταν τα περισσότερα στην εκδρομή.

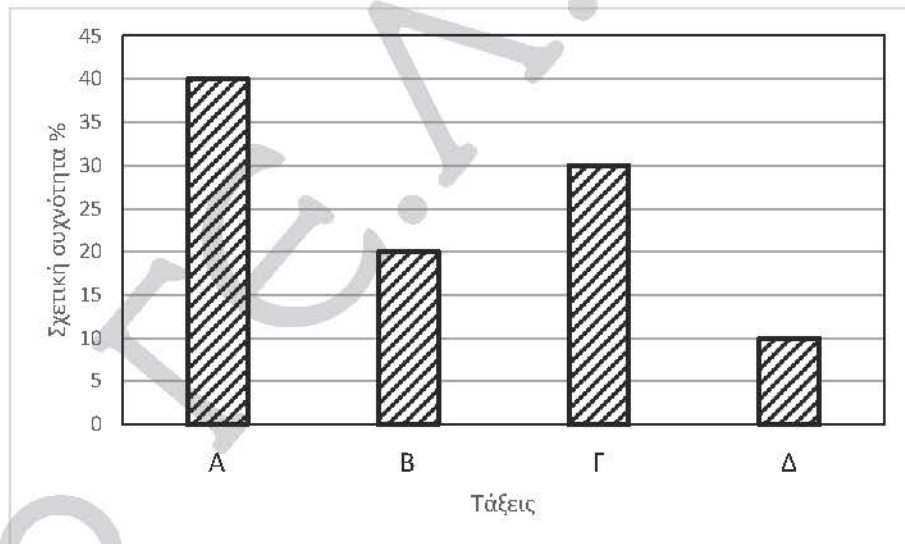
β) Για τις τάξεις Α', Β' και Γ', οι σχετικές συχνότητες % είναι 40, 20 και 30, αντίστοιχα, σύμφωνα με το κυκλικό διάγραμμα.

Για την Δ' τάξη, η σχετική συχνότητα % είναι $100 - (40 + 20 + 30) = 10$.

Άρα, συμπληρώνουμε τον πίνακα:

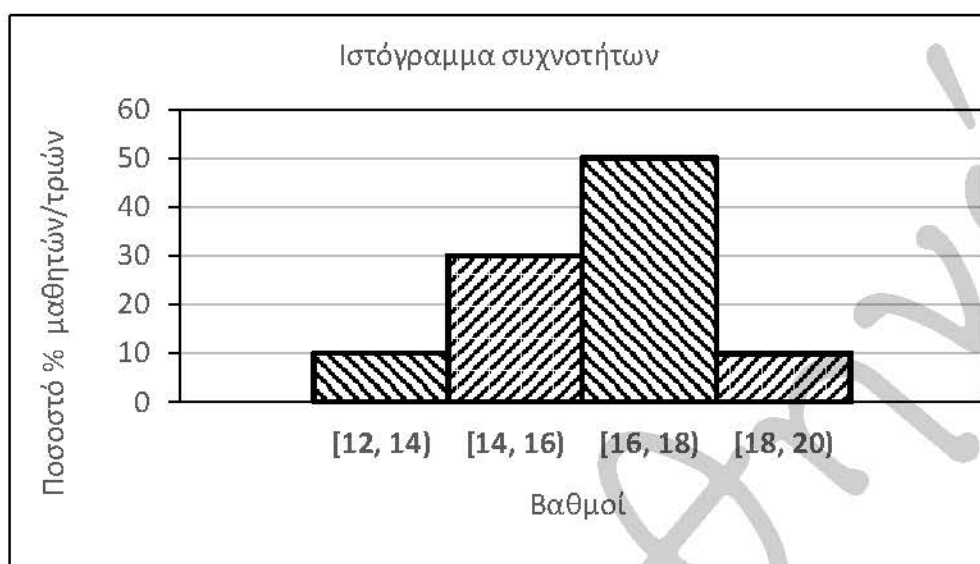
Τάξη	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
Α	40
Β	20
Γ	30
Δ	10
Σύνολο	100

γ) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω στοιχεία σχεδιάζουμε το ζητούμενο ραβδόγραμμα.



ΘΕΜΑ 2

Το παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων % αντιστοιχεί στους βαθμούς 50 μαθητών και μαθητριών της Β' τάξης ενός Λυκείου, στο μάθημα της Λογοτεχνίας για το Α' τετράμηνο.



α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων. (Μονάδες 10)

Κλάσεις με τους βαθμούς	Συχνότητα n_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
[12, 14)		
[14, 16)		
[16, 18)		
[18, 20)		
Σύνολο		

β) Τι ποσοστό των μαθητών ή μαθητριών έχουν βαθμό:

- i. 18 ή περισσότερο. (Μονάδες 4)
- ii. μικρότερο από 14. (Μονάδες 4)
- iii. τουλάχιστον 14. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Αντλώντας στοιχεία από το ιστόγραμμα συχνοτήτων συμπληρώνουμε την στήλη «σχετική συχνότητα $f_i\%$ ».

Εφόσον οι μαθητές και μαθήτριες είναι 50, τότε κάθε συχνότητα αντιστοιχεί στο μισό της αντίστοιχης σχετική συχνότητας %, δηλαδή $v_i = (f_i\%):2$.

Π.χ. $v_1 = (f_1\%):2 = 10:2 = 5$.

Ομοίως συμπληρώνουμε τη στήλη «συχνότητα v_i ».

Κλάσεις με τους βαθμούς	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
[12, 14)	5	10
[14, 16)	15	30
[16, 18)	25	50
[18, 20)	5	10
Σύνολο	50	100

β) i. Βαθμό 18 ή περισσότερο έχουν οι μαθητές ή οι μαθήτριες που οι βαθμοί τους ανήκουν στην κλάση [18, 20), άρα 10%.

ii. Βαθμό μικρότερο από 14 έχουν οι μαθητές ή οι μαθήτριες που οι βαθμοί τους ανήκουν στην κλάση [12, 14), άρα 10%.

iii. Βαθμό τουλάχιστον 14 έχουν οι μαθητές ή οι μαθήτριες που οι βαθμοί τους ανήκουν στις κλάσεις [14, 16), [16, 18) και [18, 20). Η', αλλιώς εκείνοι και εκείνες που δεν ανήκουν στην κλάση [12, 14), άρα $100\% - 10\% = 90\%$.

ΘΕΜΑ 4

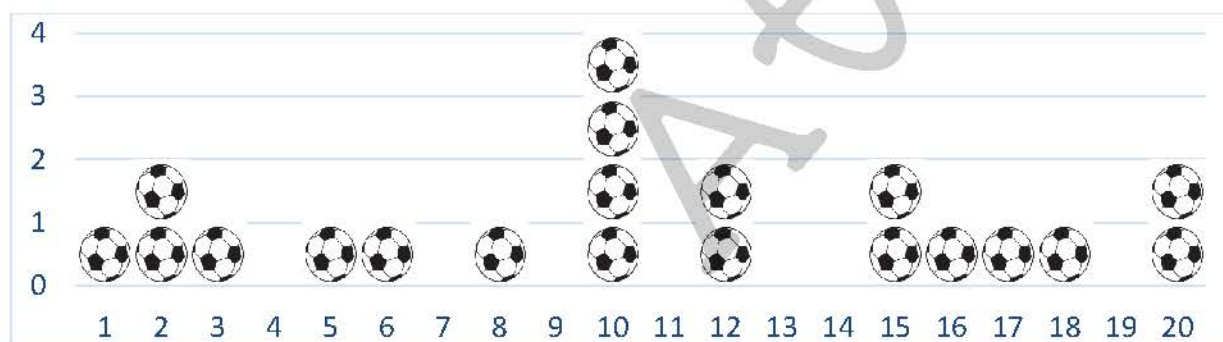
Ο Λευτέρης αγωνίζεται σε μία ομάδα ποδοσφαίρου. Κατά τη διάρκεια του τελευταίου πρωταθλήματος η ομάδα του έδωσε 20 αγώνες, στους οποίους ο Λευτέρης σε έναν αγώνα δεν πέτυχε γκολ, σε έναν αγώνα πέτυχε 2 γκολ και στους υπόλοιπους δεκαοχτώ αγώνες πέτυχε 1 γκολ στον καθένα από αυτούς.

α) Να αποδείξετε ότι:

- ο Λευτέρης πέτυχε κατά μέσο όρο 1 γκολ ανά αγώνα, (Μονάδες 5)
- η τυπική απόκλιση των γκολ που πέτυχε ο Λευτέρης είναι $\sqrt{0,1}$. (Μονάδες 5)

β) Το παρακάτω εικονόγραμμα παρουσιάζει τον αριθμό των γκολ που πέτυχε ο Παύλος, σε κάθε αγώνα, κατά τη διάρκεια του ίδιου πρωταθλήματος. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο των γκολ ανά αγώνα, που πέτυχε ο Παύλος, καθώς και την τυπική απόκλιση των γκολ.

(Μονάδες 10)



γ) Ο προπονητής μιας ποδοσφαιρικής ομάδας ενδιαφέρεται για την απόκτηση ενός ποδοσφαιριστή που θα βοηθήσει την ομάδα στο σκοράρισμα στο νέο πρωτάθλημα. Έχει να διαλέξει ανάμεσα στον Λευτέρη και στον Παύλο. Αν τα κριτήρια είναι η συχνότητα και η σταθερότητα στο σκοράρισμα, ποιον θα του προτείνατε με βάση τα παραπάνω δεδομένα;

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Το πλήθος των παρατηρήσεων, του αριθμού των γκολ σε κάθε αγώνα που πέτυχε ο Λευτέρης, είναι $n = 20$. Οι τιμές των παρατηρήσεων είναι οι $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ και $x_3 = 2$, με αντίστοιχες συχνότητες τις $v_1 = 1$, $v_2 = 18$ και $v_3 = 1$.

i. Η μέση τιμή, των γκολ ανά αγώνα, που πέτυχε ο Λευτέρης είναι:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 18 + 2 \cdot 1}{20}$$

$$\bar{x} = \frac{20}{20}$$

$$\bar{x} = 1$$

ii. Η διακύμανση s^2 είναι:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot v_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot v_2 + (x_3 - \bar{x})^2 \cdot v_3}{n}$$

$$s^2 = \frac{(0-1)^2 \cdot 1 + (1-1)^2 \cdot 18 + (2-1)^2 \cdot 1}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Επομένως η τυπική απόκλιση, των γκολ που πέτυχε ο Λευτέρης, είναι $s = \sqrt{0,1}$.

β) Από το εικονόγραμμα βλέπουμε ότι ο Παύλος δεν πέτυχε γκολ σε 7 αγώνες, πέτυχε 1 γκολ σε 8 αγώνες, πέτυχε 2 γκολ σε 4 αγώνες και τέλος, πέτυχε 4 γκολ σε 1 αγώνα.

Οι τιμές των παρατηρήσεων είναι οι $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ και $x_4 = 4$, με αντίστοιχες συχνότητες τις $v_1 = 7$, $v_2 = 8$, $v_3 = 4$ και $v_4 = 1$.

i. Η μέση τιμή, των γκολ ανά αγώνα, που πέτυχε ο Παύλος είναι:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 + x_4 \cdot v_4}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{20}$$

$$\bar{x} = \frac{20}{20}$$

$$\bar{x} = 1$$

ii. Η διακύμανση s^2 είναι:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot v_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot v_2 + (x_3 - \bar{x})^2 \cdot v_3 + (x_4 - \bar{x})^2 \cdot v_4}{n}$$

$$s^2 = \frac{(0-1)^2 \cdot 7 + (1-1)^2 \cdot 8 + (2-1)^2 \cdot 4 + (4-1)^2 \cdot 1}{20} = \frac{7+4+9}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

Επομένως η τυπική απόκλιση, των γκολ που πέτυχε ο Παύλος, είναι $s = \sqrt{1} = 1$.

γ) Παρατηρούμε ότι οι δύο ποδοσφαιριστές, ο Λευτέρης και ο Παύλος πέτυχαν κατά μέσο όρο 1 γκολ ανά αγώνα, ο καθένας. Όμως ο Λευτέρης είναι πιο σταθερός στο σκοράρισμα και αυτό επιβεβαιώνεται με την τυπική απόκλιση των γκολ που πέτυχε ($\sqrt{0,1}$) που είναι μικρότερη από την τυπική απόκλιση των γκολ που πέτυχε ο Παύλος (1). Επομένως με κριτήρια τη συχνότητα και τη σταθερότητα στο σκοράρισμα, θα προτείναμε την απόκτηση του Λευτέρη.

ΘΕΜΑ 2

Κάναμε μια έρευνα με στόχο να μελετηθούν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των ατόμων με ηλικίες 10 έως 19 ετών, μιας περιφέρειας της Ελλάδας, τα οποία ήταν 57.579, συνολικά.

Τα χαρακτηριστικά που μελετήθηκαν ήταν:

- το ύψος τους, σε εκατοστά,
- η ηλικία τους, σε έτη,
- η αγαπημένη τους αθλητική δραστηριότητα,
- η ημέρα γέννησής τους (Δευτέρα, Τρίτη, κτλ.).

Επιλέξαμε, αντιπροσωπευτικά, 1.000 άτομα από αυτά και υπολογίσαμε τη μέση τιμή της ηλικίας τους, σε έτη, η οποία ήταν 16,5 και τη μέση τιμή του ύψους τους, σε εκατοστά, η οποία ήταν 155.

α) Ποιο είναι το μέγεθος του πληθυσμού της έρευνας και ποιο του δείγματος που επιλέξαμε;
(Μονάδες 5)

β) Ποια από τα χαρακτηριστικά που μελέτησε η έρευνα ήταν ποσοτικά και ποια ποιοτικά;
(Μονάδες 8)

γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

- Η μέση τιμή της ηλικίας, σε έτη, των ατόμων του δείγματος ήταν 16,5.
 - Η μέση τιμή της ηλικίας, σε έτη, όλων των κατοίκων της περιφέρειας ήταν 16,5.
 - Η μέση τιμή και η διάμεσος της ηλικίας, σε έτη, των ατόμων του δείγματος ήταν 16,5.
 - Έχουμε ενδείξεις ότι η μέση τιμή του ύψους, σε εκατοστά, όλων των ατόμων της περιφέρειας με ηλικίες, σε έτη, 10 έως 19 ήταν 155 περίπου.
- (Μονάδες 12)

α) Το μέγεθος του πληθυσμού ήταν 57.579.

Το μέγεθος του δείγματος ήταν 1.000.

β) Τα χαρακτηριστικά, τα οποία μελέτησε η έρευνα χωρίζονται σε:

Ποσοτικά	Ποιοτικά
• Το ύψος, σε εκατοστά • Η ηλικία, σε έτη	• Η αγαπημένη τους αθλητική δραστηριότητα • Η ημέρα γέννησής τους

γ)

i. Η πρόταση είναι σωστή (Σ), γιατί η μέση τιμή της ηλικίας των 1.000 ατόμων, σε έτη, ήταν 16,5.

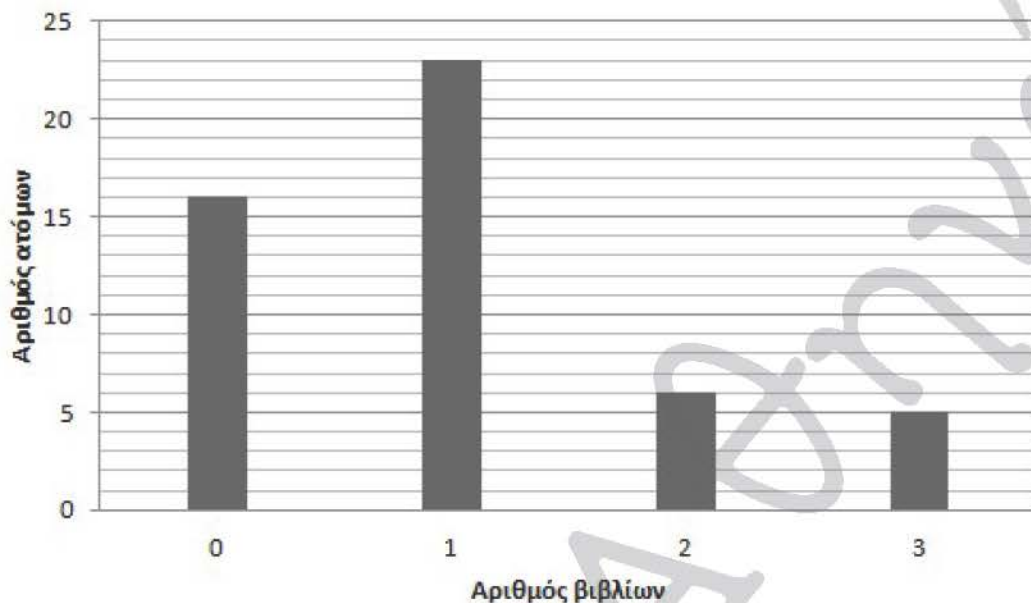
ii. Η πρόταση είναι λανθασμένη (Λ). Αυτό ισχύει για το δείγμα. Ακόμα κι αν γενικευτεί, η γενίκευση αφορά μόνο τα 57.579 άτομα της ίδιας ηλικιακής ομάδας και όχι όλους τους κατοίκους της περιφέρειας.

iii. Η πρόταση είναι λανθασμένη (Λ). Αυτή είναι η μέση τιμή της ηλικίας των ατόμων του δείγματος. Δε γνωρίζουμε τη διάμεσο του δείγματος, όσο αφορά την ηλικία.

iv. Η πρόταση είναι σωστή (Σ). Η μέση τιμή του ύψους, σε εκατοστά, για το δείγμα των 1.000 ατόμων είναι 155. Το δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού, δηλαδή των 57.579 ατόμων (και μεγάλο σε σχέση με τον πληθυσμό). Άρα έχουμε ισχυρές ενδείξεις ότι το 155 είναι μια καλή προσέγγιση της μέσης τιμής του ύψους, σε εκατοστά, των 57.579 ατόμων του πληθυσμού.

ΘΕΜΑ 2

Έγινε μια έρευνα σε ένα δείγμα ενηλίκων που αφορούσε τον αριθμό βιβλίων που διάβασαν κατά την διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών τους. Τα ευρήματα παρουσιάζονται στο ακόλουθο ραβδόγραμμα συχνοτήτων.



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον πίνακα συχνοτήτων που ακολουθεί.

Αριθμός βιβλίων	Αριθμός ατόμων
Σύνολο	

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων, που διάβασαν κατά τη διάρκεια των διακοπών τους, τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα.

(Μονάδες 15)

α) Στον οριζόντιο άξονα παριστάνονται οι τιμές της μεταβλητής «αριθμός βιβλίων» και στον κατακόρυφο οι αντίστοιχες συχνότητες (σε άτομα).

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Αριθμός βιβλίων x_i	Αριθμός ατόμων v_i
0	16
1	23
2	6
3	5
Σύνολο	$v = 50$

β) Από τον πίνακα ή το ραβδόγραμμα, έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 + x_4 \cdot v_4}{v}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 + x_4 \cdot v_4}{v} = \frac{0 \cdot 16 + 1 \cdot 23 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5}{50} = 1$$

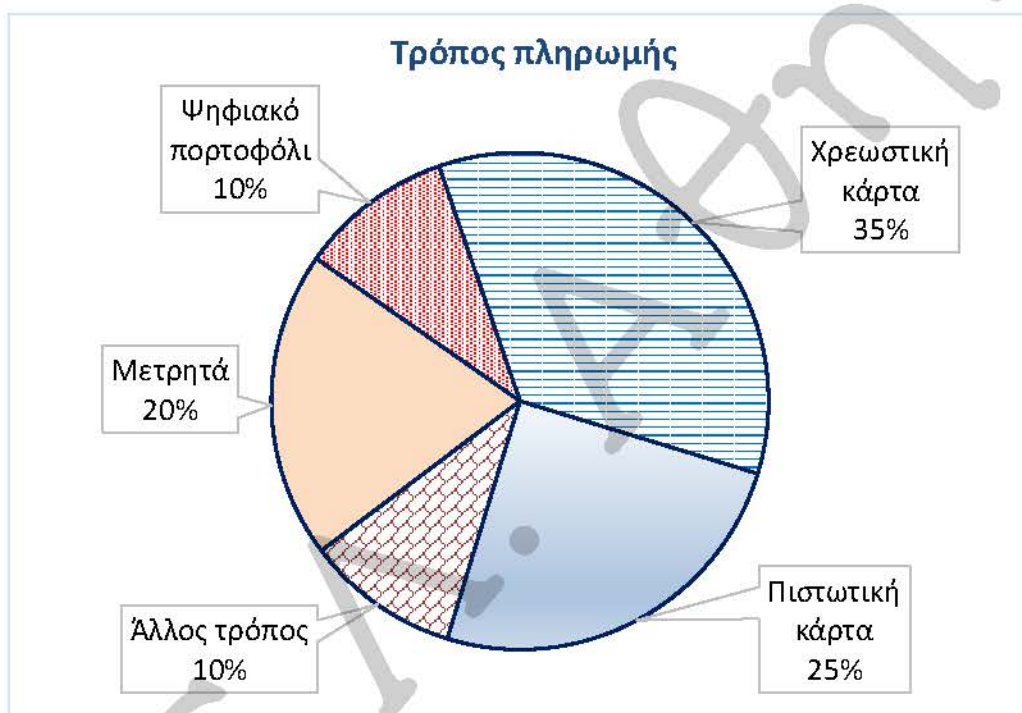
Άρα η μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν τα άτομα του δείγματος της έρευνας είναι $\bar{x} = 1$.

ΘΕΜΑ 2

Το παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τα αποτελέσματα μιας έρευνας, σχετικά με τον τρόπο πληρωμής των πελατών σ' ένα εστιατόριο, έναν συγκεκριμένο μήνα.

- α) Ποια είναι η μεταβλητή που εξετάζεται στην έρευνα;
- β) Ποιο είναι το είδος της μεταβλητής;
- γ) Ποιες είναι οι τιμές της μεταβλητής;
- δ) Ποιες είναι οι σχετικές συχνότητες %, των τιμών της μεταβλητής;
- ε) Ποια είναι η επικρατούσα τιμή;

(Μονάδες 25)



ΛΥΣΗ

α) Η μεταβλητή που εξετάζεται είναι ο «Τρόπος πληρωμής» των πελατών στο εστιατόριο.

β) Η μεταβλητή «Τρόπος πληρωμής» είναι ποιοτική, αφού αναφέρεται σε ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του δείγματος.

γ) Οι τιμές της μεταβλητής «Τρόπος πληρωμής» είναι:

- Πιστωτική κάρτα
- Χρεωστική κάρτα
- Ψηφιακό πορτοφόλι
- Μετρητά
- Άλλος τρόπος

δ) Οι σχετικές συχνότητες %, των τιμών της μεταβλητής είναι:

Πιστωτική κάρτα	25%
Χρεωστική κάρτα	35%
Ψηφιακό πορτοφόλι	10%
Μετρητά	20%
Άλλος τρόπος	10%

ε) Επικρατούσα τιμή είναι εκείνη με τη μεγαλύτερη συχνότητα, που είναι η «Χρεωστική κάρτα» αφού έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα, 35%.

ΘΕΜΑ 2

Ένας μαθητής στις γραπτές δοκιμασίες στο μάθημα των Μαθηματικών, κατά τη διάρκεια μιας χρονιάς, πήρε τις ακόλουθες βαθμολογίες :

10 ,14 ,9 ,15 ,14 ,12 ,18 ,13 ,13 ,13

α) Να βρείτε τη διάμεσο και τα τεταρτημόρια Q_1 και Q_3 . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το εύρος της βαθμολογίας του καθώς και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q .

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε το θηκόγραμμα.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Διατάσσουμε τις βαθμολογίες σε αύξουσα σειρά: 9, 10, 12, 13, **13**, **13**, 14, 14, 15, 18.

Επειδή το πλήθος τους είναι άρτιο (δέκα), η διάμεσος δ ισούται με το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων που είναι η 5^η και η 6^η, άρα είναι $\delta = \frac{13+13}{2} = 13$.

Διακρίνουμε, τώρα το πρώτο μισό 9, 10, **12**, 13, 13 που η διάμεσός του είναι το πρώτο τεταρτημόριο $Q_1 = 12$, καθώς και το δεύτερο μισό 13, 14, **14**, 15, 18 που η διάμεσός του είναι το τρίτο τεταρτημόριο $Q_3 = 14$.

β) Το εύρος της βαθμολογίας του είναι $R = x_{\max} - x_{\min} = 18 - 9 = 9$.

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = Q_3 - Q_1 = 14 - 12 = 2$.

γ) Βρήκαμε προηγουμένως ότι το πρώτο τεταρτημόριο είναι $Q_1 = 12$, το τρίτο τεταρτημόριο είναι $Q_3 = 14$ και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = 2$. Επομένως, το διάστημα

$[Q_1 - 1,5 Q, Q_3 + 1,5 Q]$ είναι

$$[12 - 1,5 \cdot 2, 14 + 1,5 \cdot 2] =$$

$$= [12 - 3, 14 + 3]$$

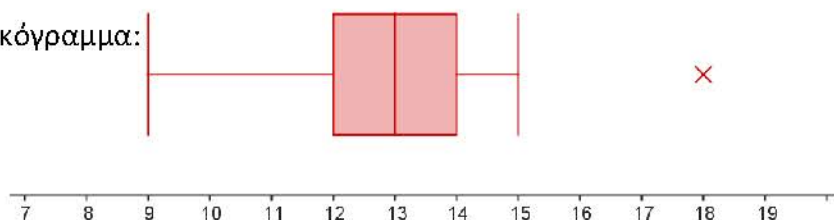
$$= [9, 17],$$

στο οποίο περιλαμβάνονται όλες οι παρατηρήσεις εκτός από το 18. Επομένως το 18 είναι ακραία τιμή.

Για να κατασκευάσουμε το θηκόγραμμα σχεδιάζουμε πρώτα το ορθογώνιο, με τη μία πλευρά (προς τα αριστερά) να παριστάνει το $Q_1 = 12$ και την απέναντι πλευρά (προς τα δεξιά) να παριστάνει το $Q_3 = 14$. Φέρουμε επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα (παράλληλο και ίσο με τις παραπάνω πλευρές του ορθογωνίου και τα άκρα του στις άλλες δύο) που παριστάνει τη διάμεσο $\delta = 13$.

Στη συνέχεια, από τα μέσα των πλευρών, που παριστάνουν το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο, φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα προς τα αριστερά και δεξιά αντίστοιχα. Το αριστερό άκρο του ευθύγραμμου τμήματος προς τα αριστερά, παριστάνει τη μικρότερη παρατήρηση που δεν είναι ακραία, δηλαδή το 9 και το δεξιό άκρο του ευθύγραμμου τμήματος προς τα δεξιά, παριστάνει τη μεγαλύτερη παρατήρηση που δεν είναι ακραία, δηλαδή το 15. Σημειώνουμε τέλος, την ακραία τιμή, το 18.

Έτσι έχουμε το παρακάτω θηκόγραμμα:



ΘΕΜΑ 4

Ο υπεύθυνος καθηγητής του Γ4 συνέλεξε τις απουσίες των 24 μαθητών και μαθητριών του τμήματος, για την Δευτέρα και την Τρίτη της προηγούμενης εβδομάδας και τις καταχώρισε σε ένα ειδικό πρόγραμμα καταμέτρησης απουσιών, με το οποίο υπολόγισε ότι:

- η διάμεσος των απουσιών ήταν $\delta = 2,5$,
- το πρώτο τεταρτημόριο ήταν $Q_1 = 1$,
- το τρίτο τεταρτημόριο ήταν $Q_3 = 4$,
- η ελάχιστη τιμή των απουσιών ήταν $x_{min} = 0$ και η μέγιστη τιμή $x_{max} = 14$.

α) Υπάρχει μαθητής ή μαθήτρια του Γ4 που να έκανε τόσες απουσίες, όση είναι η διάμεσος δ ; (Μονάδες 7)

β) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. Δεν υπάρχει μαθητής ή μαθήτρια του Γ4 που να έχει περισσότερες από 10 απουσίες.

ii. Το πολύ το 25% των μαθητών και μαθητριών του Γ4, δηλαδή το πολύ 6 μαθητές και μαθήτριες πήραν περισσότερες από 4 απουσίες τις δύο αυτές ημέρες.

iii. Υπάρχουν 6 μαθητές και μαθήτριες του Γ4 που δεν έχουν κάνει απουσία τις δύο αυτές ημέρες. (Μονάδες 18)

α) Όχι, γιατί δε γίνεται να έχει κάνει κάποιος 2,5 απουσίες (ο αριθμός των απουσιών πρέπει να είναι μη αρνητικός ακέραιος).

β)

i. Είναι λανθασμένη (Λ).

Εφόσον $x_{max} = 14$, υπάρχει τουλάχιστον ένας μαθητής ή μία μαθήτρια του Γ4 με 14 απουσίες, δηλαδή περισσότερες από 10.

ii. Είναι σωστή (Σ).

Εφόσον $Q_3 = 4$, το πολύ το 25% των μαθητών και μαθητριών της τάξης έχουν περισσότερες από 4 απουσίες, τις δύο αυτές ημέρες. Το 25% των 24 μαθητών και μαθητριών του Γ4 είναι:

$$\frac{25}{100} \cdot 24 = \frac{24}{4} = 6$$

iii. Είναι λανθασμένη (Λ).

Για παράδειγμα, στον παρακάτω πίνακα περιγράφεται ένα τμήμα 24 μαθητών/τριών που έχει τα χαρακτηριστικά των απουσιών του Γ4 και υπάρχουν 3 μαθητές/τριες που δεν έχουν κάνει απουσία.

Πλήθος απουσιών	Πλήθος μαθητών/τριών
0	3
1	4
2	5
3	1
4	10
14	1

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα παρατηρήσεων:

A: 4, 6, 4, 5, 7, 2, 4, 8, 11, 6

B: 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6

α) Για το σύνολο A, να υπολογίσετε:

- i. το εύρος,
- ii. τη μέση τιμή $\bar{x}$,
- iii. τη διάμεσο δ .

(Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τα σύνολα A και B, ως προς το εύρος και τη μέση τιμή.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις του συνόλου A:

i. Η μικρότερη τιμή είναι $x_{\min} = 2$ και η μεγαλύτερη $x_{\max} = 11$.

Άρα $R = x_{\max} - x_{\min} = 11 - 2 = 9$.

ii. Η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{4 + 6 + 4 + 5 + 7 + 2 + 4 + 8 + 11 + 6}{10} = \frac{57}{10} = 5,7$$

iii. Τοποθετούμε σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις:

2, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 11

Η διάμεσος είναι $\delta = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$.

β) Υπολογίζουμε το εύρος του B:

$$R = 6 - 5 = 1$$

Άρα το εύρος του A είναι εννεαπλάσιο από το εύρος του B.

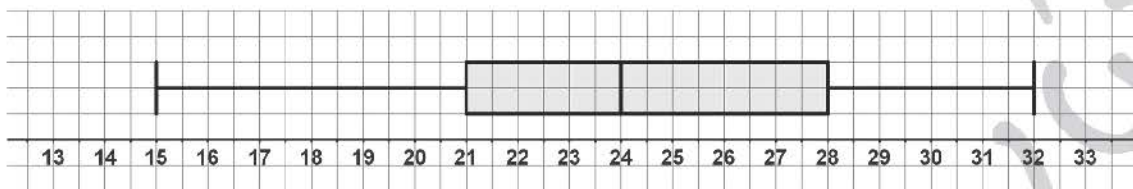
Η μέση τιμή του B είναι:

$$\bar{x} = \frac{5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6}{10} = \frac{57}{10} = 5,7$$

Άρα, το A και το B έχουν ίσες μέσες τιμές.

ΘΕΜΑ 4

Ο Κώστας εργάζεται στο τηλεφωνικό κέντρο εταιρείας πληροφορικής εξυπηρετώντας τηλεφωνικά τους πελάτες. Το παρακάτω θηκόγραμμα αντιστοιχεί στους πελάτες ανά ημέρα που εξυπηρέτησε ο Κώστας σε 20 ημέρες.



α) Ποιος ήταν ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος αριθμός πελατών ανά ημέρα που εξυπηρέτησε ο Κώστας αυτές τις 20 ημέρες;

(Μονάδες 8)

β) Χρησιμοποιώντας το θηκόγραμμα, να βρείτε τα τεταρτημόρια Q_1 και Q_3 και τη διάμεσο δ .

(Μονάδες 9)

γ) Ο Κώστας θέλει να καταγράψει τις 10 πιο «απασχολημένες» ημέρες του με κριτήριο τον αριθμό των πελατών που εξυπηρέτησε κάθε ημέρα.

Μια ημέρα εξυπηρέτησε 23 πελάτες και μια άλλη ημέρα εξυπηρέτησε 25 πελάτες. Ποια ή ποιες από αυτές τις δύο ημέρες ανήκουν στις 10 πιο απασχολημένες του;

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Από τα στοιχεία το θηκογράμματος ο μεγαλύτερος αριθμός πελατών που εξυπηρέτησε ο Κώστας σε μία ημέρα είναι 32. Αντίστοιχα, ο μικρότερος ήταν 15.

β) Για το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο είναι $Q_1 = 21$ και $Q_3 = 28$ πελάτες.

Για τη διάμεσο ισχύει $\delta = 24$.

γ) Οι παρατηρήσεις (καταγραφές πελατών ανά ημέρα) είναι 20. Οπότε το 50% των παρατηρήσεων είναι 10.

Η διάμεσος είναι 24. Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε παρατήρηση μεγαλύτερη από 24 ανήκει στις 10 ημέρες με περισσότερους πελάτες. Ο αριθμός 23 είναι μικρότερος από τη διάμεσο, άρα δεν ανήκει σε αυτές τις 10 ημέρες. Δηλαδή δεν ανήκει στις 10 πιο απασχολημένες ημέρες. Αντίθετα ο αριθμός 25 είναι μεγαλύτερος από τη διάμεσο, άρα ανήκει στις 10 πιο απασχολημένες ημέρες.

(εναλλακτικά: από το θηκόγραμμα φαίνεται ότι το 23 είναι αριστερά από τη διάμεσο, άρα δεν ανήκει στις 10 ημέρες με τους περισσότερους πελάτες. Αντίθετα το 25 είναι δεξιά από τη διάμεσο, άρα ανήκει στις 10 ημέρες με τους περισσότερους πελάτες.)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παρακάτω λίστα δεδομένων:

2 , 3 , 2 , 1 , 2 , 3 , 2 , 2 , 1.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 2$,

(Μονάδες 5)

ii. η διάμεσος είναι $\delta = 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε:

i. τη διακύμανση,

(Μονάδες 5)

ii. την τυπική απόκλιση,

(Μονάδες 5)

iii. τον συντελεστή μεταβλητότητας.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α)

ι. Το πλήθος των παρατηρήσεων 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 1 είναι $n = 9$.

Η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{2+3+2+1+2+3+2+2+1}{9}$$

$$\bar{x} = \frac{18}{9}$$

$$\bar{x} = 2$$

Εναλλακτικά: Οι τιμές των παρατηρήσεων είναι οι $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ και $x_3 = 3$, με αντίστοιχες συχνότητες $v_1 = 2$, $v_2 = 5$ και $v_3 = 2$, οπότε η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2}{9}$$

$$\bar{x} = \frac{18}{9}$$

$$\bar{x} = 2$$

ii. Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο, διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά. Η διάμεσος δ είναι τότε η μεσαία παρατήρηση, αφού το $n = 9$ είναι περιττός αριθμός, άρα είναι η 5^η παρατήρηση:

1, 1, 2, 2, **2**, 2, 2, 3, 3

Επομένως $\delta = 2$.

β)

ι. Η διακύμανση s^2 είναι:

$$s^2 = \frac{(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + (t_3 - \bar{x})^2 + (t_4 - \bar{x})^2 + (t_5 - \bar{x})^2 + (t_6 - \bar{x})^2 + (t_7 - \bar{x})^2 + (t_8 - \bar{x})^2 + (t_9 - \bar{x})^2}{n}$$

$$s^2 = \frac{(2-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2}{9}$$

$$s^2 = \frac{1+1+1+1}{9}$$

$$s^2 = \frac{4}{9}$$

Εναλλακτικά:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot v_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot v_2 + (x_3 - \bar{x})^2 \cdot v_3}{v}$$

$$s^2 = \frac{(1-2)^2 \cdot 2 + (2-2)^2 \cdot 5 + (3-2)^2 \cdot 2}{9} = \frac{4}{9}$$

ii. Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

iii. Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3}$.

ΘΕΜΑ 2

Οι βαθμοί μιας μαθήτριας της Γ' λυκείου στα διαγωνίσματα των μαθηματικών κατά τη διάρκεια του έτους ήταν : 12 ,14, 15, 16, 20, 17, 12, 14 .

α) Να υπολογιστεί η μέση τιμή των βαθμών της. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογιστεί η διάμεσος των βαθμών της. (Μονάδες 4)

γ) Ναδειχτεί ότι η διακύμανση είναι ίση με $\frac{25}{4}$. (Μονάδες 8)

δ) Να υπολογιστεί ο συντελεστής μεταβλητότητας. (Μονάδες 5)

α) Η μέση τιμή των βαθμών της δίνεται από τον τύπο $\bar{x} = \frac{1+t_2+t_3+\dots+v}{v}$ και μετά από

αντικατάσταση προκύπτει: $\bar{x} = \frac{12+12+14+14+15+16+17+20}{8} = \frac{120}{8} = 15$

β) Οι βαθμολογίες σε αύξουσα σειρά είναι οι : 12,12,14,14,15,16,17,20 και επειδή το

πλήθος είναι άρτιο $\delta = \frac{14+15}{2} = 14,5$

γ) Η διακύμανση της βαθμολογίας δίνεται από τον τύπο

$$s^2 = \frac{(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + (t_3 - \bar{x})^2 + \dots + (t_v - \bar{x})^2}{v} \text{ και μετά από αντικατάσταση προκύπτει:}$$

$$s^2 = \frac{(12-15)^2 + (12-15)^2 + (14-15)^2 + (14-15)^2 + (15-15)^2 + (16-15)^2 + (17-15)^2 + (20-15)^2}{8} =$$

$$= \frac{(-3)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (5)^2}{8} =$$

$$= \frac{9+9+1+1+0+1+4+25}{8} = \frac{50}{8} = \frac{25}{4}.$$

δ) Ο συντελεστής μεταβλητότητας δίνεται από τον τύπο $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$. Για να υπολογιστεί πρέπει

να βρούμε την τυπική απόκλιση που είναι $s = \sqrt{s^2}$, ειδικότερα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$,

όπου με αντικατάσταση προκύπτει: $CV = \frac{\frac{5}{2}}{15} = \frac{1}{6} \approx 0,17$.

ΘΕΜΑ 4

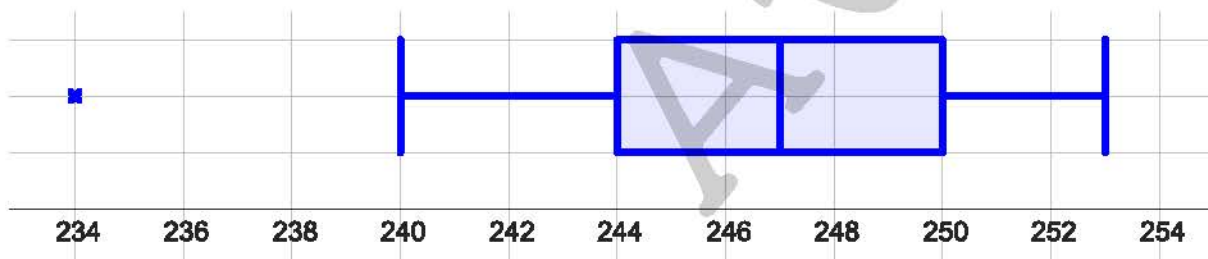
Μια εταιρεία τροφίμων χρησιμοποιεί ένα αυτόματο μηχάνημα για να συσκευάσει βρώσιμες ελιές σε δοχεία 250 γραμμαρίων (αναγραφόμενη ετικέτα). Παρακάτω δίνεται το καθαρό βάρος από ένα τυχαίο δείγμα 15 τέτοιων δοχείων.

245	245	250	247	250	245	250	250	245	249	245	242	247	250	245
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

α) Για το παραπάνω δείγμα:

- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή. (Μονάδες 3)
- Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο. (Μονάδες 6)
- Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα. (Μονάδες 6)

β) Μια μικρή οικογενειακή επιχείρηση συσκευάζει το ίδιο προϊόν σε δοχεία 250 γραμμαρίων, με το χέρι. Επιλέχθηκε τυχαίο δείγμα 15 δοχείων και το καθαρό βάρος των δοχείων αυτών, παριστάνεται με το παρακάτω θηκόγραμμα. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)



γ) Συγκρίνοντας τις απαντήσεις σας, στα ερωτήματα α) και β), ποιος πιστεύετε ότι είναι ο πιο ακριβής τρόπος πλήρωσης των δοχείων, με αυτόματο μηχάνημα ή με το χέρι; (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α)

i. Η μέγιστη τιμή είναι $x_{\max} = 250$ και η ελάχιστη τιμή $x_{\min} = 242$.

ii. Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

242, 245, 245, **245**, 245, 245, 245, **247**, 247, 249, 250, **250**, 250, 250, 250

Επειδή το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, 15, η διάμεσος δ είναι η μεσαία παρατήρηση, που είναι η 8η, άρα $\delta = 247$.

Για τον υπολογισμό του πρώτου Q_1 και του τρίτου Q_3 τεταρτημορίου έχουμε:

Επειδή το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, αφαιρούμε από το δείγμα τη διάμεσο και διακρίνουμε το πρώτο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_1 και το δεύτερο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_3 , όπως φαίνεται παραπάνω. Επομένως $Q_1 = 245$ και $Q_3 = 250$.

iii. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου από το τρίτο τεταρτημόριο, άρα $Q = Q_3 - Q_1 = 250 - 245 = 5$.

Είναι

$$Q_1 - 1,5Q = 245 - 1,5 \cdot 5 = 245 - 7,5 = 237,5 \text{ και}$$

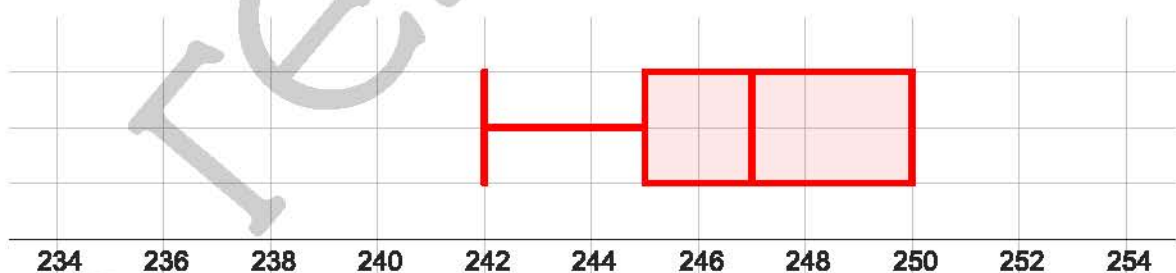
$$Q_3 + 1,5Q = 250 + 1,5 \cdot 5 = 250 + 7,5 = 257,5$$

Παρατηρούμε ότι δεν βρίσκονται παρατηρήσεις έξω από το διάστημα

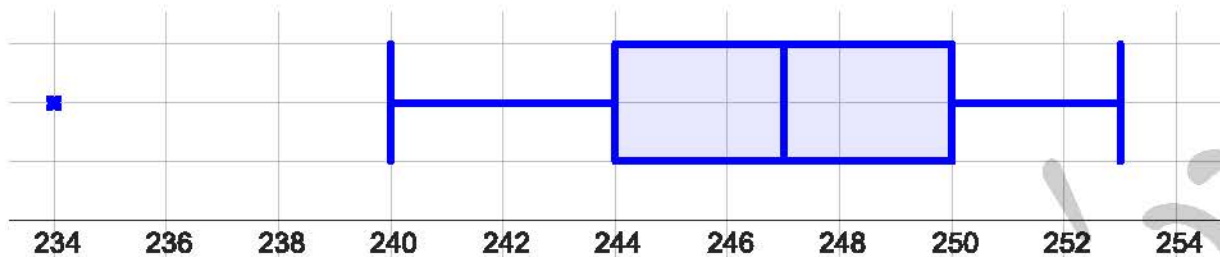
$$[Q_1 - 1,5Q, Q_3 + 1,5Q] = [237,5, 257,5]$$

άρα δεν υπάρχουν ακραίες τιμές.

Επομένως το θηκόγραμμα είναι το παρακάτω:



β) Από το δοθέν θηκόγραμμα

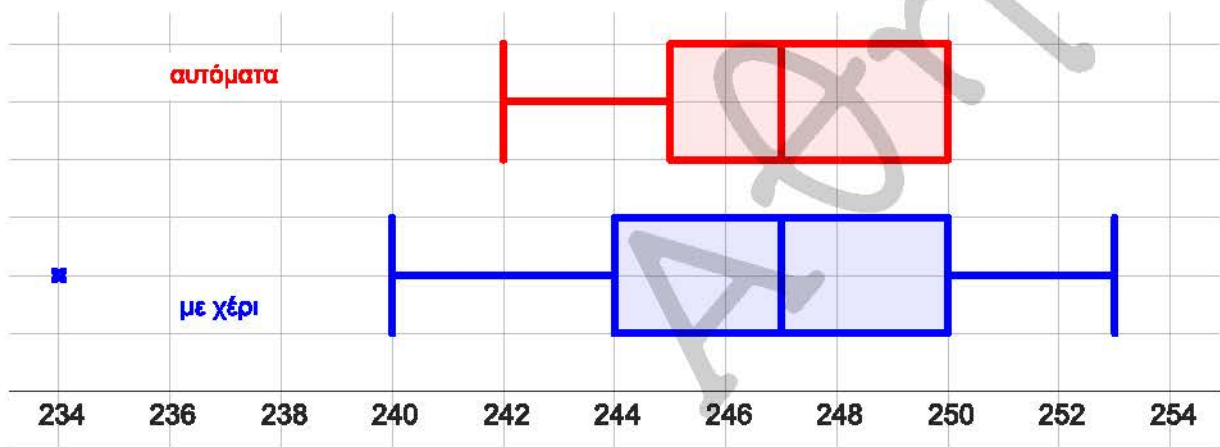


έχουμε:

μέγιστη τιμή $x'_{\max} = 253$, ελάχιστη τιμή $x'_{\min} = 234$,

διάμεσος $\delta' = 247$, $Q'_1 = 244$ και $Q'_3 = 250$

γ) Συγκρίνοντας τα δύο θηκογράμματα παρατηρούμε ότι:



η διάμεσος (247) και το τρίτο τεταρτημόριο (250) είναι τα ίδια και στα δύο δείγματα. Όμως το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι μικρότερα στην περίπτωση της αυτόματης πλήρωσης των δοχείων έναντι αυτής με το χέρι:

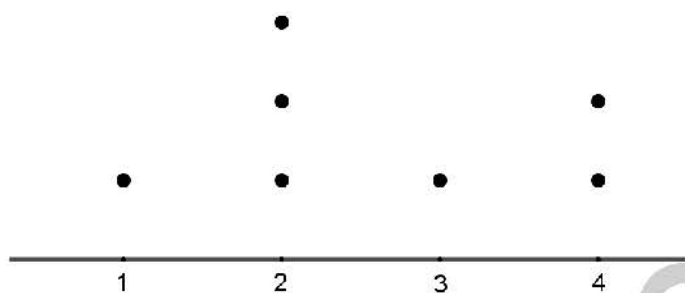
$R = 250 - 242 = 8$ έναντι $R' = 253 - 234 = 19$ και

$Q = 250 - 245 = 5$ έναντι $Q' = 250 - 244 = 6$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο τρόπος πλήρωσης των δοχείων, είναι πιο ακριβής με αυτόματο μηχάνημα παρά με το χέρι.

ΘΕΜΑ 2

Στο επόμενο σημειόγραμμα φαίνονται τα γκολ που σημείωσε η εθνική ομάδα της Αργεντινής στο Μουντιάλ του Κατάρ το 2022 στα επτά συνολικά παιχνίδια που χρειάστηκε να αγωνισθεί μέχρι να κατακτήσει το παγκόσμιο κύπελλο.

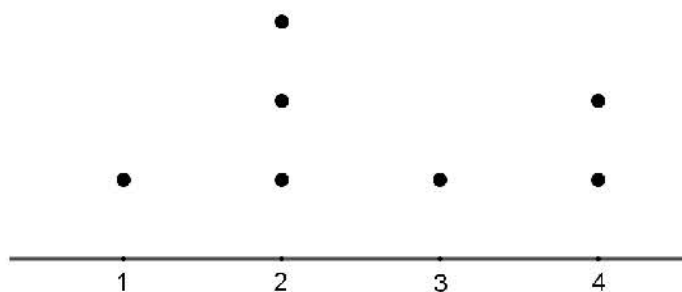


α) Με βάση το σημειόγραμμα να καταγράψετε τον αριθμό των γκολ σε κάθε αγώνα.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε για τα γκολ που σημείωσε η ομάδα στα 7 αυτά παιχνίδια:

- Τη μέση τιμή. (Μονάδες 5)
- Το εύρος. (Μονάδες 5)
- Την επικρατούσα τιμή. (Μονάδες 5)
- Την διάμεσο. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Τα γκολ που σημείωσε η ομάδα στους επτά αγώνες, σύμφωνα με το σημειόγραμμα, σε αύξουσα διάταξη, είναι:

1,2,2,2,3,4,4

β)

i. Η μέση τιμή των παραπάνω παρατηρήσεων είναι:

$$\bar{x} = \frac{1+2+2+2+3+4+4}{7} = \frac{18}{7}, \text{ δηλαδή περίπου ίση με } 2,57$$

ii. Το εύρος R είναι η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση, δηλαδή $R=4-1=3$.

iii. Η επικρατούσα τιμή M_o είναι η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Στην περίπτωση μας είναι $M_o=2$.

iv. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι επτά (περιττό) και οι τιμές είναι σε αύξουσα διάταξη. Η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή, δηλαδή $\delta=2$.

ΘΕΜΑ 4

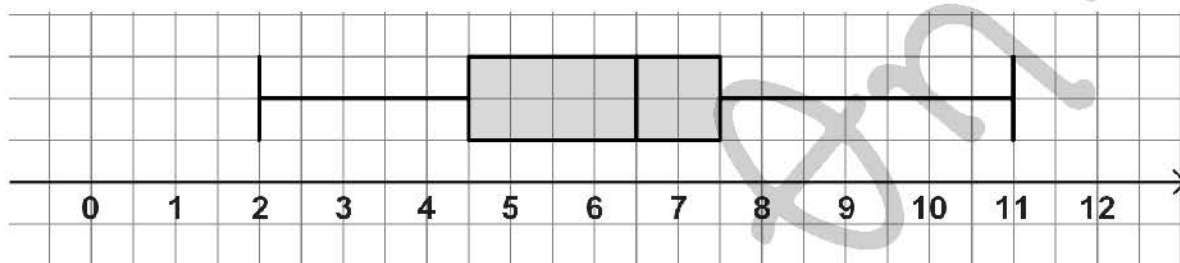
Δίνονται οι παρακάτω είκοσι παρατηρήσεις:

4, 5, 6, 4, 5, 7, 2, 4, 8, 11, 6, 7, 7, 4, 5, 7, 6, 10, 9, 9

α) Να υπολογίσετε:

- i. την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή, (Μονάδες 4)
- ii. τη διάμεσο δ , (Μονάδες 4)
- iii. τα τεταρτημόρια Q_1 και Q_3 . (Μονάδες 4)

β) Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι το παρακάτω θηκόγραμμα αντιστοιχεί στα παραπάνω δεδομένα. Ωστόσο έχει ένα λάθος. Μπορείτε να το εντοπίσετε;



(Μονάδες 8)

γ) Να κάνετε αλλαγή σε μία μόνο από τις παραπάνω παρατηρήσεις, έτσι ώστε στο νέο σύνολο είκοσι παρατηρήσεων που θα προκύψει, να αντιστοιχεί το θηκόγραμμα του β) ερωτήματος.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) i. Η ελάχιστη τιμή είναι $x_{\min} = 2$ και η μέγιστη $x_{\max} = 11$.

ii. Γράφουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

2, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 11

Εφόσον το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο και μάλιστα 20, η διάμεσος δ είναι ίση με τον μέσο όρο 10^{ης} και 11^{ης} παρατήρησης.

Η 10^η και η 11^η παρατήρηση είναι ίσες με 6 η καθεμία. Άρα $\delta = \frac{6+6}{2} = 6$.

iii. Το Q_1 είναι ίσο με τον μέσο όρο 5^{ης} και 6^{ης} παρατήρησης, δηλαδή 4 και 5.

Άρα $Q_1 = \frac{4+5}{2} = 4,5$.

Η 15^η και η 16^η παρατήρηση είναι 7 και 8 αντίστοιχα. Άρα $Q_3 = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$.

β) Το λάθος στο θηκόγραμμα του σχήματος είναι η διάμεσος, που φαίνεται να είναι 6,5. Η διάμεσος του συνόλου των παρατηρήσεων είναι $\delta = 6$.

γ) Στο σύνολο παρατηρήσεων που δίνεται κάνουμε την εξής αλλαγή. Αντικαθιστούμε ένα από τα 6 με 7. Τότε έχουμε:

2, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 11

Το νέο δείγμα έχει τα ίδια $x_{\min}$, $x_{\max}$, Q_1 και Q_3 και $\delta = 6,5$.

Επίσης:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 7,5 - 4,5 = 3$$

$$Q_1 - 1,5Q = 4,5 - 1,5 \cdot 3 = 0$$

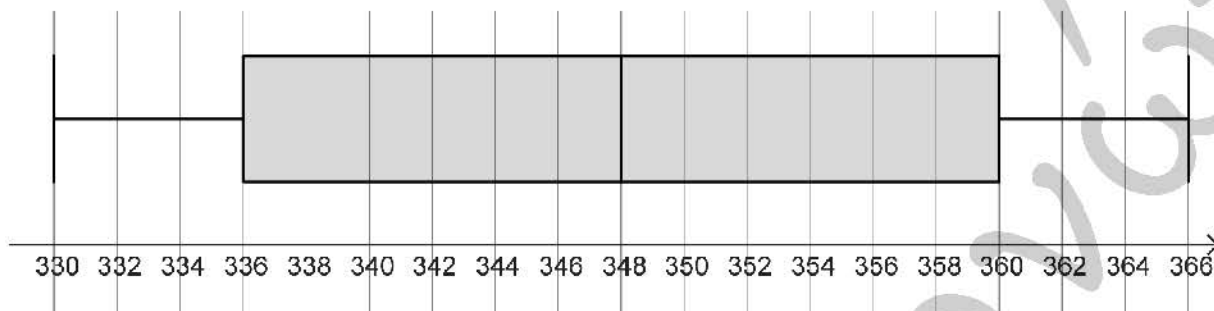
$$Q_3 + 1,5Q = 7,5 + 1,5 \cdot 3 = 11,5$$

Επομένως δεν υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις, όπως και στο θηκόγραμμα του σχήματος.

Άρα σε αυτό το δείγμα αντιστοιχεί το θηκόγραμμα τους σχήματος.

ΘΕΜΑ 2

Η Χριστίνα πηγαίνει για τρέξιμο τουλάχιστον 5 φορές την εβδομάδα. Τις τελευταίες τέσσερις εβδομάδες μετρούσε κάθε φορά σε πόσα δευτερόλεπτα έτρεχε 1 χιλιόμετρο. Το παρακάτω θηκόγραμμα αντιστοιχεί στις μετρήσεις της Χριστίνας.



α) Χρησιμοποιώντας το θηκόγραμμα, να βρείτε:

- το εύρος R των μετρήσεων,
- τη διάμεσο δ των μετρήσεων,
- το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο των μετρήσεων, Q_1 και Q_3 αντίστοιχα,
- το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q των μετρήσεων.

(Μονάδες 20)

β) Ποιος είναι ο καλύτερος (μικρότερος) χρόνος που έκανε η Χριστίνα;

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Από τα στοιχεία το θηκογράμματος καταλαβαίνουμε ότι:

i. Η μέγιστη μέτρηση είναι 366 δευτερόλεπτα και η ελάχιστη 330 δευτερόλεπτα, άρα το εύρος είναι $R = 366 - 330 = 36$ δευτερόλεπτα.

ii. Η διάμεσος είναι $\delta = 348$ δευτερόλεπτα.

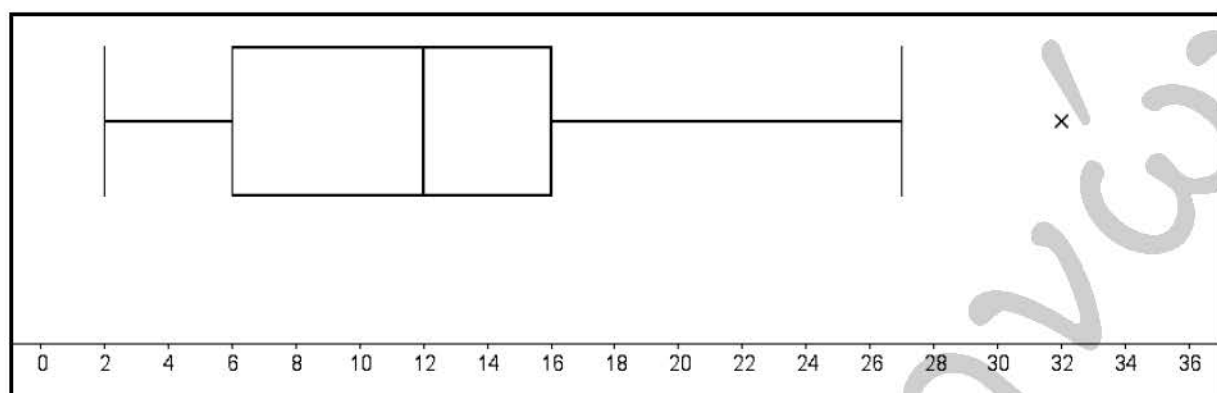
iii. Το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο είναι $Q_1 = 336$ και $Q_3 = 360$ δευτερόλεπτα.

iv. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = Q_3 - Q_1 = 360 - 336 = 24$ δευτερόλεπτα.

β) Σύμφωνα με το θηκόγραμμα είναι 330 δευτερόλεπτα.

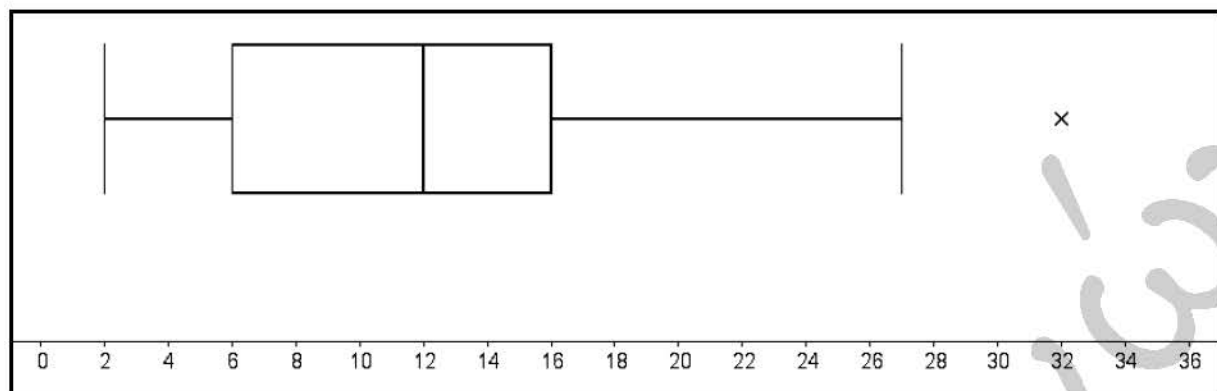
ΘΕΜΑ 2

Το παρακάτω θηκόγραμμα παρουσιάζει τους πόντους ενός παίκτη μιας ομάδας καλαθοσφαίρισης στα 15 τελευταία παιχνίδια της ομάδας του.



Με τη βοήθεια του θηκογράμματος να βρείτε:

- α) Το εύρος R των πόντων του παίκτη. (Μονάδες 6)
- β) Τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 και Q_3 . (Μονάδες 9)
- γ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q . (Μονάδες 5)
- δ) Τις ακραίες τιμές. (Μονάδες 5)



α) Το εύρος R ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση. Στην περίπτωση μας είναι $R = 32 - 2 = 30$.

β) Από το θηκόγραμμα έχουμε ότι $Q_1=6$, $Q_2=12$ και $Q_3=16$.

γ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου Q_1 από το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 , δηλαδή $Q=Q_3-Q_1=16-6=10$.

δ) Οι παρατηρήσεις που βρίσκονται έξω από το διάστημα $[Q_1-1,5Q, Q_3+1,5Q] = [-9, 31]$ ονομάζονται ακραίες τιμές. Στην περίπτωση μας ακραία τιμή είναι η τιμή 32.

ΘΕΜΑ 4

Ένας δρομέας μεγάλων αποστάσεων, κατέγραψε τα χιλιόμετρα που έτρεξε σε καθεμία από τις 20 ημέρες προπόνησης ενός μήνα και σχημάτισε τον παρακάτω πίνακα:

απόσταση σε χιλιόμετρα	5	7	10	15	20
αριθμός ημερών	4	5	5	5	1

α) Να βρείτε:

i. τη μέση τιμή,

(Μονάδες 7)

ii. τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ακραίες τιμές.

(Μονάδες 6)

γ) Ο δρομέας τον επόμενο μήνα διατήρησε το ίδιο πρόγραμμα προπόνησης, εκτός από την μέγιστη απόσταση την οποία αύξησε σε 28 χιλιόμετρα όπως φαίνεται παρακάτω:

απόσταση σε χιλιόμετρα	5	7	10	15	28
αριθμός ημερών	4	5	5	5	1

Ποια από τα μέτρα θέσης του α) ερωτήματος μεταβάλλονται και ποια όχι; Θα υπάρχουν τώρα ακραίες τιμές;

(Μονάδες 6)

α) i) Έχουμε

απόσταση σε χιλιόμετρα x_i	αριθμός ημερών v_i	$v_i x_i$
5	4	20
7	5	35
10	5	50
15	5	75
20	1	20
Αθροίσματα	20	200

Οπότε η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{200}{20} = 10 \text{ χιλιόμετρα.}$$

ii) Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

5, 5, 5, 5, **7, 7, 7, 7, 7**, **10, 10**, 10, 10, 10, **15, 15**, 15, 15, 15, 20Η διάμεσος δ είναι ο μέσος όρος της 10ης και 11ης παρατήρησης, άρα

$$\delta = \frac{10+10}{2} = 10 \text{ χιλιόμετρα.}$$

Το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 είναι ο μέσος όρος της 5ης και της 6ης παρατήρησης, ενώ το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 είναι ο μέσος όρος της 15ης και 16ης παρατήρησης, άρα

$$Q_1 = \frac{7+7}{2} = 7 \text{ χιλιόμετρα και}$$

$$Q_3 = \frac{15+15}{2} = 15 \text{ χιλιόμετρα.}$$

β) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = Q_3 - Q_1 = 15 - 7 = 8$ χιλιόμετρα.Το διάστημα $[Q_1 - 1,5 Q, Q_3 + 1,5 Q]$ είναι

$$[7 - 1,5 \cdot 8, 15 + 1,5 \cdot 8]$$

$$[7 - 12, 15 + 12]$$

$$[-5, 27]$$

στο οποίο περιλαμβάνονται όλες οι παρατηρήσεις, άρα δεν υπάρχουν ακραίες τιμές.

γ) Η μέγιστη ημερήσια απόσταση από 20 χιλιόμετρα που ήταν, έγινε 28 χιλιόμετρα. Οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι τώρα:

5, 5, 5, 5, **7, 7, 7, 7, 7**, **10, 10**, 10, 10, 10, **15, 15**, 15, 15, 15, 28

Επομένως η διάμεσος, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο δεν μεταβάλλονται.

Η μέση τιμή αυξάνεται και γίνεται $\frac{200-20+28}{20} = \frac{208}{20} = 10,4$ χιλιόμετρα.

Επειδή το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο δεν μεταβάλλονται, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος παραμένει $Q = Q_3 - Q_1 = 8$ και το διάστημα $[Q_1 - 1,5 Q, Q_3 + 1,5 Q]$ παραμένει $[-5, 27]$. Το 28 όμως δεν ανήκει στο διάστημα $[-5, 27]$, άρα είναι ακραία τιμή.

ΘΕΜΑ 4

Η ημερήσια ζήτηση κρέατος, σε κιλά, στην Κεντρική Αγορά Αθηνών (Κ.Α.Α), υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση $\sigma = 300$. Γνωρίζουμε ακόμη ότι η πιθανότητα να ζητηθούν μία τυχαία μέρα έως 5000 κιλά κρέας είναι 0,5.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι $\mu = 5000$. (Μονάδες 7)

β) Αν κάποια μέρα η Κ.Α.Α εφοδιαστεί με 5300 κιλά κρέας τότε ποια είναι η πιθανότητα να πουληθεί όλη αυτή η ποσότητα αυτή τη μέρα; (Μονάδες 9)

γ) Ποια ποσότητα κρέατος πρέπει να εφοδιαστεί η Κ.Α.Α σε κάποια μέρα έτσι ώστε με πιθανότητα 0,9985 η ποσότητα αυτή να είναι επαρκής για να εξυπηρετήσει την ημερήσια ζήτηση; (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

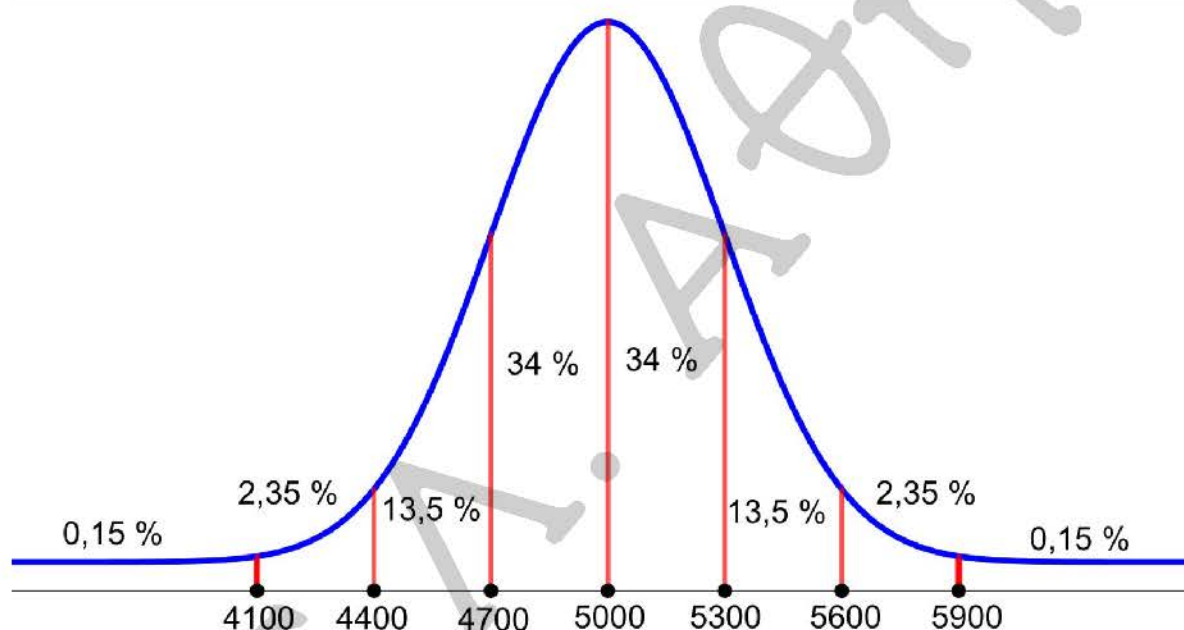
α) Δίνεται ότι η πιθανότητα να ζητηθούν μία τυχαία μέρα έως 5000 κιλά κρέας είναι 0,5.

Όμως η πιθανότητα του ενδεχομένου «η ημερήσια ζήτηση κρέατος σε κιλά είναι μικρότερη από μ » ισούται με 0,5. Άρα θα είναι $\mu = 5000$.

Επειδή η μέση τιμή της κατανομής είναι $\mu = 5000$ και η τυπική απόκλιση $\sigma = 300$, έχουμε:

- $(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = (4700, 5300)$
- $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) = (4400, 5600)$
- $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) = (4100, 5900)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω και λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση (γκουσιανή καμπύλη) της κατανομής:

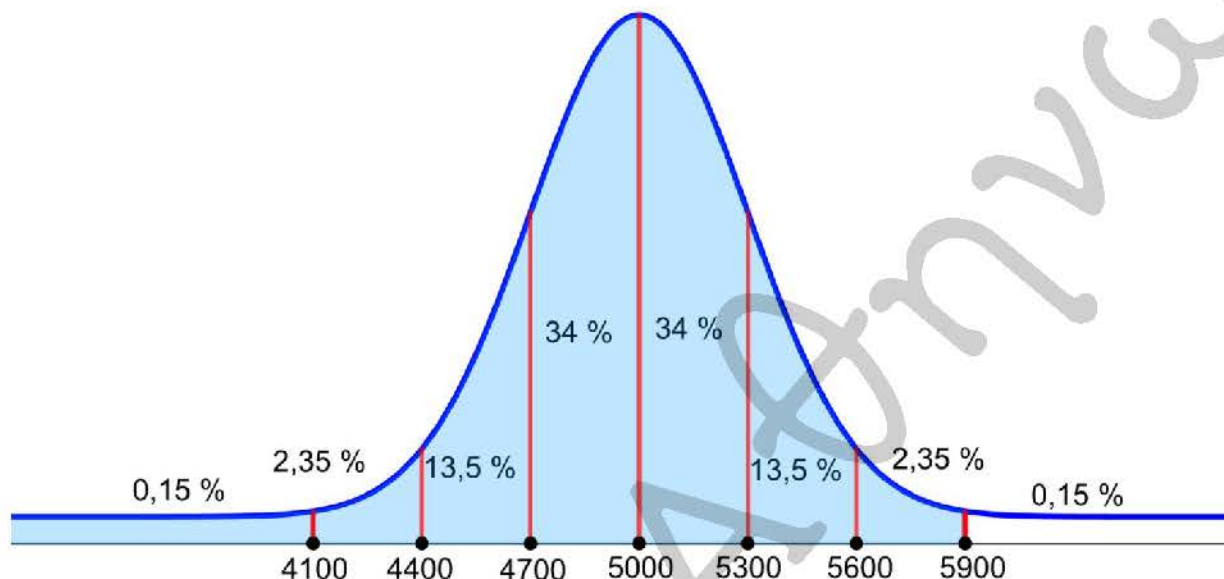


Επομένως,

- η πιθανότητα του ενδεχομένου «η ημερήσια ζήτηση κρέατος σε κιλά είναι στο διάστημα $(4700, 5300)$ » ισούται κατά προσέγγιση με 0,68,
- η πιθανότητα του ενδεχομένου «η ημερήσια ζήτηση κρέατος σε κιλά είναι στο διάστημα $(4400, 5600)$ » ισούται κατά προσέγγιση με 0,95,
- η πιθανότητα του ενδεχομένου «η ημερήσια ζήτηση κρέατος σε κιλά είναι στο διάστημα $(4100, 5900)$ » ισούται κατά προσέγγιση με 0,997.

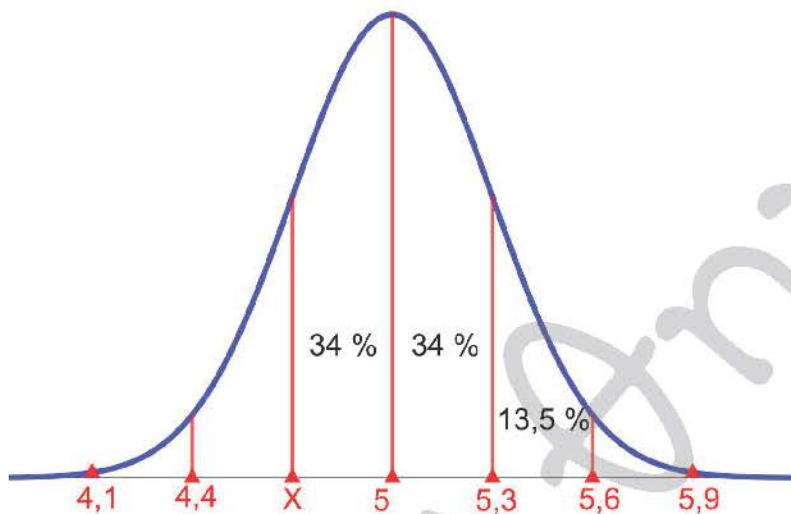
β) Για να πουληθεί όλο το κρέας θα πρέπει η ζήτηση να είναι μεγαλύτερη από 5300 κιλά. Η πιθανότητα του ενδεχομένου «η ημερήσια ζήτηση κρέατος σε κιλά είναι πάνω από 5300» ισούται κατά προσέγγιση με $0,135 + 0,0235 + 0,0015 = 0,16$.

γ) Θα πρέπει η ζήτηση να είναι μικρότερη από την ποσότητα κρέατος που αναζητάμε, με πιθανότητα 0,9985. Είναι $0,9985 = 1 - 0,0015$. Με 0,9985 ισούται κατά προσέγγιση η πιθανότητα του ενδεχομένου «η ημερήσια ζήτηση κρέατος σε κιλά είναι έως 5900». Επομένως η Κ.Α.Α θα πρέπει να εφοδιαστεί εκείνη τη μέρα με 5900 κιλά κρέας.



ΘΕΜΑ 4

Υποθέτουμε ότι η τιμή, σε ευρώ ανά λίτρο, του ελαιόλαδου στις επιχειρήσεις μιας ευρωπαϊκής χώρας Α ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 5$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι η πιθανότητα η τιμή του ελαιόλαδου σε τυχαία επιχείρηση της χώρας Α να είναι στο διάστημα $(5, 5,6)$ είναι 0,475 περίπου.

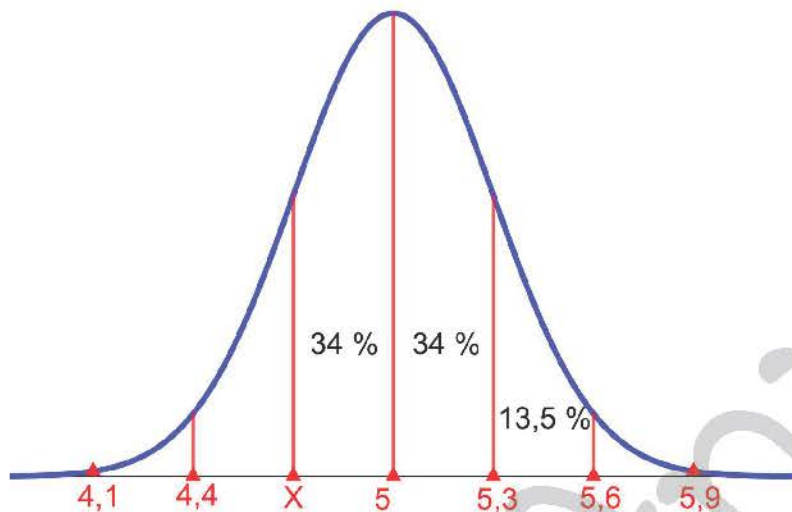
α) Με T συμβολίζουμε την τιμή του ελαιόλαδου, μιας τυχαίας επιχείρησης στην χώρα Α, σε ευρώ ανά λίτρο.

Να υπολογίσετε προσεγγιστικά:

- την πιθανότητα το T να είναι μεγαλύτερο του 5. (Μονάδες 6)
- την πιθανότητα να ισχύει $T > 5,6$. (Μονάδες 6)
- την τυπική απόκλιση σ της παραπάνω κανονικής κατανομής. (Μονάδες 6)

β) Δίνεται ότι η πιθανότητα η τιμή του ελαιόλαδου, στην τυχαία επιχείρηση της χώρας Α, να ανήκει στο διάστημα $(X, 5)$ είναι 0,34.

Να υπολογίσετε προσεγγιστικά την τιμή του X . (Μονάδες 7)



α)

i. Αν υποθέσουμε ότι η τιμή του ελαιόλαδου στη χώρα A ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή με $\mu = 5$ και εφόσον η επιχείρηση επιλέγεται τυχαία, τότε η πιθανότητα το T να είναι μεγαλύτερο του 5 είναι κατά προσέγγιση ίση με 0,5.

ii. Επιπλέον δίνεται ότι η πιθανότητα η τιμή του ελαιόλαδου σε τυχαία επιχείρηση της χώρας A να είναι στο διάστημα $(5, 5,6)$ είναι ίση με 0,475 περίπου. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα το T να ανήκει στο $(5, 5,6)$ είναι 0,475 περίπου.

Άρα η πιθανότητα να ισχύει $T > 5,6$ είναι $0,50 - 0,475 = 0,025$ περίπου.

iii. Αν σ είναι η τυπική απόκλιση της κατανομής (και εφόσον $\mu = 5$), τότε στο διάστημα $(5, 5 + 2\sigma)$ ανήκει περίπου το 47,5% των στοιχείων της παραπάνω κατανομής. Άρα η πιθανότητα η τιμή του ελαιόλαδου της τυχαίας επιχείρησης στη χώρα A να είναι στο διάστημα $(5, 5 + 2\sigma)$ είναι 0,475 περίπου, δηλαδή ίση με την πιθανότητα η τιμή του ελαιόλαδου να είναι στο διάστημα $(5, 5,6)$.

Άρα $5 + 2\sigma = 5,6$ ή $2\sigma = 0,6$ ή $\sigma = 0,3$.

β) Είναι $\mu - \sigma = 5 - 0,3 = 4,7$.

Στο διάστημα $(\mu - \sigma, \mu)$ ή $(4,7, 5)$ βρίσκεται περίπου το 34% των στοιχείων της παραπάνω κατανομής, άρα η πιθανότητα η τιμή του ελαιόλαδου στην τυχαία επιχείρηση της χώρας A να είναι στο διάστημα $(4,7, 5)$ είναι ίση με 0,34 περίπου, δηλαδή προσεγγιστικά ίση με την πιθανότητα να είναι στο διάστημα $(X, 5)$. Άρα μπορούμε να πούμε ότι $X = 4,7$, κατά προσέγγιση.

ΘΕΜΑ 4

Τα βάρη των αβγών, σε γραμμάρια, που παράγονται σε μία φάρμα, ακολουθούν την κανονική κατανομή. Τα αβγά πωλούνται σε τέσσερα μεγέθη:

- μικρό μέγεθος: με βάρος μικρότερο από 53 γραμμάρια
- μεσαίο μέγεθος: με βάρος από 53 έως 63 γραμμάρια
- μεγάλο μέγεθος: με βάρος από 63 έως 73 γραμμάρια
- πολύ μεγάλο μέγεθος: με βάρος μεγαλύτερο από 73 γραμμάρια

Έχει παρατηρηθεί, ότι μικρού μεγέθους είναι το 2,5% των αβγών και πολύ μεγάλου μεγέθους είναι επίσης το 2,5% των αβγών.

α) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι 63 και η τυπική απόκλιση 5.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα ποσοστά των αβγών που αναμένονται, σε καθένα από τα τέσσερα μεγέθη.

(Μονάδες 10)

γ) Να συγκρίνετε το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μεγαλύτερο από 50 γραμμάρια με το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μικρότερο από 70 γραμμάρια.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Έστω μ η μέση τιμή και σ η τυπική απόκλιση των βαρών των αβγών που παράγονται στη φάρμα. Επειδή τα βάρη ακολουθούν την κανονική κατανομή, εκτιμάται ότι το ποσοστό των αβγών που τα βάρη τους ανήκουν στο διάστημα $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ είναι περίπου 95%. Λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής, αναμένεται να έχουν βάρος το πολύ $\mu - 2\sigma$, το 2,5% των αβγών και βάρος τουλάχιστον $\mu + 2\sigma$, επίσης το 2,5% των αβγών.

Επειδή τα μικρότερα βάρη έχουν τα αβγά μικρού μεγέθους που είναι το 2,5% των αβγών και τα μεγαλύτερα βάρη έχουν τα αβγά πολύ μεγάλου μεγέθους που είναι επίσης το 2,5% των αβγών, θα έχουμε $\mu - 2\sigma = 53$ και $\mu + 2\sigma = 73$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$2\mu = 53 + 73 = 126, \text{ οπότε } \mu = 63.$$

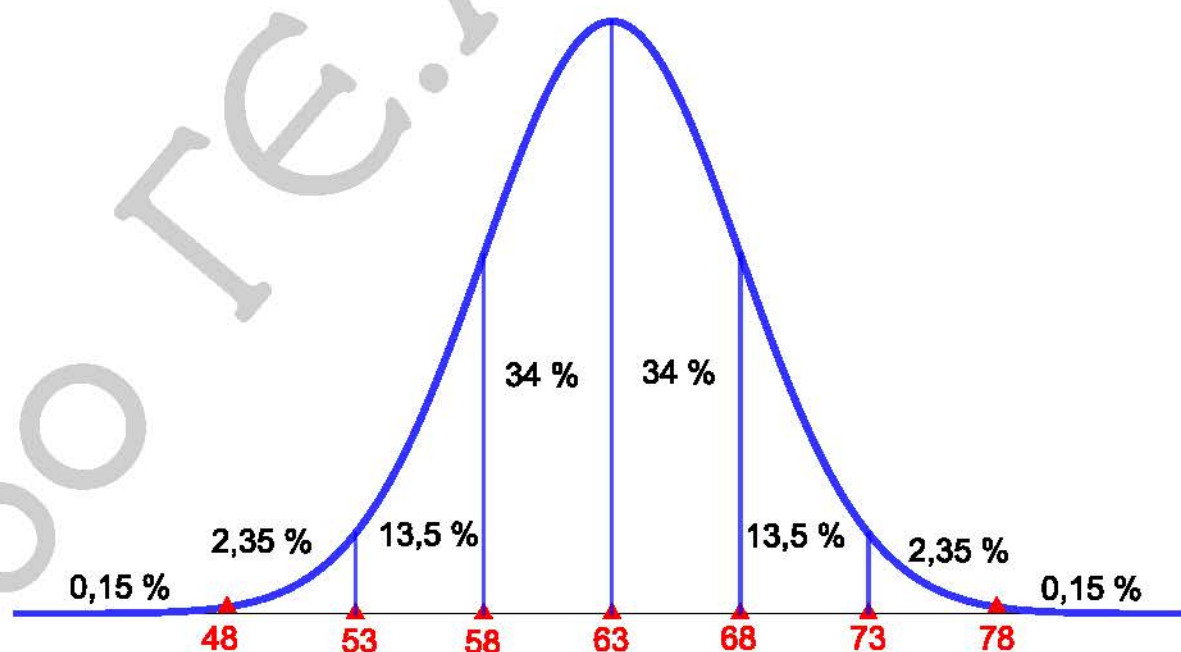
Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$4\sigma = 73 - 53 = 20, \text{ οπότε } \sigma = 5.$$

β) Είδαμε προηγουμένως ότι η μέση τιμή της κανονικής κατανομής είναι 63 και η τυπική απόκλιση 5, οπότε αναμένεται το ποσοστό των αβγών με βάρος που ανήκει στο διάστημα:

- $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ ή $(58, 68)$ να είναι περίπου 68% ,
- $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ ή $(53, 73)$ να είναι περίπου 95% ,
- $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ ή $(48, 78)$ να είναι περίπου 99,7%.

Σύμφωνα με τα παραπάνω και λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση (γκουσιανή καμπύλη) της κατανομής:

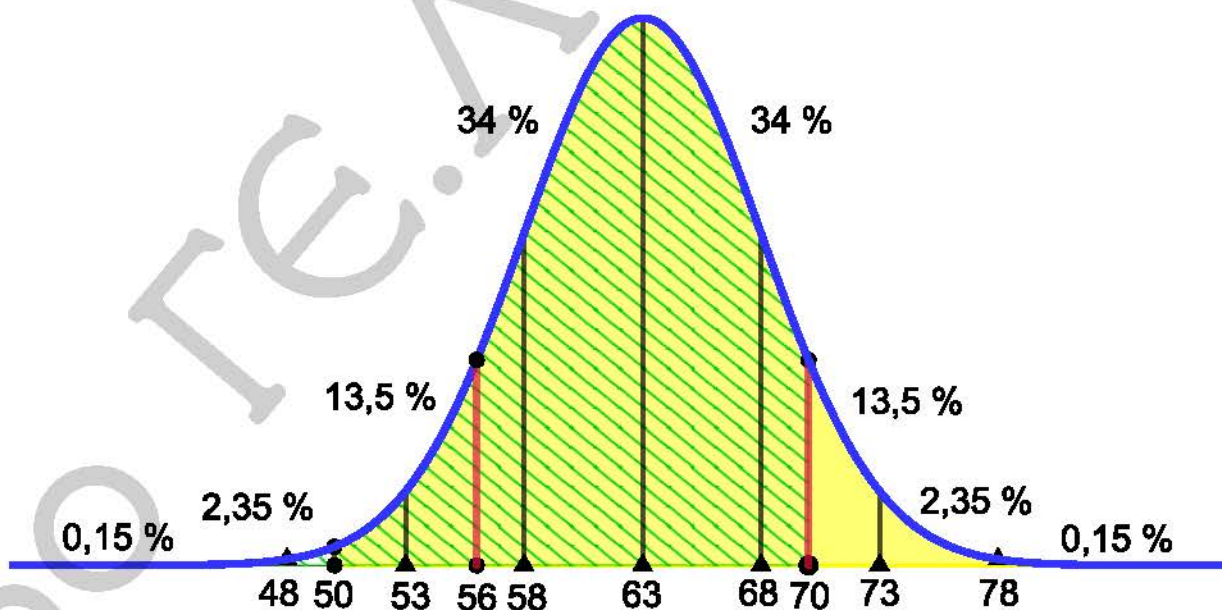


Επομένως τα ποσοστά των αβγών σε καθένα από τα τέσσερα μεγέθη, αναμένεται να είναι:

- μικρού μεγέθους (με βάρος μικρότερο από 53 γραμμάρια), το 2,5%.
- μεσαίου μεγέθους (με βάρος από 53 έως 63 γραμμάρια), το $13,5\% + 34\% = 47,5\%$.
- μεγάλου μεγέθους (με βάρος από 63 έως 73 γραμμάρια), το $13,5\% + 34\% = 47,5\%$.
- πολύ μεγάλου μεγέθους (με βάρος μεγαλύτερο από 73 γραμμάρια), το 2,5%.

γ) Το ποσοστό των αβγών με βάρος κάτω από 70, είναι μικρότερο από το ποσοστό των αβγών με βάρος κάτω από 73, το οποίο είναι $100\% - 2,5\% = 97,5\%$. Το ποσοστό των αβγών με βάρος πάνω από 50, είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των αβγών με βάρος πάνω από 53, το οποίο είναι $100\% - 2,5\% = 97,5\%$. Άρα το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μεγαλύτερο από 50 γραμμάρια είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μικρότερο από 70 γραμμάρια.

Εναλλακτικά: Λόγω συμμετρίας της κατανομής γύρω από το $\mu = 63$, το ποσοστό των αβγών με βάρος κάτω από $63 + 7 = 70$ είναι ίσο με το ποσοστό των αβγών με βάρος πάνω από $63 - 7 = 56$. Όμως το ποσοστό των αβγών με βάρος πάνω από 50, είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των αβγών με βάρος πάνω από 56. Άρα το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μεγαλύτερο από 50 γραμμάρια είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μικρότερο από 70 γραμμάρια.



ΘΕΜΑ 4

Μια εταιρεία επεξεργασίας ρυζιού χρησιμοποιεί ένα αυτόματο μηχάνημα για να συσκευάσει χύμα ρύζι σε σακούλες ετικέτας 1000 γραμμαρίων. Η ποσότητα γέμισης, σε γραμμάρια, που διανέμεται από το μηχάνημα σε κάθε σακούλα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 1010 και τυπική απόκλιση 10.

α) Παίρνουμε ένα μεγάλο δείγμα των παραπάνω συσκευασιών. Να εκτιμήσετε το ποσοστό των συσκευασιών του δείγματος με βάρος ρυζιού:

- i. μικρότερο από 1000 γραμμάρια, (Μονάδες 9)
- ii. μεταξύ 990 και 1010 γραμμαρίων. (Μονάδες 9)

β) Στην εταιρεία θα επιβληθεί πρόστιμο, αν περισσότερο από το 2,5% των συσκευασιών έχει βάρος ρυζιού μικρότερο από 1000 γραμμάρια η καθεμία. Ωστόσο το αυτόματο μηχάνημα έχει τη δυνατότητα να ρυθμίσει τη μέση τιμή της ποσότητας γέμισης που διανέμει στις σακούλες. Ποια νέα μέση τιμή θα πρέπει να επιλέξουν στην εταιρεία (διατηρώντας την τυπική απόκλιση 10) ώστε να μην τους επιβληθεί πρόστιμο; (Μονάδες 7)

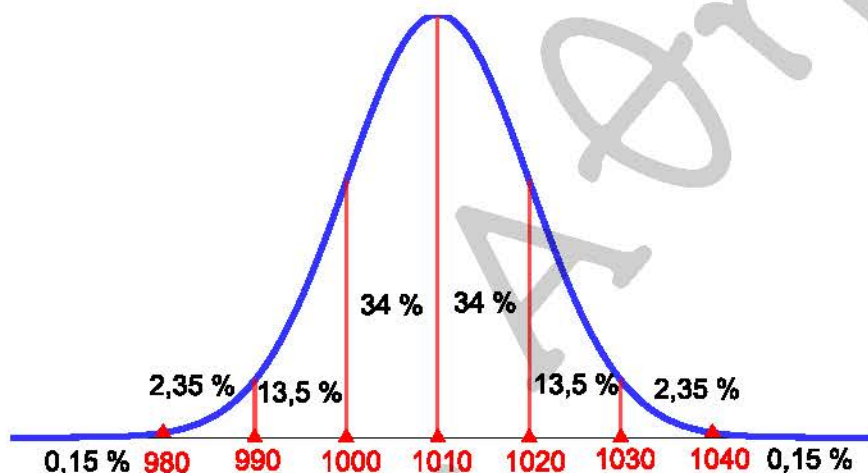
ΛΥΣΗ

α) Η ποσότητα γέμισης, σε γραμμάρια, που διανέμεται από το μηχάνημα σε κάθε σακούλα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 1010 και τυπική απόκλιση 10.

Επομένως, εκτιμάται ότι το ποσοστό των συσκευασιών του δείγματος που το βάρος του ρυζιού, ανήκει στο διάστημα:

- $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ ή $(1000, 1020)$ είναι περίπου 68% ,
- $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ ή $(990, 1030)$ είναι περίπου 95% ,
- $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ ή $(980, 1040)$ είναι περίπου 99,7%.

Σύμφωνα με τα παραπάνω και λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση (γκουσιανή καμπύλη) της κατανομής.



Επομένως:

i. Το ποσοστό των συσκευασιών του δείγματος με βάρος ρυζιού, μικρότερο από 1000 γραμμάρια, εκτιμάται ότι είναι περίπου $50\% - 34\% = 16\%$.

Εναλλακτικά: $13,5\% + 2,35\% + 0,15\% = 16\%$.

ii. Το ποσοστό των συσκευασιών του δείγματος με βάρος ρυζιού, μεταξύ 990 και 1010 γραμμάρια, εκτιμάται ότι είναι περίπου $34\% + 13,5\% = 47,5\%$.

β) Έστω μ' η νέα μέση τιμή της ποσότητας γέμισης που θα διανέμεται από το μηχάνημα σε κάθε σακούλα. Η ποσότητα γέμισης ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ' και τυπική απόκλιση $\sigma = 10$.

Για να μην επιβληθεί πρόστιμο στην εταιρεία, θα πρέπει το πολύ το 2,5% των συσκευασιών να έχει βάρος ρυζιού, μικρότερο από 1000 γραμμάρια. Από την κανονική κατανομή (γκουσιανή καμπύλη) γνωρίζουμε ότι μικρότερο από $\mu' - 2\sigma$ είναι περίπου το 2,5% των παρατηρήσεων.

Είναι $\mu' - 2\sigma = 1000$ ή $\mu' - 2 \cdot 10 = 1000$ ή $\mu' = 1020$. Επομένως η μέση τιμή της ποσότητας γέμισης σε κάθε σακούλα, θα πρέπει να ρυθμιστεί στην τιμή 1020.

ΘΕΜΑ 2

Υποθέτουμε ότι η διάρκεια της ανθρώπινης κύησης, σε ημέρες, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 266 και τυπική απόκλιση 16. Θεωρούμε ένα μεγάλο δείγμα κυήσεων.

α) Να υπολογίσετε προσεγγιστικά το ποσοστό εκείνων που θα διαρκέσουν:

- i. το πολύ 266 ημέρες, (Μονάδες 6)
- ii. τουλάχιστον 282 ημέρες, (Μονάδες 6)
- iii. περισσότερο από 298 ή λιγότερο από 234 ημέρες. (Μονάδες 7)

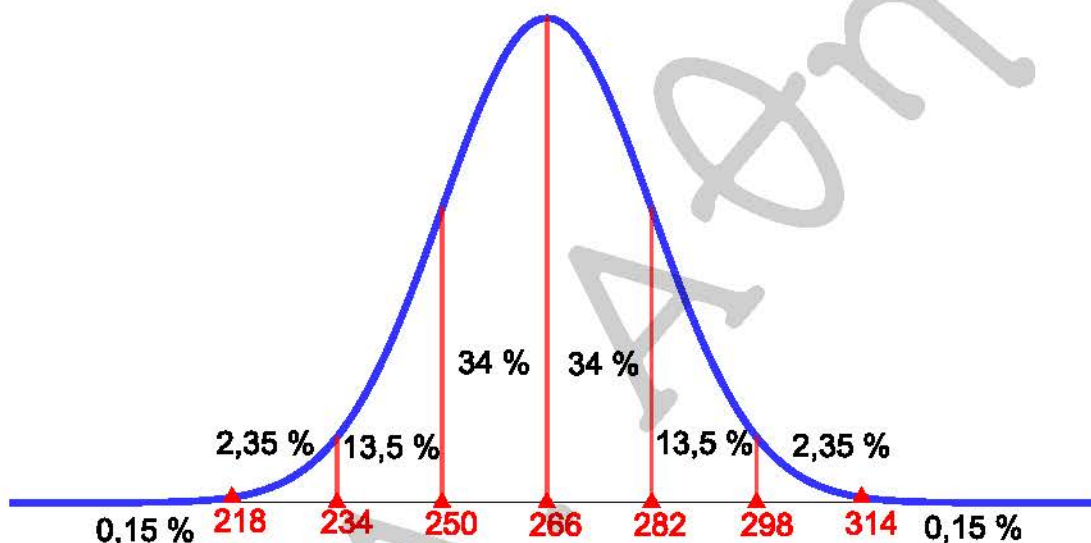
β) Να γράψετε ένα διάστημα στο οποίο ανήκει η διάρκεια σε ημέρες του 95% των κυήσεων. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η διάρκεια της ανθρώπινης κύησης, σε ημέρες, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 266$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 16$. Επομένως, εκτιμάται ότι το ποσοστό των κυήσεων που ανήκει στο διάστημα:

- $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ ή $(250, 282)$ είναι περίπου 68% ,
- $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ ή $(234, 298)$ είναι περίπου 95% ,
- $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ ή $(218, 314)$ είναι περίπου 99,7%.

Σύμφωνα με τα παραπάνω και λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση (γκαουσιανή καμπύλη) της κατανομής:



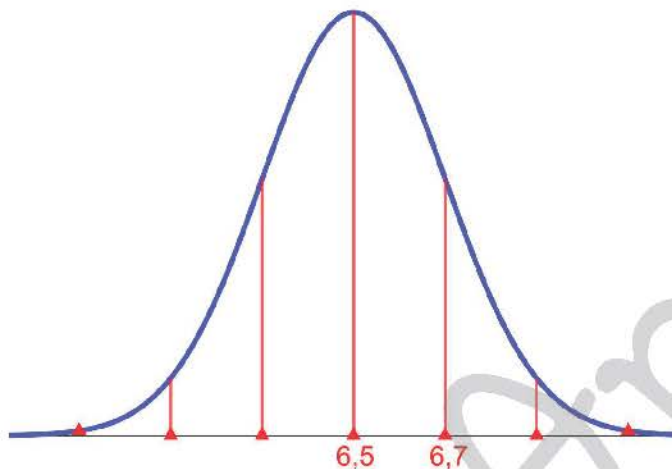
Επομένως, το ποσοστό των κυήσεων που αναμένεται να διαρκέσουν:

- i. το πολύ 266 ημέρες, είναι περίπου 50%,
- ii. τουλάχιστον 282 ημέρες, είναι περίπου $13,5\% + 2,5\% = 16\%$,
- iii. περισσότερο από 298 ή λιγότερο από 234 ημέρες, είναι περίπου $2,5\% + 2,5\% = 5\%$.

β) Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι, ένα διάστημα στο οποίο ανήκει η διάρκεια σε ημέρες του 95% των κυήσεων, είναι το $(234, 298)$.

ΘΕΜΑ 4

Ο Κώστας βαδίζει με γρήγορο ρυθμό και η ταχύτητά του, σε χιλιόμετρα ανά ώρα, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 6,5$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η πιθανότητα, σε μια τυχαία διαδρομή η ταχύτητά του να είναι μεταξύ 6,5 και 6,7 χιλιομέτρων την ώρα είναι 0,34 περίπου.

α) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση σ της παραπάνω κανονικής κατανομής.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα, σε μια τυχαία διαδρομή η ταχύτητα του Κώστα να είναι:

i. μικρότερη από 6,5 χιλιόμετρα την ώρα,

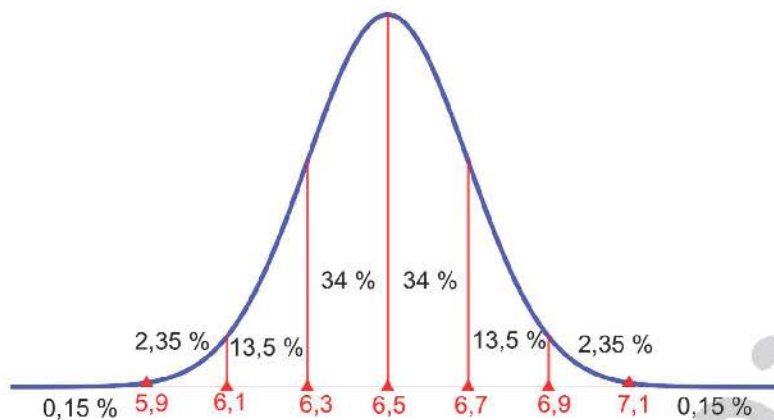
(Μονάδες 6)

ii. μικρότερη από 6,1 χιλιόμετρα την ώρα.

(Μονάδες 8)

γ) Ο Κώστας άλλαξε τον τρόπο περπατήματός του. Η ταχύτητά του, σε χιλιόμετρα την ώρα ακολουθεί και πάλι την κανονική κατανομή, αλλά με $\mu = 6,3$ και σ διαφορετική από την προηγούμενη. Η πιθανότητα η ταχύτητά του, σε μια τυχαία διαδρομή, να είναι μεταξύ 6,3 και 6,6 χιλιομέτρων την ώρα είναι ίση με 0,34 περίπου. Να υπολογίσετε την πιθανότητα η ταχύτητά του να είναι μικρότερη από 6 χιλιόμετρα την ώρα.

(Μονάδες 4)



α) Ας υποθέσουμε ότι η τυπική απόκλιση της κατανομής είναι σ και γνωρίζουμε ότι $\mu = 6,5$. Η πιθανότητα, σε τυχαία διαδρομή, η ταχύτητα του Κώστα να είναι στο διάστημα $(6,5, 6,5 + \sigma)$ είναι 0,34 περίπου, εφόσον εκεί ανήκει το 34% των στοιχείων στην παραπάνω κανονική κατανομή. Συνεπώς είναι ίση με την πιθανότητα η ταχύτητα να είναι στο διάστημα $(6,5, 6,7)$.

Άρα $6,5 + \sigma = 6,7$ ή $\sigma = 0,2$.

Για την κανονική κατανομή με $\mu = 6,5$ και $\sigma = 0,2$ υπολογίζουμε:

$$\mu + 3\sigma = 6,5 + 3 \cdot 0,2 = 7,1$$

$$\mu + 2\sigma = 6,5 + 2 \cdot 0,2 = 6,9$$

$$\mu + \sigma = 6,5 + 0,2 = 6,7$$

$$\mu - \sigma = 6,5 - 0,2 = 6,3$$

$$\mu - 2\sigma = 6,5 - 2 \cdot 0,2 = 6,1$$

$$\mu - 3\sigma = 6,5 - 3 \cdot 0,2 = 5,9$$

Συνεπώς μπορούμε να συμπληρώσουμε το σχήμα, όπως φαίνεται παραπάνω.

β)

i. Η πιθανότητα η ταχύτητα του Κώστα να είναι μικρότερη από 6,5 χιλιόμετρα την ώρα είναι ίση με 0,5, γιατί η ταχύτητα του Κώστα ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\mu = 6,5$ και η διαδρομή είναι τυχαία.

ii. Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα (γκουσιανή καμπύλη) το $2,35\% + 0,15\% = 2,5\%$ των στοιχείων έχουν τιμή μικρότερη από 6,1. Άρα, εφόσον η διαδρομή είναι τυχαία, η πιθανότητα η ταχύτητα του Κώστα σε αυτή τη διαδρομή να είναι μικρότερη από 6,1 χιλιόμετρα την ώρα είναι ίση με 0,025 περίπου.

γ) Εφόσον η ταχύτητα του Κώστα, σε χιλιόμετρα την ώρα ακολουθεί κανονική κατανομή με $\mu = 6,3$ και τυπική απόκλιση σ , τότε η πιθανότητα η ταχύτητά του, σε μια τυχαία διαδρομή να βρίσκεται στο διάστημα $(6,3, 6,3 + \sigma)$ είναι ίση με 0,34 περίπου. Άρα είναι ίση με την πιθανότητα η ταχύτητά του να βρίσκεται στο διάστημα $(6,3, 6,6)$. Επομένως $6,3 + \sigma = 6,6$ ή $\sigma = 0,3$.

Υπολογίζουμε:

$$\mu + 3\sigma = 6,3 + 3 \cdot 0,3 = 7,2$$

$$\mu + 2\sigma = 6,3 + 2 \cdot 0,3 = 6,9$$

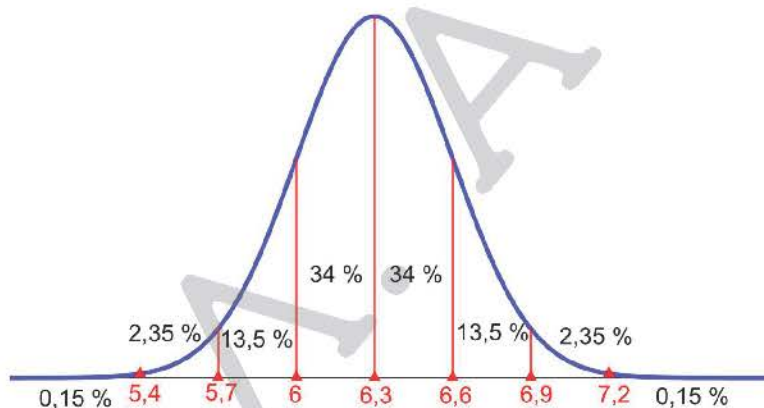
$$\mu + \sigma = 6,3 + 0,3 = 6,6$$

$$\mu - \sigma = 6,3 - 0,3 = 6$$

$$\mu - 2\sigma = 6,3 - 2 \cdot 0,3 = 5,7$$

$$\mu - 3\sigma = 6,3 - 3 \cdot 0,3 = 5,4$$

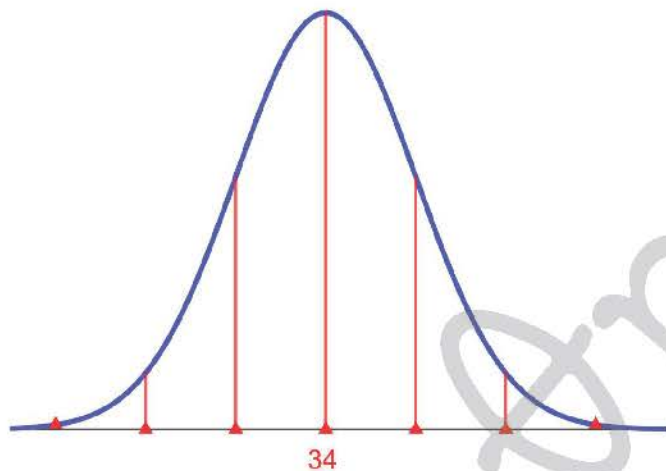
Και σχεδιάζουμε την αντίστοιχη γκαουσιανή καμπύλη:



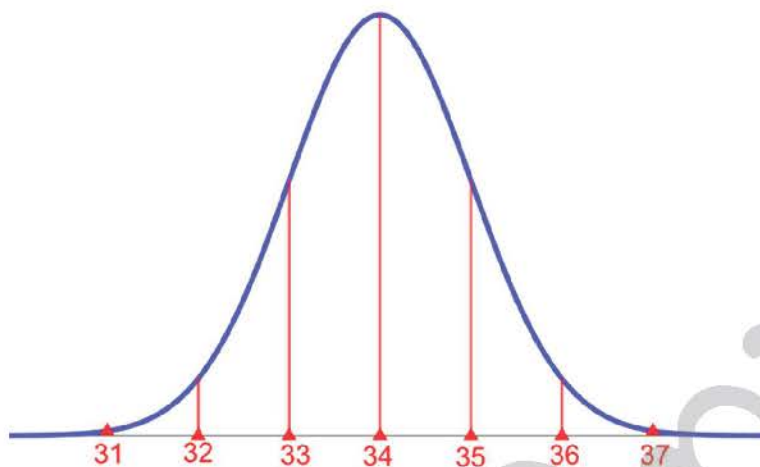
Σε αυτή την κανονική κατανομή, το $50\% - 34\% = 16\%$ των στοιχείων έχουν τιμή μικρότερη από 6. Επομένως η πιθανότητα η ταχύτητα του Κώστα να είναι μικρότερη από 6 χιλιόμετρα την ώρα, σε μια τυχαία διαδρομή είναι ίση με 0,16 περίπου.

ΘΕΜΑ 2

Η Χριστίνα κάθε απόγευμα περπατάει 3 χιλιόμετρα. Θεωρούμε ότι ο χρόνος, σε min (λεπτά), στον οποίο περπατάει τα 3 χιλιόμετρα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 34$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 1$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $\mu - \sigma$, $\mu + \sigma$, $\mu - 2\sigma$ και $\mu + 2\sigma$. (Μονάδες 4)
- β) Επιλέγουμε τυχαία μια διαδρομή 3 χιλιομέτρων της Χριστίνας. Να υπολογίσετε την πιθανότητα, ο χρόνος της για αυτή τη διαδρομή:
- i. να ήταν μεγαλύτερος από 34 min , (Μονάδες 7)
 - ii. να ανήκει στο διάστημα (33, 35), (Μονάδες 7)
 - iii. να ανήκει στο διάστημα (32, 36). (Μονάδες 7)



α) Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\mu - \sigma = 34 - 1 = 33$$

$$\mu + \sigma = 34 + 1 = 35$$

$$\mu - 2\sigma = 34 - 2 \cdot 1 = 32$$

$$\mu + 2\sigma = 34 + 2 \cdot 1 = 36$$

β) Ο χρόνος της Χριστίνας ακολουθεί την κανονική κατανομή που αναπαρίσταται με την γκαουσιανή καμπύλη του παραπάνω σχήματος. Η διαδρομή που επιλέγουμε είναι μια τυχαία διαδρομή 3 χιλιομέτρων, άρα:

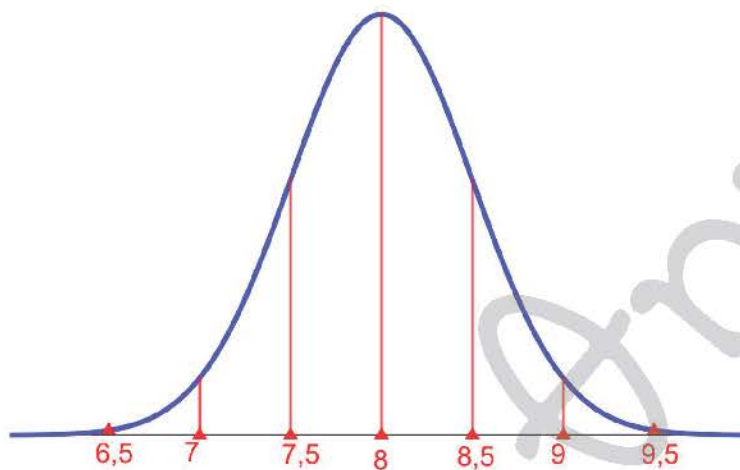
i. Η πιθανότητα ο χρόνος της Χριστίνας να ήταν μεγαλύτερος από 34 min είναι ίση με 0,5, γιατί $\mu = 34$.

ii. Το (33, 35) αντιστοιχεί στο $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ της παραπάνω κατανομής, άρα η πιθανότητα ο χρόνος της Χριστίνας να ανήκει στο διάστημα (33, 35) είναι ίση με 0,68, περίπου.

iii. Το (32, 36) αντιστοιχεί στο $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ της παραπάνω κατανομής, άρα η πιθανότητα ο χρόνος της Χριστίνας να ανήκει στο διάστημα (32, 36) είναι ίση με 0,95, περίπου.

ΘΕΜΑ 2

Η κατανάλωση καυσίμου σε λίτρα, ανά 100 χιλιόμετρα ενός συγκεκριμένου οχήματος, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 8$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0,5$, όπως φαίνεται στο σχήμα (στον οριζόντιο άξονα είναι η κατανάλωση καυσίμου, σε λίτρα).



α) Να υπολογίσετε τις τιμές των $\mu + 2\sigma$ και $\mu - 2\sigma$.

(Μονάδες 6)

β) Να γράψετε τα διαστήματα $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ και $(\mu, \mu + 2\sigma)$ με αριθμούς.

(Μονάδες 4)

γ) Επιλέγουμε τυχαία μια διαδρομή 100 χιλιομέτρων του οχήματος. Να υπολογίσετε την πιθανότητα καθενός από τα παρακάτω ενδεχόμενα για την κατανάλωση του οχήματος σε αυτή τη διαδρομή:

«Η κατανάλωση είναι μεγαλύτερη από 8 λίτρα.»

«Η κατανάλωση ανήκει στο διάστημα $(7, 9)$.»

«Η κατανάλωση ανήκει στο διάστημα $(8, 9)$.»

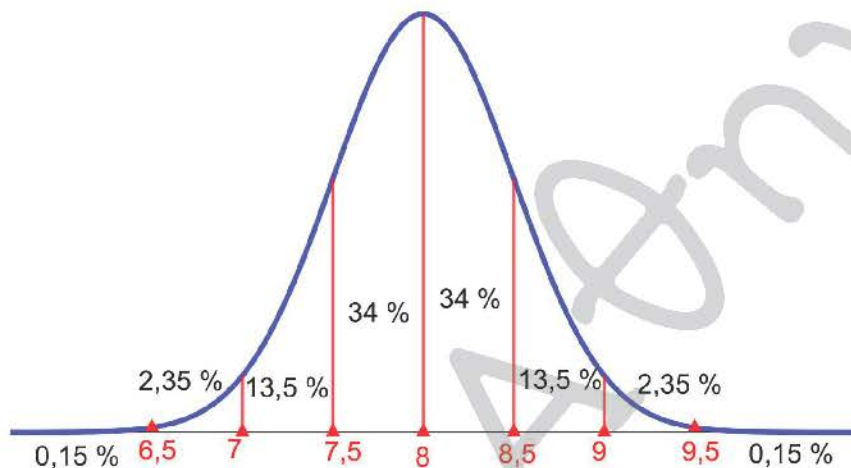
(Μονάδες 15)

α) Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\mu + 2\sigma = 8 + 2 \cdot 0,5 = 9$$

$$\mu - 2\sigma = 8 - 2 \cdot 0,5 = 7$$

β) Το $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ αντιστοιχεί στο $(7, 9)$ και το $(\mu, \mu + 2\sigma)$ αντιστοιχεί στο $(8, 9)$.



γ) Η κατανάλωση του οχήματος ακολουθεί την κανονική κατανομή που αναπαρίσταται με την γκαουσιανή καμπύλη του παραπάνω οχήματος. Εφόσον η επιλογή της διαδρομής γίνεται τυχαία, τότε έχουμε τα εξής:

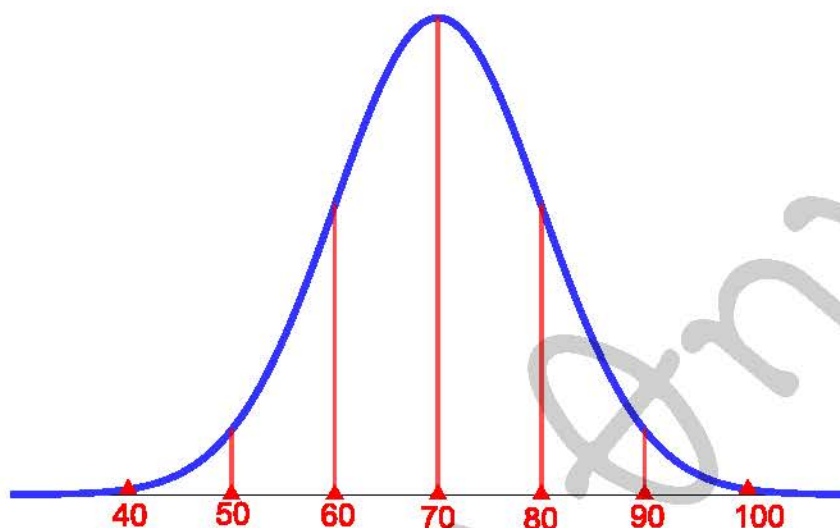
Είναι $\mu = 8$, άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου «η κατανάλωση είναι μεγαλύτερη από 8 λίτρα» είναι ίση με 50% ή 0,5.

Επίσης, με τη βοήθεια της απάντησης του β) ερωτήματος:

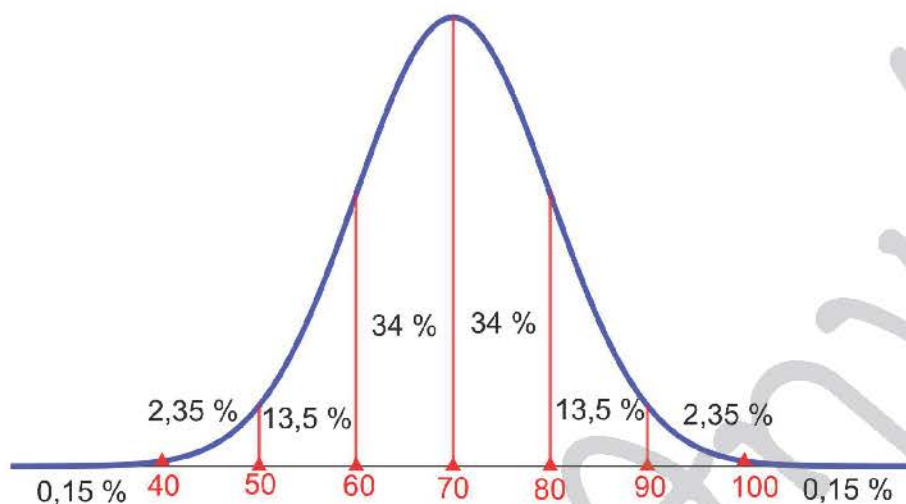
- η πιθανότητα του ενδεχομένου «η κατανάλωση ανήκει στο διάστημα $(7, 9)$ » είναι ίση με 95% ή 0,95 περίπου.
- η πιθανότητα του ενδεχομένου «η κατανάλωση ανήκει στο διάστημα $(8, 9)$ » είναι ίση με $0,95: 2 = 0,475$ περίπου.

ΘΕΜΑ 4

Υποθέτουμε ότι το βάρος, σε κιλά, των μαθητών λυκείου στην Ελλάδα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 70$ (όπως στο σχήμα) και το 99,7% περίπου των μαθητών έχει βάρος που ανήκει στο διάστημα $(40, 100)$.



- α) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση σ της κατανομής. (Μονάδες 10)
- β) Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή λυκείου από όλο τον πληθυσμό των μαθητών λυκείου, στην Ελλάδα.
- i. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά που ανήκει στο διάστημα $(60, 80)$ ». (Μονάδες 6)
- ii. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά που ανήκει στο διάστημα $(80, 90)$ ». (Μονάδες 9)



α) Εφόσον το βάρος των μαθητών ακολουθεί την κανονική κατανομή γνωρίζουμε ότι το 99,7% περίπου βρίσκεται στο διάστημα $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

Όμως $\mu = 70$, άρα $70 - 3\sigma = 40$ και $70 + 3\sigma = 100$.

Όποια από τις παραπάνω δύο εξισώσεις κι αν λύσουμε, προκύπτει ότι $\sigma = 10$.

β)

Α' τρόπος

Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, το οποίο αντιστοιχεί στην κανονική κατανομή με $\mu = 70$ και $\sigma = 10$:

i. Το 68% των μαθητών λυκείου έχει βάρος στο διάστημα $(60, 80)$. Άρα, εφόσον η επιλογή του μαθητή είναι τυχαία, η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά στο διάστημα $(60, 80)$ » είναι ίση με 0,68 περίπου.

ii. Το 13,5% των μαθητών λυκείου έχει βάρος στο διάστημα $(80, 90)$ άρα, εφόσον η επιλογή του μαθητή είναι τυχαία, η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά που ανήκει στο διάστημα $(80, 90)$ » είναι ίση με 0,135, περίπου.

Β' τρόπος

i. Παρατηρούμε ότι $\mu - \sigma = 70 - 10 = 60$ και $\mu + \sigma = 70 + 10 = 80$.

Άρα, εφόσον η επιλογή του μαθητή είναι τυχαία, η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά στο διάστημα $(60, 80)$ » είναι ίση με 0,68 περίπου, γιατί το διάστημα

$(60, 80)$ αντιστοιχεί στο διάστημα $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ της παραπάνω κανονικής κατανομής. Στο διάστημα αυτό ανήκει το 68% των βαρών των μαθητών.

ii. Αρχικά βρίσκουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά στο διάστημα $(50, 90)$ ». Εφόσον η επιλογή του μαθητή είναι τυχαία, η πιθανότητα είναι ίση με 0,95 περίπου, γιατί το διάστημα $(50, 90)$ είναι το $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ της κατανομής και σε αυτό το διάστημα ανήκει το 95% των βαρών των μαθητών.

Άρα, η πιθανότητα του ενδεχομένου «το βάρος του μαθητή σε κιλά ανήκει σε ένα από τα διαστήματα $(50, 60)$ και $(80, 90)$ » είναι ίση με $0,95 - 0,68 = 0,27$ περίπου. Οπότε (λόγω συμμετρίας) η πιθανότητα «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά στο διάστημα $(80, 90)$ » είναι ίση με $0,27 : 2 = 0,135$ περίπου.

ΘΕΜΑ 4

Για την εισαγωγή σε μία σχολή, μία γυναίκα ή ένας άνδρας είναι επιλέξιμοι αν το ύψος τους σε cm, είναι τουλάχιστον 170. Η κατανομή του ύψους των γυναικών είναι κανονική με μέση τιμή 163 και τυπική απόκλιση 7 και η κατανομή του ύψους των ανδρών είναι κανονική με μέση τιμή 170. Επιλέγουμε τυχαία μία γυναίκα και έναν άνδρα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η πιθανότητα ώστε μία γυναίκα να είναι επιλέξιμη, είναι 0,16, (Μονάδες 9)
- ii. η πιθανότητα ώστε ένας άνδρας να είναι επιλέξιμος, είναι 0,5. (Μονάδες 9)

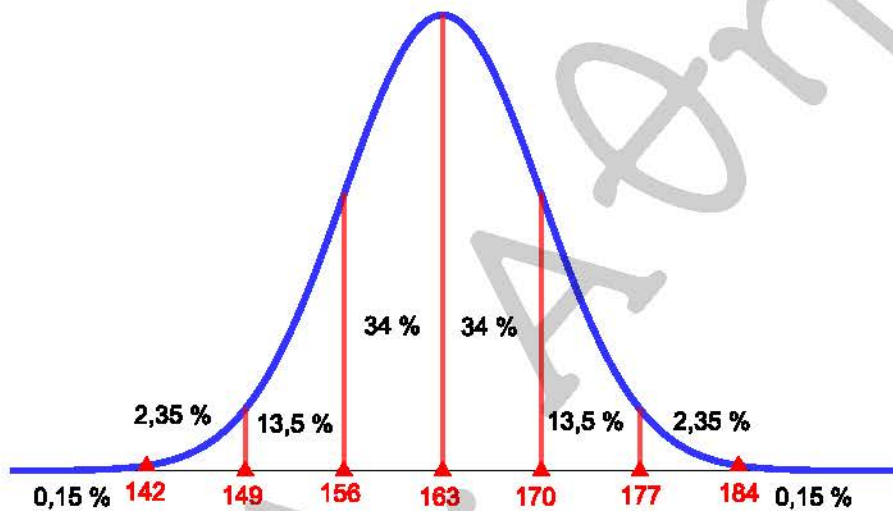
β) Αν για τους άνδρες παραμείνει η απαίτηση του ελάχιστου ύψους στο 170, πόσο θα πρέπει να γίνει η απαίτηση του ελάχιστου ύψους για τις γυναίκες, ώστε για μια γυναίκα να είναι εξίσου πιθανό να είναι επιλέξιμη όσο για έναν άνδρα. (Μονάδες 7)

α)

i. Τα ύψη των γυναικών είναι κανονικά κατανεμημένα με μέση τιμή $\mu = 163$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 7$. Επομένως το ποσοστό των γυναικών είναι:

- 68 % , με ύψος που ανήκει στο διάστημα $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ ή $(156, 170)$
- 95% , με ύψος που ανήκει στο διάστημα $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ ή $(149, 177)$
- 99,7% , με ύψος που ανήκει στο διάστημα $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ ή $(142, 184)$

Σύμφωνα με τα παραπάνω και λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση (γκουσιανή καμπύλη) της κατανομής:



Άρα το ποσοστό των γυναικών με ύψος τουλάχιστον 170, είναι

$$\frac{1}{2} \cdot (100\% - 68\%) = \frac{1}{2} \cdot 32\% = 16\%.$$

Επομένως η πιθανότητα ώστε μια γυναίκα να είναι επιλέξιμη είναι $p_1 = 0,16$.

ii. Τα ύψη των ανδρών είναι κανονικά κατανεμημένα με μέση τιμή $\mu_\alpha = 170$, όσο είναι και η απαίτηση του ελάχιστου ύψους. Άρα το ποσοστό των ανδρών με ύψος τουλάχιστον 170, είναι 50%. Επομένως η πιθανότητα ώστε ένας άνδρας να είναι επιλέξιμος είναι $p_2 = 0,5$.

β) Για τις γυναίκες το ελάχιστο ύψος, ώστε για μια γυναίκα να είναι εξίσου πιθανό να είναι επιλέξιμη όσο για έναν άνδρα, είναι ίσο με τη μέση τιμή της κατανομής του ύψους των γυναικών, που είναι 163, αφού το ποσοστό των γυναικών με ύψος τουλάχιστον 163, είναι 50%. Τότε η πιθανότητα ώστε μια γυναίκα να είναι επιλέξιμη θα είναι $p_1 = 0,5$, ίση με την πιθανότητα ώστε ένας άνδρας να είναι επιλέξιμος που παραμένει $p_2 = 0,5$.

ΘΕΜΑ 4

Ο Δείκτης Μάζας Σώματος (ΔΜΣ) χρησιμοποιείται ως διαγνωστικό εργαλείο, πιθανών προβλημάτων υγείας ενός ατόμου σε σχέση με το βάρος του. Υπολογίζεται διαιρώντας το βάρος του ατόμου, σε κιλά, με το τετράγωνο του ύψους του, σε μέτρα. Σε μια έρευνα επιλέχθηκε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα 5000 ανδρών και 5000 γυναικών και καταγράφηκε ο ΔΜΣ αυτών των ατόμων. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων φύλου και κατηγορίας ΔΜΣ, ως προς το φύλο.

α) Σε ποια κατηγορία του ΔΜΣ παρατηρείται το μεγαλύτερο ποσοστό:

i. των ανδρών, (Μονάδες 4)

ii. των γυναικών; (Μονάδες 4)

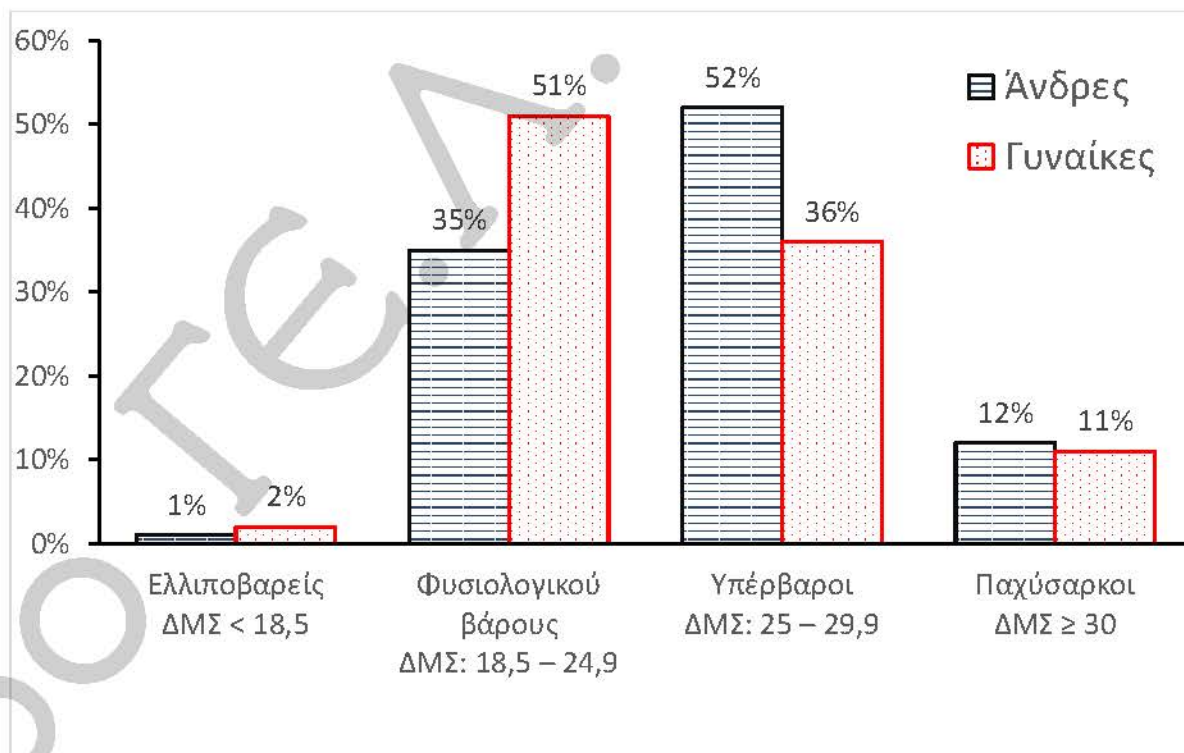
β) Ποιο είναι το ποσοστό με βάρος μη-φυσιολογικό:

i. των ανδρών, (Μονάδες 4)

ii. των γυναικών, (Μονάδες 4)

iii. όλων των ατόμων του δείγματος; (Μονάδες 4)

γ) Από την παραπάνω έρευνα, μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι η κατηγορία ΔΜΣ ενός ατόμου (ελλιποβαρές, φυσιολογικό, υπέρβαρο, παχύσαρκο) σχετίζεται με το φύλο του; (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α)

i. Το μεγαλύτερο ποσοστό των ανδρών, 52%, παρατηρείται στην κατηγορία «Υπέρβαροι».

ii. Το μεγαλύτερο ποσοστό των γυναικών, 51%, παρατηρείται στην κατηγορία «Φυσιολογικό βάρος».

β)

i. Το ποσοστό των ανδρών με μη φυσιολογικό βάρος είναι $100\% - 35\% = 65\%$.

Εναλλακτικά: $1\% + 52\% + 12\% = 65\%$.

ii. Το ποσοστό των γυναικών με μη φυσιολογικό βάρος είναι $100\% - 51\% = 49\%$.

Εναλλακτικά: $2\% + 36\% + 11\% = 49\%$.

iii. Επειδή το δείγμα αποτελείται από τον ίδιο αριθμό ανδρών και γυναικών, το ποσοστό όλων των ατόμων του δείγματος με μη φυσιολογικό βάρος είναι ίσο με το ημίθροισμα των ποσοστών με μη φυσιολογικό βάρος, των ανδρών και των γυναικών, άρα είναι

$$\frac{65\% + 49\%}{2} = 57\%.$$

Εναλλακτικά:

$$\frac{0,65 \cdot 5000 + 0,49 \cdot 5000}{5000 + 5000} = \frac{(0,65 + 0,49) 5000}{10000} = \frac{1,14 \cdot 50}{100} = \frac{57}{100} = 57\%.$$

γ)

Το δείγμα της έρευνας είναι αντιπροσωπευτικό και το μέγεθός του, $5000 + 5000 = 10000$, είναι αρκετά υψηλό. Επιπλέον, φαίνεται από το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα, ότι η κατηγορία του ΔΜΣ ενός ατόμου φαίνεται να σχετίζεται με το φύλο του γιατί άνδρες και γυναίκες εμφανίζουν πολύ διαφορετικά ποσοστά φυσιολογικών και υπέρβαρων ατόμων.

ΘΕΜΑ 2

Μια αθλητική ομοσπονδία ποδοσφαίρου κατέγραψε πόσοι από τους 250 παίκτες των ομάδων της τραυματίστηκαν με αποτέλεσμα να χάσουν κάποιο αγώνα ή όχι, σε σχέση με τη θέση που παίζουν (αμυντικός – μέσος – επιθετικός), κατά τη διάρκεια του πρωταθλήματος 2022-23. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συνάφειας:

		Απουσία λόγω τραυματισμού ή όχι		
		Απουσία από αγώνα λόγω τραυματισμού	Δεν απουσίασαν από αγώνα λόγω τραυματισμού	Σύνολο
Θέση	Αμυντικός	10	40	
	Μέσος	70	60	
	Επιθετικός	30	40	
	Σύνολο			

α) Σύμφωνα με τον πίνακα συνάφειας:

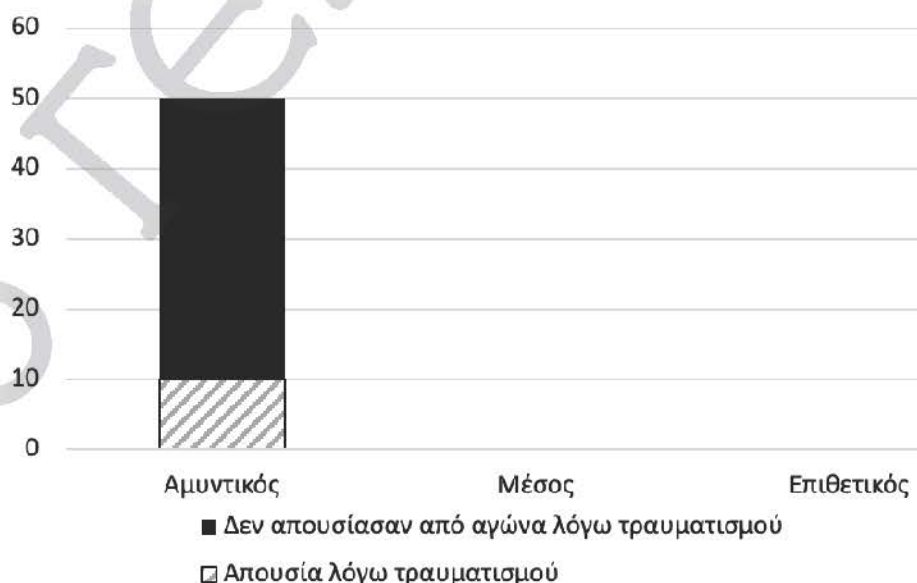
- Πόσοι αμυντικοί απουσίασαν από αγώνα λόγω τραυματισμού;
- Πόσοι είναι οι αμυντικοί που καταγράφονται σε αυτόν;
- Τι ποσοστό των αμυντικών απουσίασαν από αγώνα λόγω τραυματισμού;

(Μονάδες 12)

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα συνάφειας.

(Μονάδες 7)

γ) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω ημιτελές στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων, θέσης και απουσίας από αγώνα λόγω τραυματισμού ή όχι. Να συμπληρώσετε, σε αυτό, τις δύο ράβδους που λείπουν (μέσων και επιθετικών) με τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα συνάφειας.



(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α)

i. Σύμφωνα με τον πίνακα συνάφειας 10 αμυντικοί απουσίασαν λόγω τραυματισμού.

ii. Αθροίζοντας τα περιεχόμενα της γραμμής του πίνακα «αμυντικός» έχουμε $10 + 40 = 50$.

Άρα, στον πίνακα συνάφειας καταγράφονται 50 αμυντικοί.

iii. Από αυτούς, απουσίασαν λόγω τραυματισμού οι 10. Το ποσοστό των αμυντικών που απουσίασαν λόγω τραυματισμού είναι:

$$\frac{10}{50} \cdot 100\% = \frac{1000}{50} \% = 20\%$$

β) Συμπληρώνουμε τον πίνακα συνάφειας.

Οριζόντια:

- Αμυντικοί: $10 + 40 = 50$.
- Μέσοι: $70 + 60 = 130$.
- Επιθετικοί: $30 + 40 = 70$.

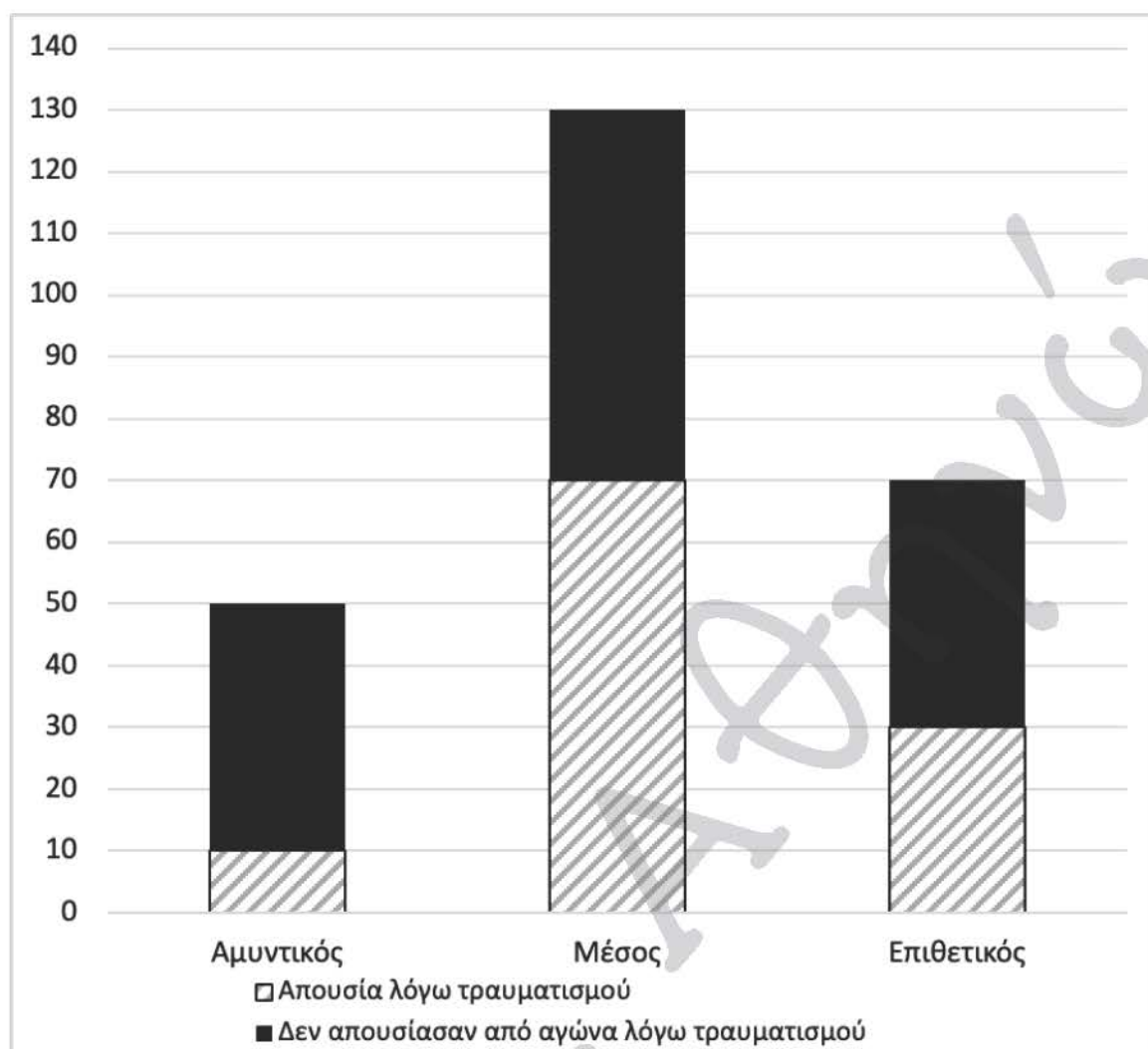
Κατακόρυφα:

- Απουσία από αγώνα λόγω τραυματισμού: $10 + 70 + 30 = 110$.
- Δεν απουσίασαν λόγω τραυματισμού: $40 + 60 + 40 = 140$.

Συνολικά $110 + 140 = 250$ και $50 + 130 + 70 = 250$.

		Απουσία λόγω τραυματισμού ή όχι		
		Απουσία από αγώνα λόγω τραυματισμού	Δεν απουσίασαν από αγώνα λόγω τραυματισμού	Σύνολο
Θέση	Αμυντικός	10	40	50
	Μέσος	70	60	130
	Επιθετικός	30	40	70
	Σύνολο	110	140	250

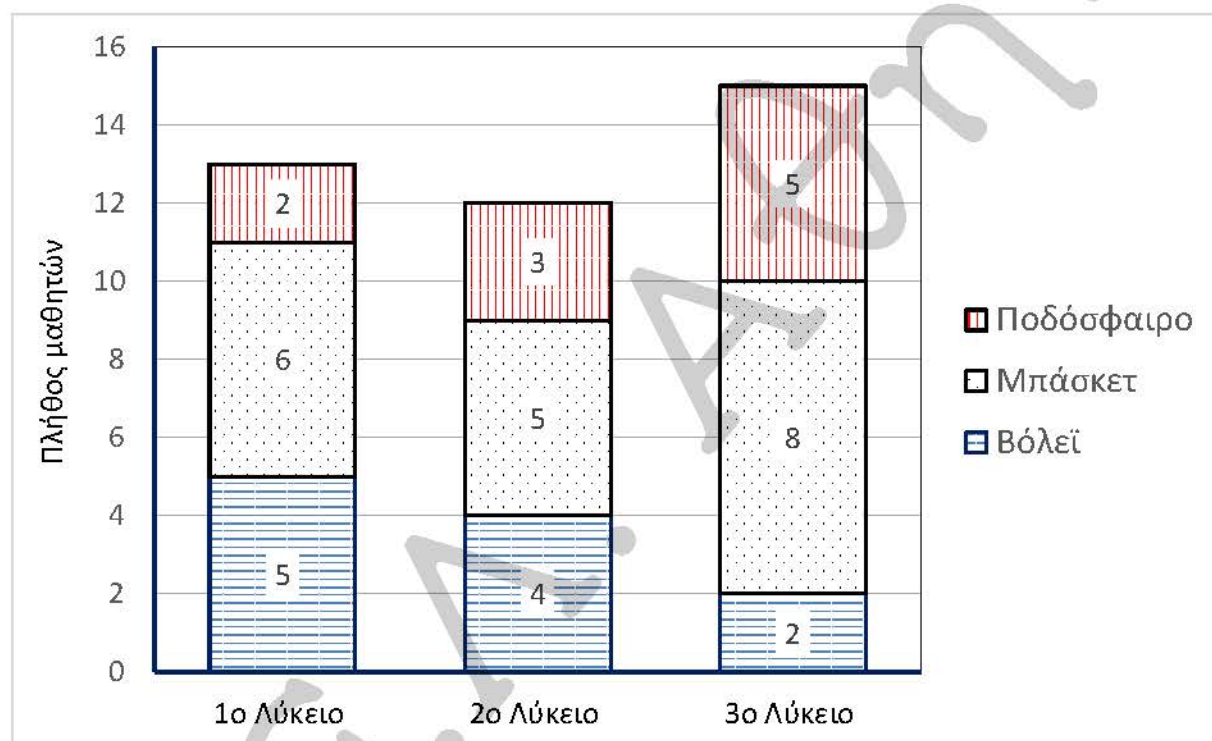
γ) Συμπληρώνουμε τις δύο ράβδους, που λείπουν, για μέσους και επιθετικούς στο παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων.



ΘΕΜΑ 2

Ρωτήσαμε 40 μαθητές από τα τρία Λύκεια μιας πόλης ποιο από τα αθλήματα: ποδόσφαιρο, μπάσκετ ή βόλεϊ, προτιμούν. Οι απαντήσεις τους παρουσιάζονται στο παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα, ως προς το Λύκειο φοίτησης. Ένας από τους μαθητές επιλέγεται τυχαία. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής αυτός:

- α) να προτιμά το ποδόσφαιρο, (Μονάδες 6)
 β) να προτιμά το βόλεϊ ή το μπάσκετ, (Μονάδες 7)
 γ) να φοιτά στο 3ο Λύκειο, (Μονάδες 6)
 δ) να μη φοιτά στο 3ο Λύκειο. (Μονάδες 6)



Επειδή η επιλογή του μαθητή γίνεται τυχαία, υποθέτουμε ότι είναι εξίσου πιθανό να επιλεγεί οποιοσδήποτε από τους 40 μαθητές. Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, στον δειγματικό χώρο που αποτελείται από τους 40 μαθητές. Το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 40.

α) Έστω A το ενδεχόμενο που αποτελείται από τους μαθητές οι οποίοι προτιμούν το ποδόσφαιρο. Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το A είναι $2 + 3 + 5 = 10$.

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

β) Έστω B το ενδεχόμενο που αποτελείται από τους μαθητές οι οποίοι προτιμούν το βόλεϊ ή το μπάσκετ. Το ενδεχόμενο B είναι το συμπληρωματικό του ενδεχομένου A. Επομένως

$$P(B) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Εναλλακτικά: Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το B είναι

$$(5 + 6) + (4 + 5) + (2 + 8) = 30.$$

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(B) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

γ) Έστω Γ το ενδεχόμενο που αποτελείται από τους μαθητές οι οποίοι φοιτούν στο 3ο Λύκειο.

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Γ είναι $2 + 8 + 5 = 15$.

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(\Gamma) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0,375.$$

δ) Έστω Δ το ενδεχόμενο που αποτελείται από τους μαθητές οι οποίοι δε φοιτούν στο 3ο Λύκειο. Το ενδεχόμενο Δ είναι το συμπληρωματικό του ενδεχομένου Γ. Επομένως

$$P(\Delta) = P(\Gamma') = 1 - P(\Gamma) = 1 - 0,375 = 0,625.$$

Εναλλακτικά:

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Δ είναι $(5 + 6 + 2) + (4 + 5 + 3) = 25$.

Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

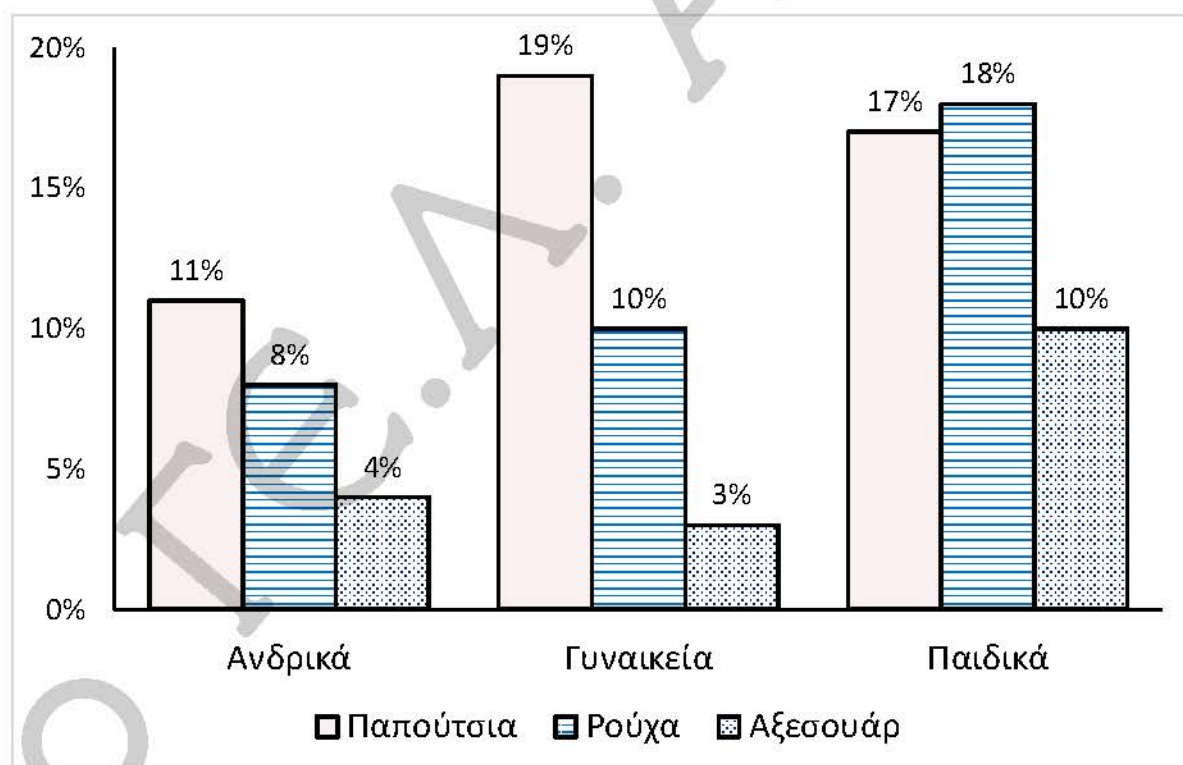
$$P(\Delta) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

ΘΕΜΑ 2

Μια εταιρεία λιανικής πώλησης αθλητικών ειδών κατέγραψε το περασμένο έτος τις πωλήσεις των προϊόντων της: παπούτσια, ρούχα, αξεσουάρ, ανά κατηγορία: ανδρικά, γυναικεία, παιδικά. Τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν με το παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, κατηγορίας και προϊόντων ως προς το σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος.

- α) Από τα ανδρικά προϊόντα, σε ποιο καταγράφηκαν οι περισσότερες πωλήσεις;
β) Ποιο είναι το συνολικό ποσοστό των ανδρικών προϊόντων στο δείγμα;
γ) Ποιο είναι το συνολικό ποσοστό των ρούχων στο δείγμα;
δ) Σε ποιο από τα προϊόντα (παπούτσια, ρούχα ή αξεσουάρ), καταγράφηκαν συνολικά οι λιγότερες πωλήσεις;
ε) Σε ποια κατηγορία (ανδρικά, γυναικεία ή παιδικά), καταγράφηκαν συνολικά οι περισσότερες πωλήσεις;

(Μονάδες 25)



ΛΥΣΗ

Παρατηρώντας το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ή εναλλακτικά κατασκευάζοντας πρώτα τον παρακάτω πίνακα συνάφειας, θα έχουμε:

α) Στα ανδρικά προϊόντα, καταγράφηκαν οι περισσότερες πωλήσεις στα παπούτσια, 11%.

β) Το συνολικό ποσοστό των ανδρικών προϊόντων στο δείγμα είναι

$$11\% + 8\% + 4\% = 23\%.$$

γ) Το συνολικό ποσοστό των ρούχων στο δείγμα είναι

$$8\% + 10\% + 18\% = 36\%.$$

δ) Συνολικά οι λιγότερες πωλήσεις ως προς το προϊόν (παπούτσια, ρούχα ή αξεσουάρ), καταγράφηκαν στα αξεσουάρ,

$$4\% + 3\% + 10\% = 17\%.$$

ε) Συνολικά οι περισσότερες πωλήσεις ως προς την κατηγορία (ανδρικά γυναικεία ή παιδικά), καταγράφηκαν στα παιδικά προϊόντα,

$$17\% + 18\% + 10\% = 45\% .$$

		Προϊόντα			
		Παπούτσια	Ρούχα	Αξεσουάρ	Σύνολο
Κατηγορία	Ανδρικά	11%	8%	4%	23%
	Γυναικεία	19%	10%	3%	32%
	Παιδικά	17%	18%	10%	45%
	Σύνολο	47%	36%	17%	100%

ΘΕΜΑ 4

Ένα σπρωροπωλείο προμηθεύεται το 60% των μήλων του από το Πήλιο και τα υπόλοιπα από την Καστοριά. Τα $\frac{4}{5}$ των μήλων που προμηθεύεται από το Πήλιο είναι κόκκινα και τα $\frac{3}{5}$ των μήλων που προμηθεύεται από την Καστοριά είναι επίσης κόκκινα.

α) Να αποδείξετε ότι, στο σύνολο όλων των μήλων του σπρωροπωλείου:

- το ποσοστό εκείνων που είναι κόκκινα και προέρχονται από το Πήλιο είναι 48%,
- το ποσοστό εκείνων που είναι κόκκινα και προέρχονται από την Καστοριά είναι 24%.

(Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων:

		Κόκκινα μήλα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Περιοχή	Καστοριά			
	Πήλιο			
	Σύνολο			

(Μονάδες 6)

γ) Ένα μήλο επιλέγεται τυχαία από το σύνολο όλων των μήλων του σπρωροπωλείου. Να βρείτε την πιθανότητα το μήλο αυτό «να έχει κόκκινο χρώμα ή να προέρχεται από την Καστοριά».

(Μονάδες 7)

α)

i. Το οπωροπωλείο προμηθεύεται το 60% των μήλων του, από το Πήλιο. Από αυτά τα $\frac{4}{5}$ είναι κόκκινα. Επομένως στο σύνολο όλων των μήλων του οπωροπωλείου, το ποσοστό των κόκκινων μήλων που προέρχονται από το Πήλιο είναι

$$\frac{4}{5} \cdot 60\% = \frac{4}{5} \cdot \frac{60}{100} = \frac{240}{500} = \frac{48}{100} = 48\%.$$

ii. Το οπωροπωλείο προμηθεύεται το υπόλοιπο $100\% - 60\% = 40\%$ των μήλων του, από την Καστοριά. Από αυτά τα $\frac{3}{5}$ είναι κόκκινα. Επομένως στο σύνολο όλων των μήλων του οπωροπωλείου, το ποσοστό των κόκκινων μήλων που προέρχονται από την Καστοριά είναι

$$\frac{3}{5} \cdot 40\% = \frac{3}{5} \cdot \frac{40}{100} = \frac{120}{500} = \frac{24}{100} = 24\%.$$

β)

Η πρώτη στήλη (τιμών) του πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων, συμπληρώνεται με τις τιμές που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Δίνεται επίσης ότι το οπωροπωλείο προμηθεύεται το 60% των μήλων του από το Πήλιο και τα υπόλοιπα από την Καστοριά. Άρα από την Καστοριά προμηθεύεται το $100\% - 60\% = 40\%$ των μήλων του. Με αυτές τις τιμές συμπληρώνουμε την τελευταία στήλη του πίνακα. Αφαιρώντας τις προηγούμενες τιμές κατά στήλη, συμπληρώνουμε τη δεύτερη στήλη (τιμών) του πίνακα:

		Κόκκινα μήλα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Περιοχή	Καστοριά	24%	16%	40%
	Πήλιο	48%	12%	60%
	Σύνολο	72%	28%	100%

γ)

Το ενδεχόμενο: «το μήλο έχει κόκκινο χρώμα ή προέρχεται από την Καστοριά», αποτελείται από το 72% όλων των μήλων που είναι κόκκινα και από το 16% των μήλων της Καστοριάς που δεν είναι κόκκινα. Άρα αποτελείται από το $72\% + 16\% = 88\%$ όλων των μήλων του οπωροπωλείου. Επειδή το μήλο επιλέγεται τυχαία, από το σύνολο όλων των μήλων του

οπωροπωλείου, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι εξίσου πιθανό να επιλεγεί οποιοδήποτε μήλο, άρα θα εφαρμόσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, στον δειγματικό χώρο που αποτελείται από όλα τα μήλα του οπωροπωλείου. Επομένως, αν ένα μήλο επιλεγεί τυχαία από το σύνολο όλων των μήλων του οπωροπωλείου, η πιθανότητα το μήλο αυτό «να έχει κόκκινο χρώμα ή να προέρχεται από την Καστοριά» είναι 0,88.

ΘΕΜΑ 3

Ένα εστιατόριο κατέγραψε τις προτιμήσεις όλων των πελατών που το επισκέφτηκαν το τελευταίο Σαββατοκύριακο. Έτσι προέκυψε ο παρακάτω πίνακας συνάφειας:

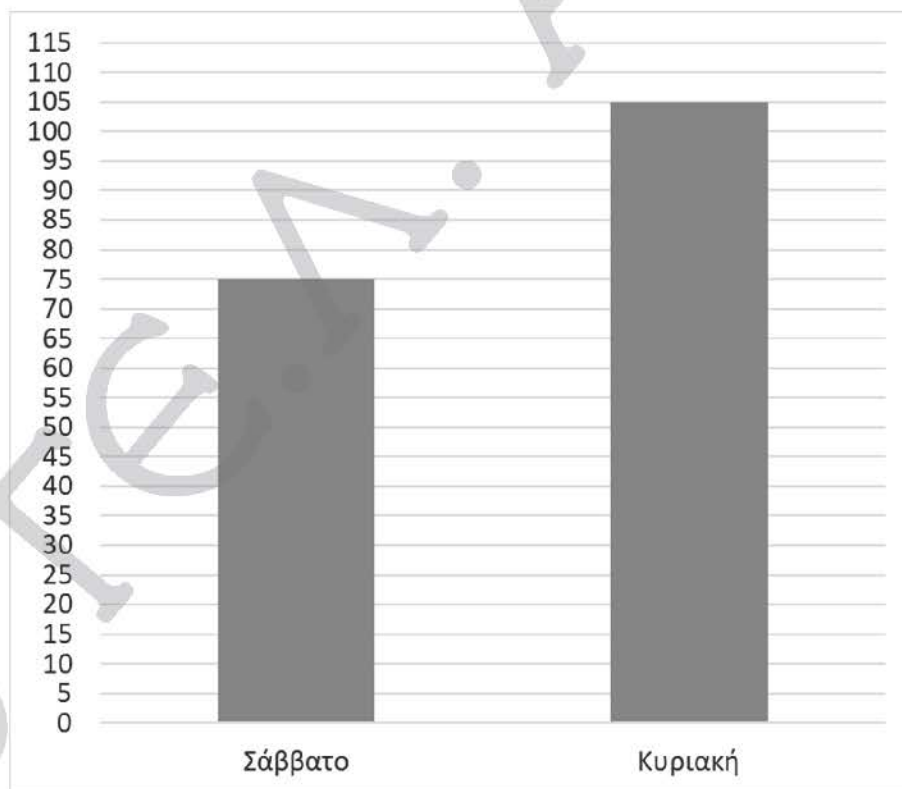
		Μενού προτίμησης		
		Χορτοφαγικό μενού	Συνηθισμένο μενού	Σύνολο
Ημέρα	Σάββατο	15		75
	Κυριακή	20		
	Σύνολο			180

α) Σύμφωνα με τον πίνακα:

i. Πόσοι πελάτες προτίμησαν χορτοφαγικό ή συνηθισμένο μενού στο εστιατόριο την Κυριακή;
(Μονάδες 5)

ii. Πόσοι πελάτες του εστιατορίου προτίμησαν συνηθισμένο μενού τις δύο ημέρες, συνολικά;
(Μονάδες 10)

β) Γιατί το παρακάτω ραβδόγραμμα δεν είναι στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων που αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα συνάφειας;
(Μονάδες 5)



γ) Να σχεδιάσετε το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων ημέρας και μενού, δηλαδή το αντίστοιχο με το ερώτημα β), για τον παραπάνω πίνακα συνάφειας.
(Μονάδες 5)

α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα συνάφειας:

Κατακόρυφα:

- Χορτοφαγικό μενού, συνολικά $15 + 20 = 35$.
- Σύνολο, την Κυριακή $180 - 75 = 105$.

Οριζόντια:

- Σάββατο $75 - 15 = 60$, συνηθισμένο μενού.
- Κυριακή $105 - 20 = 85$, συνηθισμένο μενού.

Κατακόρυφα:

- Συνηθισμένο μενού $60 + 85 = 145$, συνολικά.

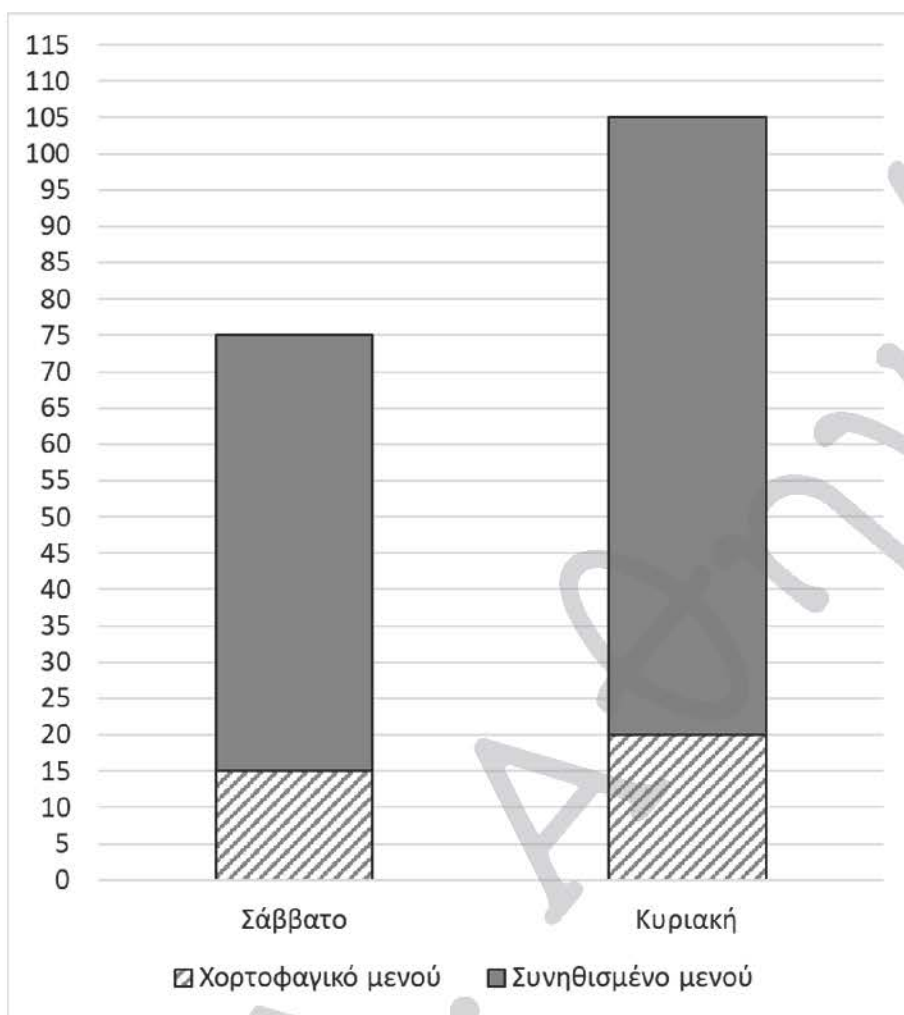
		Μενού προτίμησης		
		Χορτοφαγικό μενού	Συνηθισμένο μενού	Σύνολο
Ημέρα	Σάββατο	15	60	75
	Κυριακή	20	85	105
	Σύνολο	35	145	180

Απαντούμε στα ερωτήματα:

- Την Κυριακή, στο εστιατόριο προτίμησαν χορτοφαγικό ή συνηθισμένο μενού 105 πελάτες.
- Στο εστιατόριο, τις δύο ημέρες, συνολικά προτίμησαν συνηθισμένο μενού 145 πελάτες.

β) Το εικονιζόμενο δεν είναι στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων, γιατί δεν παριστάνονται οι συχνότητες των πελατών που επέλεξαν κάθε μενού (χορτοφαγικό, συνηθισμένο), ανά ημέρα (Σάββατο, Κυριακή). Αυτό που φαίνεται είναι τα μενού που επιλέχθηκαν συνολικά (χορτοφαγικό και συνηθισμένο), ανά ημέρα (δείτε την τελευταία στήλη του πίνακα).

γ) Το σωστό στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων ημέρας και μενού είναι το εξής:



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων φαίνεται το ποσοστό των αγοριών και κοριτσιών της Γ' τάξης ενός γυμνασίου που επιλέγουν μπάσκετ ή ποδόσφαιρο.



Δίνεται ότι κάθε παιδί της Γ' τάξης επιλέγει ένα ακριβώς άθλημα.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων.

		Άθλημα		
		Μπάσκετ	Ποδόσφαιρο	Σύνολο
Φύλο	Αγόρια			
	Κορίτσια			
	Σύνολο			

(Μονάδες 9)

β) Ποιο ποσοστό των παιδιών του σχολείου επέλεξαν μπάσκετ; (Μονάδες 6)

γ) Αν τα αγόρια του σχολείου που επέλεξαν μπάσκετ είναι 36, πόσα είναι τα παιδιά που επέλεξαν ποδόσφαιρο; (Μονάδες 6)

δ) Χωρίς να γνωρίζετε το πλήθος των παιδιών του σχολείου, να αποδείξετε ότι τα αγόρια που επέλεξαν μπάσκετ είναι τα $\frac{2}{5}$ των αγοριών του σχολείου. (Μονάδες 4)

α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα συνάφειας.

Κατακόρυφα:

- Μπάσκετ $18\% + 33\% = 51\%$.
- Ποδόσφαιρο $27\% + 22\% = 49\%$.

Οριζόντια:

- Αγόρια $18\% + 27\% = 45\%$.
- Κορίτσια $33\% + 22\% = 55\%$.

		Άθλημα		
		Μπάσκετ	Ποδόσφαιρο	Σύνολο
Φύλο	Αγόρια	18 %	27 %	45 %
	Κορίτσια	33 %	22 %	55 %
	Σύνολο	51 %	49 %	100 %

β) Για να υπολογίσουμε το ποσοστό των παιδιών του σχολείου που επέλεξαν μπάσκετ προσθέτουμε το ποσοστό παιδιών που είναι κορίτσια και επέλεξαν μπάσκετ και των παιδιών που είναι αγόρια και επέλεξαν μπάσκετ. Το αποτέλεσμα φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και είναι 51%.

γ) Τα αγόρια του σχολείου που επέλεξαν μπάσκετ αντιστοιχούν στο 18% των παιδιών του σχολείου. Αυτά είναι 36.

Α' τρόπος

Αν n είναι το πλήθος των παιδιών του σχολείου, τότε:

$$\frac{18}{100} \cdot n = 36 \quad \text{ή} \quad n = 3600 : 18 \quad \text{ή} \quad n = 200$$

Τα παιδιά που επέλεξαν ποδόσφαιρο αντιστοιχούν στο 49% των παιδιών του σχολείου, δηλαδή:

$$\frac{49}{100} \cdot 200 = 49 \cdot \frac{200}{100} = 49 \cdot 2 = 98$$

Β' τρόπος

Τα παιδιά που επέλεξαν ποδόσφαιρο αντιστοιχούν στο 49% των παιδιών του σχολείου.

Αντίστοιχα με το 18% των παιδιών του σχολείου, που είναι $2 \cdot 18 = 36$, το 49% είναι:

$$2 \cdot 49 = 98$$

δ) Τα αγόρια είναι το 45 % των παιδιών του σχολείου.

Τα αγόρια που επέλεξαν μπάσκετ είναι το 18% των παιδιών του σχολείου.

Α' τρόπος

Αν n είναι το πλήθος των παιδιών του σχολείου, τότε:

- Τα αγόρια είναι $\frac{45}{100} \cdot n = 0,45n$.
- Τα αγόρια που επέλεξαν μπάσκετ είναι $\frac{18}{100} \cdot n = 0,18n$.

Άρα τα αγόρια που επέλεξαν μπάσκετ προς τα αγόρια του σχολείου είναι:

$$\frac{0,18n}{0,45n} = \frac{0,18}{0,45} = \frac{0,18 \cdot 10}{0,45 \cdot 10} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

Β' τρόπος

Αρκεί να υπολογίσουμε τι μέρος του 45% είναι το 18%.

$$\frac{18}{45} = \frac{18:9}{45:9} = \frac{2}{5}$$

Άρα τα $\frac{2}{5}$ των αγοριών επέλεξαν μπάσκετ.

ΘΕΜΑ 4

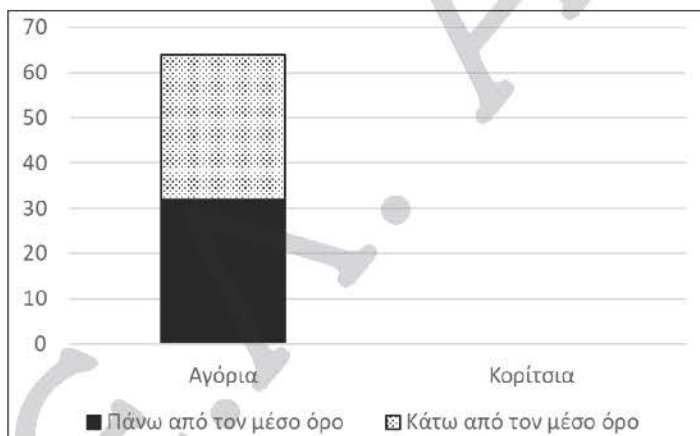
Τα παιδιά της Β΄ τάξης ενός γυμνασίου έγραψαν διαγώνισμα στα Μαθηματικά. Ο καθηγητής βαθμολόγησε τα διαγωνίσματα και υπολόγισε τον μέσο όρο όλων των βαθμών. Στον παρακάτω πίνακα συνάφειας καταγράφονται οι συχνότητες του φύλου των παιδιών που έγραψαν διαγώνισμα και του βαθμού στο διαγώνισμα, σε σύγκριση με τον μέσο όρο.

		Βαθμός στο διαγώνισμα		
		Πάνω από τον μέσο όρο	Κάτω από τον μέσο όρο	Σύνολο
Φύλο	Αγόρια	32	32	
	Κορίτσια	32	20	
	Σύνολο			

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

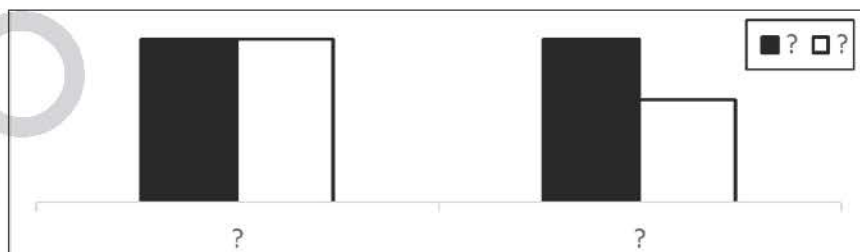
(Μονάδες 10)

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε το παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων φύλου και βαθμού, που αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα.



(Μονάδες 10)

γ) Δίνεται το παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, για τα παραπάνω δεδομένα, στο οποίο δεν φαίνεται πού αντιστοιχεί η κάθε ράβδος. Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι σίγουρα οι άχρωμες ράβδοι αντιστοιχούν στην κατηγορία «βαθμός κάτω από τον μέσο όρο». Συμφωνείτε μαζί του;



(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα συνάφειας.

Κατακόρυφα:

- Πάνω από τον μέσο όρο $32 + 32 = 64$.
- Κάτω από τον μέσο όρο $32 + 20 = 52$.

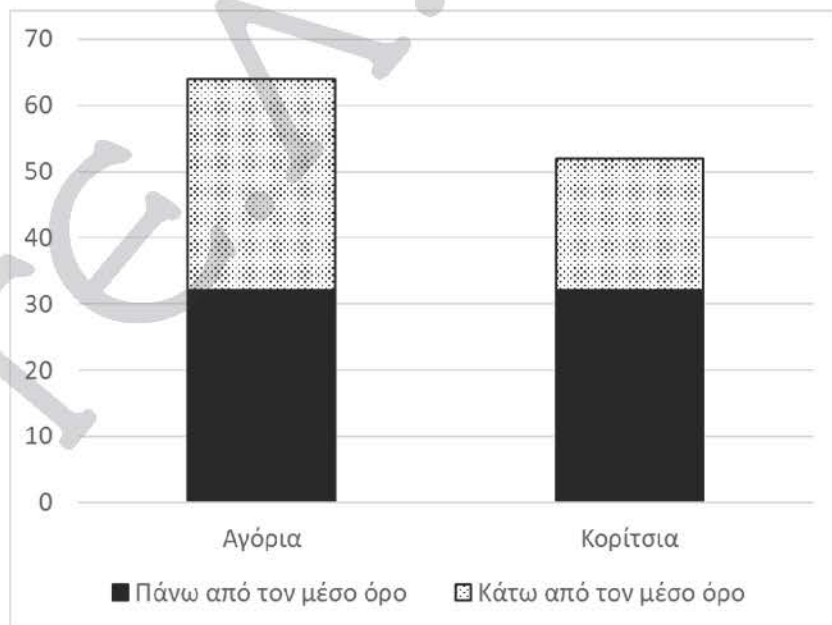
Οριζόντια:

- Αγόρια $32 + 32 = 64$.
- Κορίτσια $32 + 20 = 52$.

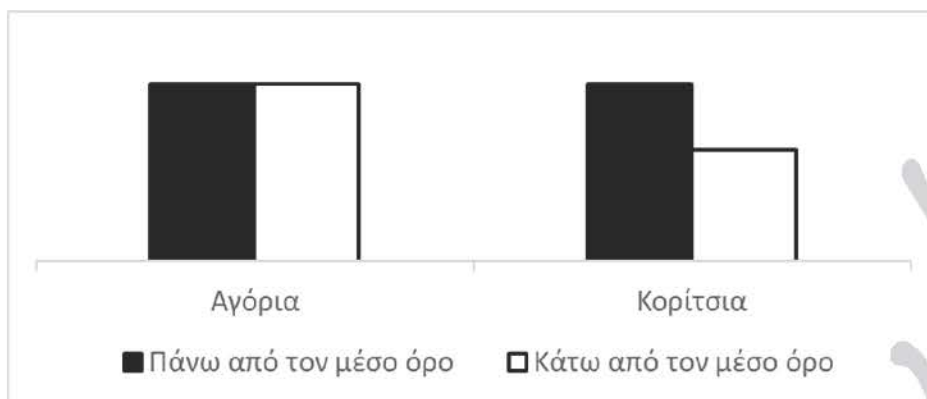
Σύνολο $64 + 52 = 116$.

	Βαθμός στο διαγώνισμα		
	Πάνω από τον μέσο όρο	Κάτω από τον μέσο όρο	Σύνολο
Αγόρια	32	32	64
Κορίτσια	32	20	52
Σύνολο	64	52	116

β) Για τη συμπλήρωση του στοιβαγμένου ραβδογράμματος χρησιμοποιούμε τη γραμμή «κορίτσια», του παραπάνω πίνακα συνάφειας. Τα κορίτσια «πάνω από τον μέσο όρο» είναι όσα και τα αγόρια (ήδη σχεδιασμένη ράβδος, μαύρο μέρος).



γ) Αυτή η περίπτωση που αναφέρει ο συμμαθητής σας είναι μια εκδοχή του ομαδοποιημένου ραβδογράμματος σχετικών συχνοτήτων, το οποίο παρουσιάζεται.



Ωστόσο, μια άλλη εκδοχή είναι η εξής:



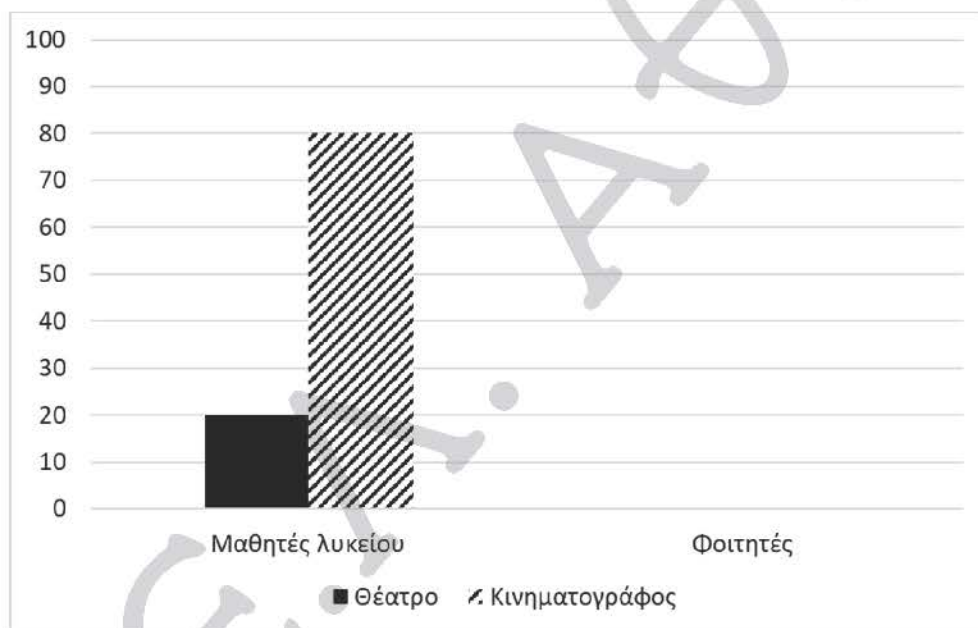
Δηλαδή θα μπορούσαν οι άχρωμες ράβδοι να αντιστοιχούν στα κορίτσια.

Συνεπώς, όχι, αυτό που λέει ο συμμαθητής σας δεν ισχύει, σίγουρα.

ΘΕΜΑ 4

Σε μια έρευνα μαθητές λυκείου και φοιτητές ερωτήθηκαν και απάντησαν αν προτιμούν κινηματογράφο ή θέατρο. Ένας ερευνητής, με τις απαντήσεις τους συμπλήρωσε μερικά κελιά του πίνακα συνάφειας συχνοτήτων και σχεδίασε το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, ως προς τη βαθμίδα εκπαίδευσης που φαίνεται παρακάτω, αλλά δεν τελείωσε.

		Επιλογή τρόπου ψυχαγωγίας		
		Θέατρο	Κινηματογράφος	Σύνολο
Βαθμίδα εκπαίδευσης	Μαθητές λυκείου	60		
	Φοιτητές	60	140	
	Σύνολο			



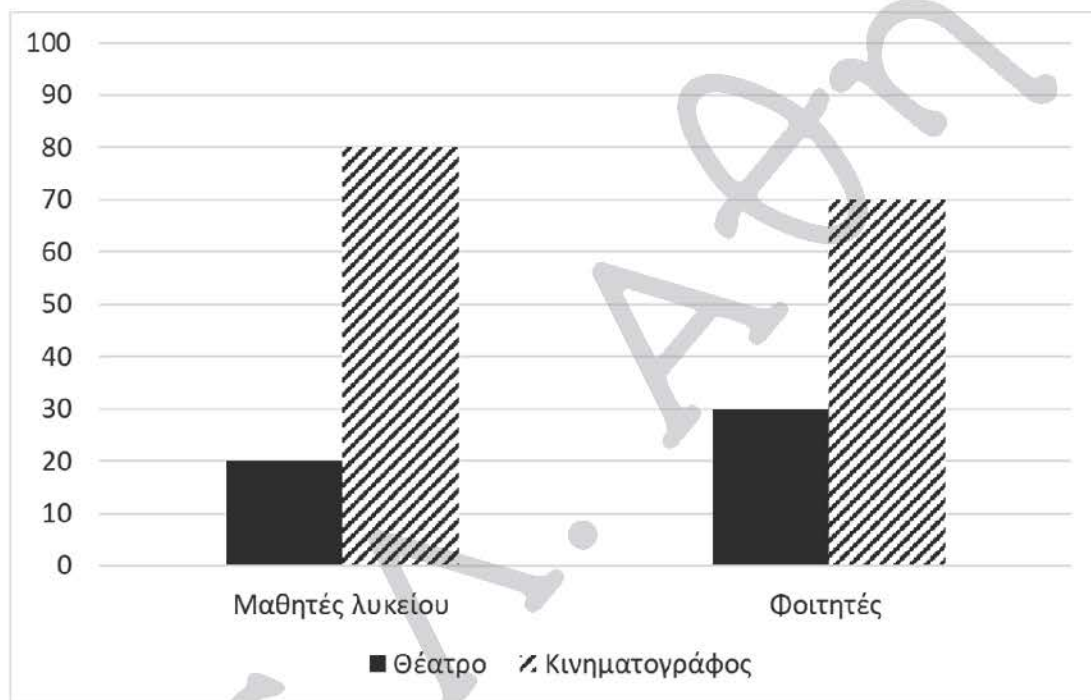
- α) Ποιο ποσοστό των φοιτητών απάντησαν ότι προτιμούν θέατρο; (Μονάδες 6)
- β) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε:
- το παραπάνω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα, (Μονάδες 8)
 - τον παραπάνω πίνακα συνάφειας. (Μονάδες 6)
- γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) την παρακάτω πρόταση, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
- «Δεν παρατηρείται κάποια διαφορά μεταξύ μαθητών λυκείου και φοιτητών της έρευνας, όσο αφορά την απάντηση 'θέατρο', καθώς αυτή δόθηκε από τόσους φοιτητές όσους και μαθητές λυκείου (60).» (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Από τον πίνακα συνάφειας φαίνεται ότι απάντησαν συνολικά $60 + 140 = 200$ φοιτητές. Από αυτούς οι 60 απάντησαν ότι προτιμούν θέατρο, κάτι που αντιστοιχεί στο 30% των φοιτητών που ρωτήθηκαν (γιατί $200 : 2 = 100$ και $60 : 2 = 30$).

β)

i. Εφόσον το 30% των φοιτητών απάντησαν ότι προτιμούν θέατρο, το υπόλοιπο 70% των φοιτητών απάντησαν ότι προτιμούν κινηματογράφο. Έτσι, συμπληρώνουμε το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα:



ii. Στο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα φαίνεται ότι το 20% των μαθητών λυκείου απάντησαν ότι προτιμούν θέατρο. Στον πίνακα συνάφειας φαίνεται ότι αυτοί είναι 60. Άρα, αν x είναι το πλήθος των μαθητών λυκείου που ρωτήθηκαν και απάντησαν, τότε:

$$\frac{20}{100} \cdot x = 60 \text{ ή } x = 6000 : 20 \text{ ή } x = 300$$

Άρα οι μαθητές λυκείου που απάντησαν, συνολικά ήταν 300. Την απάντηση 'κινηματογράφος' την έδωσαν όσοι μαθητές λυκείου δεν απάντησαν 'θέατρο', δηλαδή:

$$300 - 60 = 240$$

'Θέατρο' απάντησαν $60 + 60 = 120$ άτομα.

'Κινηματογράφος' απάντησαν $240 + 140 = 380$ άτομα. Συνολικά απάντησαν 500 άτομα.

Με αυτά τα στοιχεία συμπληρώνουμε τον πίνακα συνάφειας:

		Επιλογή τρόπου ψυχαγωγίας		
		Θέατρο	Κινηματογράφος	Σύνολο
Βαθμίδα εκπαίδευσης	Μαθητές λυκείου	60	240	300
	Φοιτητές	60	140	200
	Σύνολο	120	380	500

γ) Η πρόταση είναι λανθασμένη (Λ).

Πράγματι, 'θέατρο' απάντησαν 60 μαθητές λυκείου και 60 φοιτητές. Όμως αυτοί αντιστοιχούν στο 20% των μαθητών λυκείου και στο 30% των φοιτητών, που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Επομένως, υπάρχει μια μικρή διαφορά (10%), όσο αφορά την σχετική συχνότητα τη απάντησης 'θέατρο', ως προς τη βαθμίδα εκπαίδευσης, δηλαδή μεταξύ μαθητών λυκείου και φοιτητών της έρευνας.

Ένας άλλος τρόπος να αιτιολογήσουμε την απάντησή μας, αλλά και να συμπεράνουμε αν υπάρχει σχέση μεταξύ της βαθμίδας εκπαίδευσης και της επιλογής τρόπου ψυχαγωγίας, των συμμετεχόντων στην έρευνα είναι ο εξής:

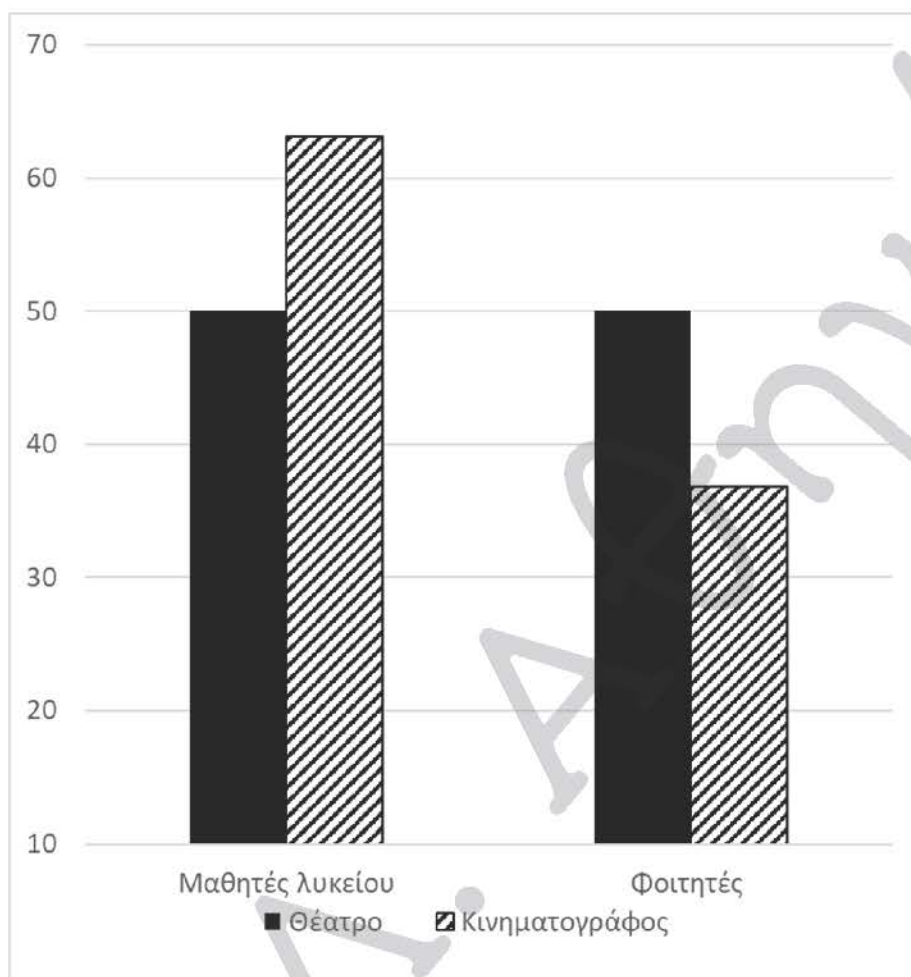
Συμπληρώνουμε τον πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων, ως προς την επιλογή τρόπου ψυχαγωγίας (δηλαδή το άθροισμα των ποσοστών των βαθμίδων εκπαίδευσης, ανά τρόπο ψυχαγωγίας είναι 100%).

		Επιλογή τρόπου ψυχαγωγίας		
		Θέατρο	Κινηματογράφος	Σύνολο
Βαθμίδα εκπαίδευσης	Μαθητές λυκείου	50%	63% περίπου	
	Φοιτητές	50%	37% περίπου	
	Σύνολο	100%	100%	

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το αντίστοιχο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, παρακάτω.

Εφόσον οι ράβδοι σε κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης (μαθητές λυκείου – φοιτητές) δεν έχουν περίπου το ίδιο ύψος, συμπεραίνουμε ότι η βαθμίδα εκπαίδευσης και η επιλογή τρόπου

ψυχαγωγίας σχετίζονται. Επομένως υπάρχει διαφορά μεταξύ μαθητών λυκείου και φοιτητών της έρευνας, όσο αφορά την απάντηση 'θέατρο'.



ΘΕΜΑ 2

Σε ένα πορθμείο της Αττικής μετακινούνται μοτοσυκλέτες και αυτοκίνητα. Οι διελεύσεις οχημάτων της τελευταίας εβδομάδας καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα συνάφειας.

		Είδος οχήματος		
		Μοτοσυκλέτες	Αυτοκίνητα	Σύνολο
Λόγος μετακίνησης	Δουλειά	75 %	45 %	
	Ψυχαγωγία	25 %	55 %	
	Σύνολο	100 %	100 %	

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα συνάφειας:

- Οι περισσότερες διελεύσεις με μοτοσυκλέτα έγιναν για δουλειά ή για ψυχαγωγία, την προηγούμενη εβδομάδα; (Μονάδες 6)
- Τι ποσοστό των αυτοκινήτων που μετακινήθηκαν μέσω του πορθμείου είχαν ως λόγο μετακίνησης την ψυχαγωγία; (Μονάδες 6)
- Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να σχεδιάσετε το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα, ως προς το είδος οχήματος χρησιμοποιώντας τα ποσοστά του παραπάνω πίνακα.



(Μονάδες 13)

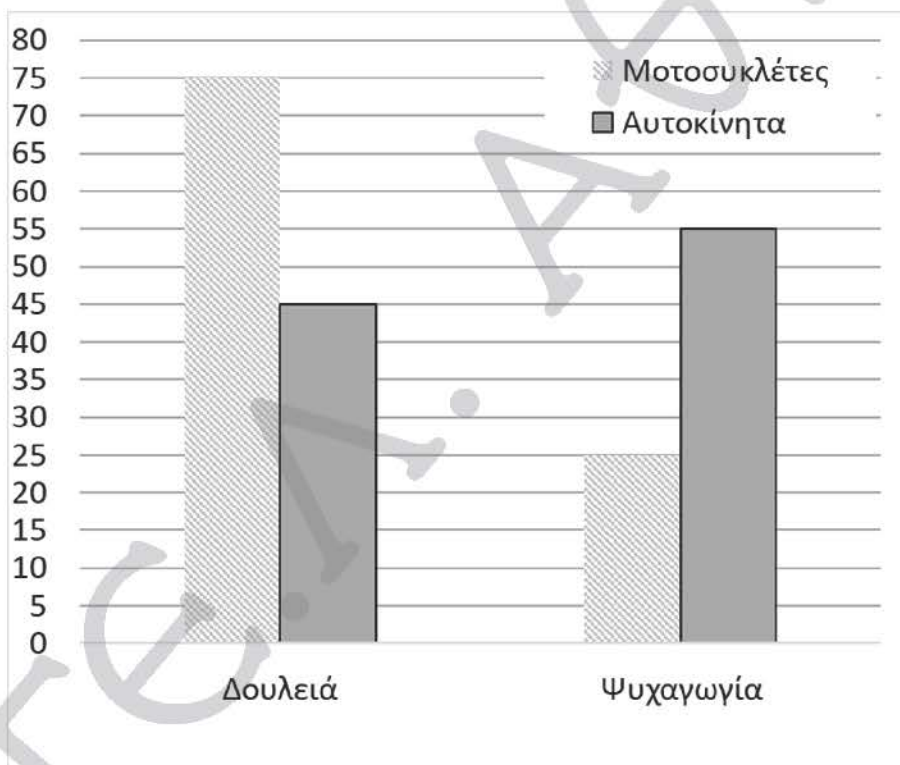
ΛΥΣΗ

α) Όπως φαίνεται από τον πίνακα συνάφειας, από το σύνολο των διελεύσεων με μοτοσυκλέτα (100%) της προηγούμενης εβδομάδας, το 75% ήταν για δουλειά και το 25% για ψυχαγωγία.

Άρα, την προηγούμενη εβδομάδα οι περισσότερες διελεύσεις έγιναν για δουλειά.

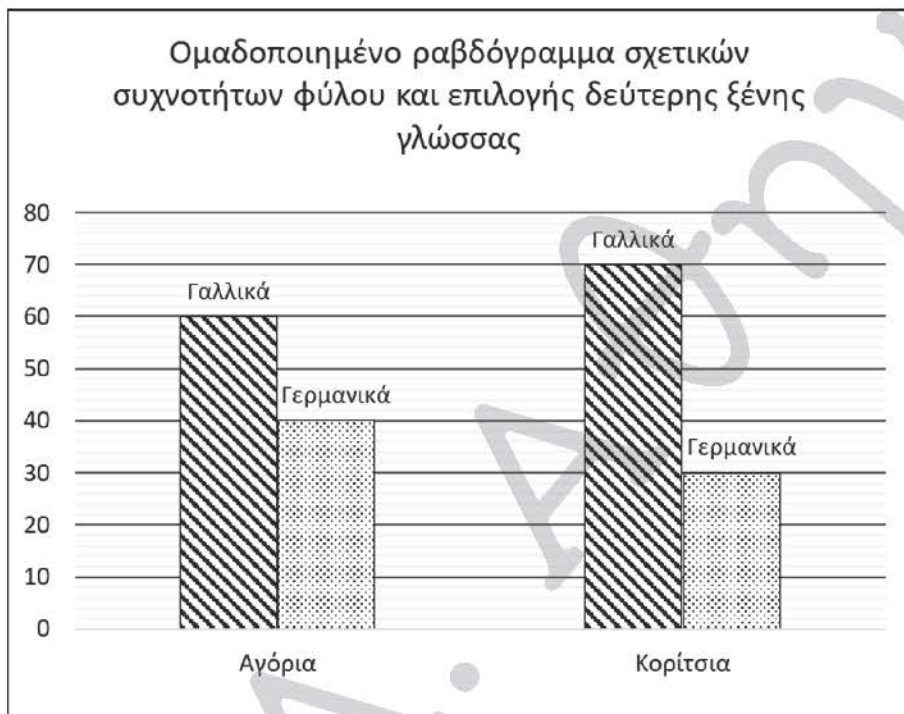
β) Από τα δεδομένα του πίνακα συνάφειας, το 55% των αυτοκινήτων που διήλθαν μέσω του πορθμείου είχαν ως λόγο μετακίνησης την ψυχαγωγία.

γ) Από τα δεδομένα του πίνακα, σχεδιάζουμε το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα, ως προς το είδος οχήματος.



ΘΕΜΑ 2

Οι μαθητές και οι μαθήτριες της Α΄ τάξης ενός γυμνασίου διδάσκονται Αγγλικά ως πρώτη ξένη γλώσσα, ενώ ως δεύτερη ξένη γλώσσα επιλέγουν είτε τα Γαλλικά, είτε τα Γερμανικά. Στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων φαίνεται το ποσοστό των παιδιών της Α΄ τάξης που έχουν επιλέξει ως δεύτερη ξένη γλώσσα τα Γαλλικά ή τα Γερμανικά, ως προς το φύλο.



α) Ποιο είναι το ποσοστό των αγοριών που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά;

(Μονάδες 5)

β) Ποιο είναι το ποσοστό των κοριτσιών που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά;

(Μονάδες 5)

γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

i. Τα αγόρια της Α΄ τάξης που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά είναι λιγότερα από τα αγόρια της Α΄ τάξης που έχουν επιλέξει τα Γερμανικά.

ii. Τα κορίτσια της Α΄ τάξης που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά είναι περισσότερα από τα κορίτσια της Α΄ τάξης που έχουν επιλέξει τα Γερμανικά.

iii. Τα παιδιά της Α΄ τάξης που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά είναι περισσότερα από τα παιδιά της Α΄ τάξης που έχουν επιλέξει τα Γερμανικά.

(Μονάδες 15)

α) Όπως φαίνεται από την αντίστοιχη ράβδο του ομαδοποιημένου ραβδογράμματος, το ποσοστό των αγοριών που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά είναι 60%.

β) Όπως φαίνεται το ποσοστό των κοριτσιών που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά είναι 70%.

γ) i. Η πρόταση είναι λανθασμένη (Λ). Τα αγόρια της Α' τάξης που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά είναι 60% των αγοριών της Α' τάξης, άρα περισσότερα από εκείνα που έχουν επιλέξει τα Γερμανικά, τα οποία είναι 40%.

ii. Η πρόταση είναι σωστή (Σ). Τα κορίτσια της Α' τάξης που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά είναι 70% των κοριτσιών της Α' τάξης, άρα περισσότερα από τα κορίτσια της Α' τάξης που έχουν επιλέξει τα Γερμανικά, τα οποία αντιστοιχούν στο 30%.

iii. Η πρόταση είναι σωστή (Σ). Και τα αγόρια που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά και τα κορίτσια, που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά (60% και 70%, αντίστοιχα) είναι περισσότερα από τα αγόρια και τα κορίτσια, αντίστοιχα, που έχουν επιλέξει τα Γερμανικά (40% και 30%, αντίστοιχα).

ΘΕΜΑ 2

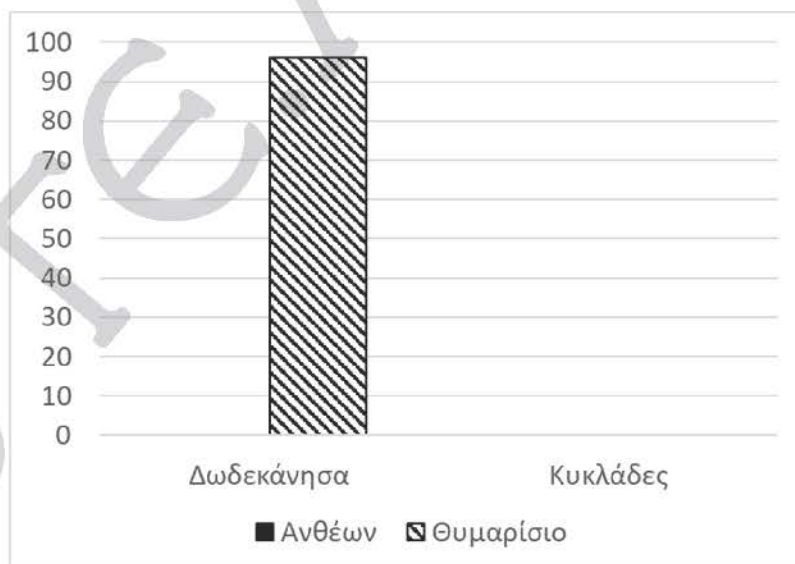
Έγινε μια έρευνα σε παραγωγούς μελιού, στα Δωδεκάνησα και στις Κυκλάδες, ως προς το είδος μελιού που παρήγαγαν το προηγούμενο έτος (ανθέων – θυμαρίσιο). Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων, ως προς την περιοχή παραγωγής μελιού (η παραγωγή μετρήθηκε σε βάρος).

		Παραγωγή μελιού ως προς το είδος		
		Ανθέων	Θυμαρίσιο	Σύνολο
Περιοχές	Δωδεκάνησα	4 %	96 %	100 %
	Κυκλάδες	16 %	84 %	100 %
	Σύνολο			

α) Ποιο ήταν το ποσοστό της παραγωγής μελιού ανθέων των συγκεκριμένων παραγωγών της έρευνας, ανά περιοχή; (Μονάδες 6)

β) Ποια ήταν τα ποσοστά ανά είδος μελιού στα Δωδεκάνησα, για τους παραγωγούς της έρευνας; (Μονάδες 7)

γ) Στο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, ως προς την περιοχή παραγωγής μελιού, το οποίο αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα συνάφειας φαίνεται μόνο η μία ράβδος. Να γράψετε σε τι αντιστοιχεί η ράβδος αυτή και να συμπληρώσετε το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα με τις τρεις ράβδους που λείπουν, αφού το μεταφέρετε στην κόλλα σας.



(Μονάδες 12)

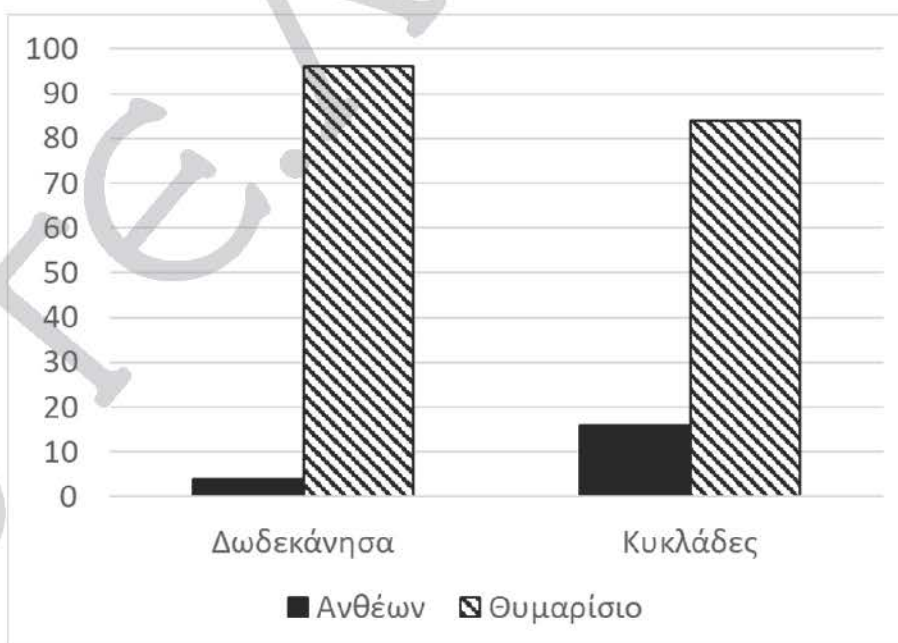
α) Σύμφωνα με τον πίνακα συνάφειας, το μέλι ανθέων αντιστοιχεί στο 4% της παραγωγής μελιού των συγκεκριμένων παραγωγών στα Δωδεκάνησα και στο 16% της παραγωγής μελιού των συγκεκριμένων παραγωγών στις Κυκλάδες, το προηγούμενο έτος.

β) Στα Δωδεκάνησα, το 4% της παραγωγής μελιού ήταν ανθέων και το 96% θυμαρίσιο, όπου το 100% αντιστοιχεί στη συνολική ποσότητα που παράγουν οι παραγωγοί της έρευνας (στα Δωδεκάνησα).

γ) Η ράβδος αντιστοιχεί στο θυμαρίσιο μέλι των παραγωγών της έρευνας στα Δωδεκάνησα (96%), ως ποσοστό της συνολικής παραγωγής τους, σε μέλι, το προηγούμενο έτος.

Συμπληρώνουμε το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα με τις ράβδους:

- Για το μέλι ανθέων των παραγωγών της έρευνας στα Δωδεκάνησα, που ήταν το 4% της παραγωγής μελιού των συγκεκριμένων παραγωγών, το προηγούμενο έτος (η σκούρα ράβδος στα αριστερά).
- Για το μέλι ανθέων των παραγωγών της έρευνας στις Κυκλάδες, που ήταν το 16% της παραγωγής μελιού των συγκεκριμένων παραγωγών, το προηγούμενο έτος (η σκούρα ράβδος στα δεξιά).
- Για το θυμαρίσιο μέλι των παραγωγών της έρευνας στις Κυκλάδες, που ήταν το 84% της παραγωγής μελιού των συγκεκριμένων παραγωγών, το προηγούμενο (η ράβδος με τις διαγώνιες γραμμές στα δεξιά).



ΘΕΜΑ 2

Για τις ανάγκες μιας έρευνας, ρωτήθηκαν παιδιά για το κατοικίδιο που προτιμούν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συνάφειας, ως προς το φύλο τους.

		Προτίμηση σε κατοικίδιο		
		Γάτα	Σκύλος	Σύνολο
Φύλο	Κορίτσι	30	60	
	Αγόρι	25	50	
	Σύνολο			

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα συνάφειας.

(Μονάδες 10)

β) Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα συνάφειας:

i. Πόσα παιδιά απάντησαν στην ερώτηση της έρευνας; (Μονάδες 4)

ii. Πόσα από τα παιδιά που απάντησαν ήταν κορίτσια; (Μονάδες 4)

iii. Πόσα από τα παιδιά απάντησαν ότι προτιμούν σκύλο; (Μονάδες 4)

iv. Τι μέρος των παιδιών που απάντησαν ότι προτιμούν σκύλο ήταν κορίτσια; Να το γράψετε ως κλάσμα. (Μονάδες 3)

ΛΥΣΗ

α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα συνάφειας.

Κατακόρυφα:

- Γάτα $30 + 25 = 55$.
- Σκύλος $60 + 50 = 110$.

Οριζόντια:

- Κορίτσι $30 + 60 = 90$.
- Αγόρι $25 + 50 = 75$.

Συνολικά $55 + 110 = 165$ και $90 + 75 = 165$.

		Προτίμηση σε κατοικίδιο		
		Γάτα	Σκύλος	Σύνολο
Φύλο	Κορίτσι	30	60	90
	Αγόρι	25	50	75
	Σύνολο	55	110	165

β) Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα συνάφειας:

- Στην ερώτηση της έρευνας απάντησαν 165 παιδιά.
- Από αυτά, τα 90 ήταν κορίτσια.
- Από τα παιδιά που απάντησαν, τα 110 απάντησαν ότι προτιμούν σκύλο.
- Τα κορίτσια που απάντησαν ότι προτιμούν σκύλο ήταν 60, άρα τα $\frac{60}{110}$ ή τα $\frac{6}{11}$ των παιδιών που απάντησαν ότι προτιμούν σκύλο.

ΘΕΜΑ 4

Σε δείγμα 100 ατόμων τέθηκε το ερώτημα αν συνδέθηκαν μια συγκεκριμένη μέρα στα δυο μέσα κοινωνικής δικτύωσης, Facebook ή YouTube. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

		YouTube		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Facebook	Ναι	32	30	62
	Όχι	12	26	38
	Σύνολο	44	56	100

Ένα από τα παραπάνω 100 άτομα επιλέγεται τυχαία. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ώστε το άτομο αυτό:

- α) να μη συνδέθηκε στο Facebook,
- β) να μη συνδέθηκε στο Facebook ούτε στο YouTube,
- γ) να συνδέθηκε στο YouTube και να μη συνδέθηκε στο Facebook,
- δ) να συνδέθηκε το πολύ σε ένα από τα δύο μέσα κοινωνικής δικτύωσης,
- ε) να συνδέθηκε τουλάχιστον σε ένα από τα δύο μέσα κοινωνικής δικτύωσης.

(Μονάδες 25)

Επειδή η επιλογή του ατόμου γίνεται τυχαία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οποιοδήποτε άτομο είναι εξίσου πιθανό να επιλεγεί. Άρα, θα χρησιμοποιήσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, στον δειγματικό χώρο που αποτελείται από τα 100 άτομα. Το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 100.

α) Έστω A το ενδεχόμενο που αποτελείται από τα άτομα τα οποία δεν συνδέθηκαν στο Facebook. Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το A είναι 38. Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(A) = \frac{38}{100} = 0,38.$$

β) Έστω B το ενδεχόμενο που αποτελείται από τα άτομα τα οποία δεν συνδέθηκαν στο Facebook ούτε στο YouTube. Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το B είναι 26. Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(B) = \frac{26}{100} = 0,26.$$

γ) Έστω Γ το ενδεχόμενο που αποτελείται από τα άτομα τα οποία συνδέθηκαν στο YouTube και δεν συνδέθηκαν στο Facebook. Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Γ είναι 12. Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(\Gamma) = \frac{12}{100} = 0,12.$$

δ) Έστω Δ το ενδεχόμενο που αποτελείται από τα άτομα τα οποία συνδέθηκαν το πολύ σε ένα από τα δύο μέσα κοινωνικής δικτύωσης. Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το Δ είναι $100 - 32 = 68$. Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(\Delta) = \frac{68}{100} = 0,68.$$

ε) Έστω E το ενδεχόμενο που αποτελείται από τα άτομα τα οποία συνδέθηκαν τουλάχιστον σε ένα από τα δύο μέσα κοινωνικής δικτύωσης. Το ενδεχόμενο E είναι το συμπληρωματικό του ενδεχομένου B . Επομένως

$$P(E) = P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0,26 = 0,74.$$

ΘΕΜΑ 2

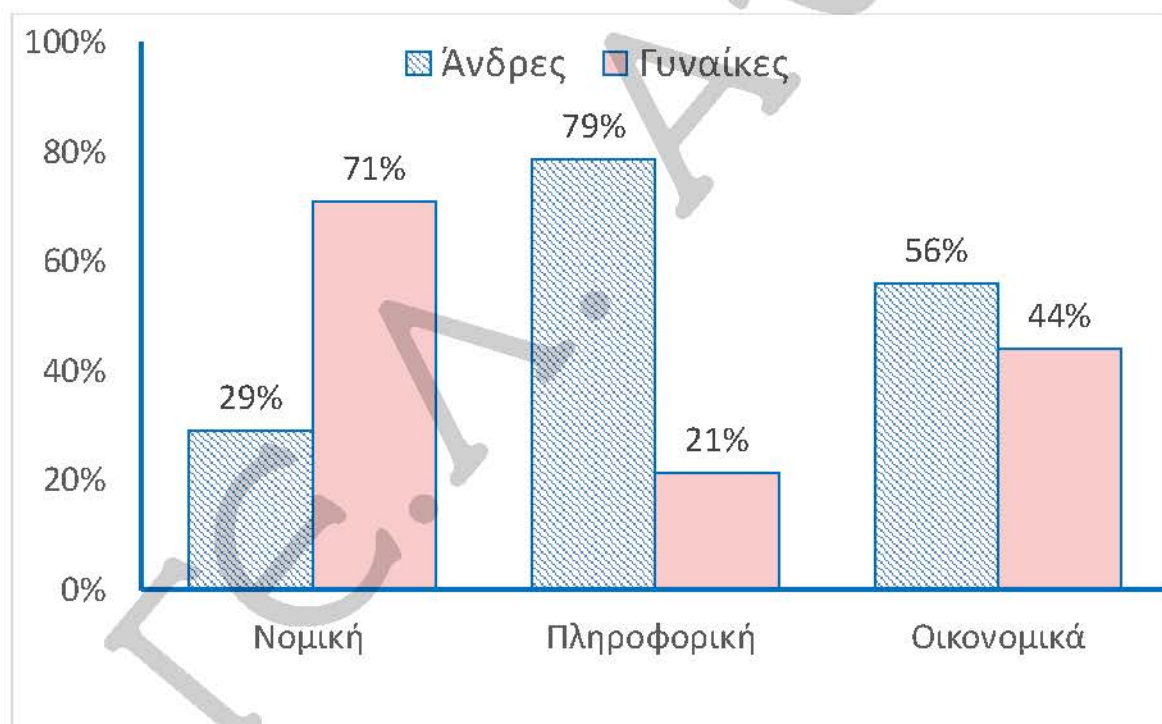
Τα αποτελέσματα μιας έρευνας, σχετικά με την κατανομή των φοιτητών/τριών ανά φύλο σε τρεις τομείς της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, παρουσιάζονται στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, ως προς τον τομέα εκπαίδευσης.

α) Ποιες είναι οι μεταβλητές και ποιο είναι το είδος τους; (Μονάδες 6)

β) Στο σύνολο των ατόμων που σπουδάζουν Νομική, ποιο είναι το ποσοστό των γυναικών και ποιο είναι το ποσοστό των ανδρών; (Μονάδες 6)

γ) Σε ποιον τομέα υπάρχει η μεγαλύτερη εκπροσώπηση γυναικών και σε ποιον η μικρότερη; (Μονάδες 6)

δ) Δίνεται ότι από τους παραπάνω φοιτητές/φοιτήτριες, σπουδάζουν Οικονομικά 16000 και Πληροφορική 10000. Να συγκρίνετε τον αριθμό των ανδρών που σπουδάζουν Οικονομικά με τον αριθμό των ανδρών που σπουδάζουν Πληροφορική. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Οι μεταβλητές που παρουσιάζονται στο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα είναι το «φύλο» των φοιτητών/φοιτητριών και ο «τομέας εκπαίδευσης» των φοιτητών/φοιτητριών. Και οι δύο είναι ποιοτικές μεταβλητές.

β) Στο σύνολο των ατόμων που σπουδάζουν Νομική, το ποσοστό των γυναικών είναι 71% και το ποσοστό των ανδρών είναι 29%.

γ) Μεγαλύτερη εκπροσώπηση των γυναικών υπάρχει στην Νομική, που είναι 71% έναντι 29% των ανδρών και μικρότερη στην Πληροφορική, που είναι 21% έναντι 79% των ανδρών.

δ) Ο αριθμός των ανδρών που σπουδάζουν Οικονομικά είναι

$$\frac{56}{100} \cdot 16000 = 56 \cdot 160 = 8960.$$

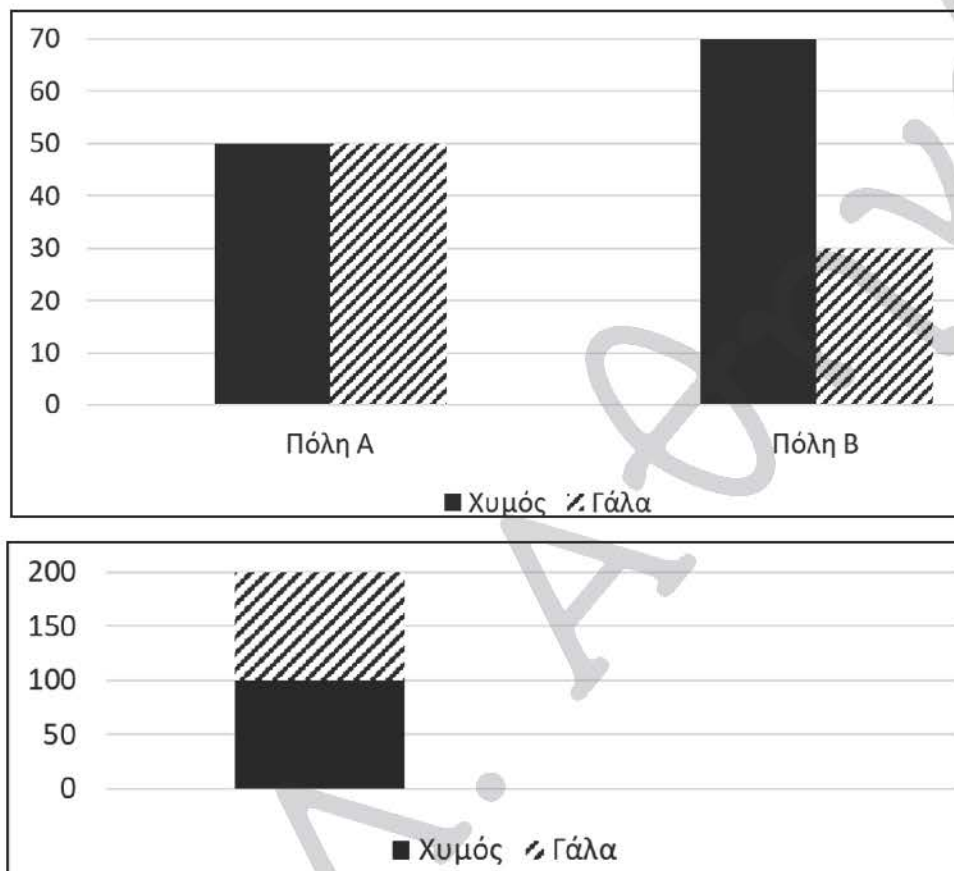
Ο αριθμός των ανδρών που σπουδάζουν Πληροφορική είναι

$$\frac{79}{100} \cdot 10000 = 79 \cdot 100 = 7900.$$

Επομένως, οι άνδρες που σπουδάζουν Οικονομικά είναι περισσότεροι από εκείνους που σπουδάζουν Πληροφορική.

ΘΕΜΑ 4

Σε δύο πόλεις, Α και Β έγινε έρευνα για το πρωινό ρόφημα που προτιμούν τα παιδιά ηλικίας από 5 έως 12 ετών. Τα αποτελέσματα καταγράφονται στην παρακάτω εικόνα (στο επάνω μέρος) στο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, επί τοις εκατό.



Στην εικόνα, στο κάτω μέρος φαίνεται μια από τις δύο ράβδους στοιβαγμένου ραβδογράμματος που αντιστοιχεί στα αποτελέσματα της ίδιας έρευνας.

- Στην πόλη Α, ποιο ποσοστό των παιδιών που συμμετείχαν στην έρευνα προτιμούν γάλα;
(Μονάδες 5)
- Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται να υπάρχει σχέση ανάμεσα στην προτίμηση των παιδιών 5-12 ετών σε χυμό ή γάλα και στην πόλη;
(Μονάδες 8)
- Σε ποια πόλη αντιστοιχεί η ράβδος που φαίνεται στο στοιβαγμένο ραβδόγραμμα και γιατί;
(Μονάδες 7)
- Αν γνωρίζετε ότι συνολικά (στις δύο πόλεις) στην έρευνα απάντησαν 700 παιδιά 5-12 ετών, να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παραπάνω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα και να σχεδιάσετε τη ράβδο που λείπει.
(Μονάδες 5)

α) Όπως φαίνεται στο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα, το 50% των παιδιών της πόλης Α, που συμμετείχαν στην έρευνα, προτιμούν γάλα.

β) Στο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα φαίνεται επίσης ότι:

- Στην πόλη Α, το υπόλοιπο 50% των παιδιών της έρευνας προτιμούν χυμό. Άρα, οι προτιμήσεις των παιδιών της έρευνας στην πόλη Α είναι εντελώς μοιρασμένες.
- Στην πόλη Β, το 70% των παιδιών που συμμετείχαν στην έρευνα προτιμούν χυμό και το 30% προτιμούν γάλα.

Άρα, όσο αφορά τα άτομα της έρευνας, στην πόλη Β εμφανίζεται πιο «συχνή» προτίμηση στο χυμό από το γάλα, ενώ στην πόλη Α όχι.

γ) Από τη μία ράβδο του στοιβαγμένου ραβδογράμματος που βλέπουμε, φαίνεται ότι 100 παιδιά απάντησαν ότι προτιμούν χυμό και άλλα 100 παιδιά ότι προτιμούν γάλα.

Δηλαδή 50% απάντησε «χυμό» και 50% απάντησε «γάλα», άρα πρόκειται για την πόλη Α.

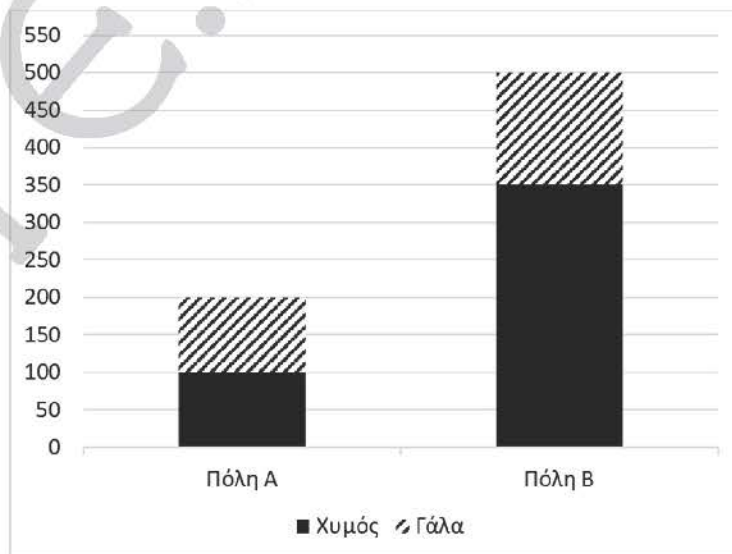
δ) Εφόσον $100 + 100 = 200$ είναι παιδιά της πόλης Α, τα οποία απάντησαν στην έρευνα, τα υπόλοιπα παιδιά που απάντησαν, δηλαδή $700 - 200 = 500$ είναι της πόλης Β.

Το 70% των παιδιών της πόλης Β, τα οποία απάντησαν στην έρευνα είπαν ότι προτιμούν χυμό. Αυτά είναι σε πλήθος:

$$\frac{70}{100} \cdot 500 = 70 \cdot 5 = 350$$

Το υπόλοιπο 30% των παιδιών της πόλης Β, τα οποία απάντησαν στην έρευνα είπαν ότι προτιμούν γάλα. Αυτά είναι σε πλήθος $500 - 350 = 150$.

Άρα, με τα ευρήματά μας σχεδιάζουμε το παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα.



ΘΕΜΑ 2

Στα κυλικάκια δύο σχολείων, ενός γυμνασίου και ενός λυκείου, καταγράφηκαν οι πωλήσεις ατομικών συσκευασιών του ίδιου τύπου χυμού, ως προς τη γεύση, πορτοκάλι ή ροδάκινο. Συνολικά καταγράφηκαν οι πωλήσεις 360 συσκευασιών. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συνάφειας:

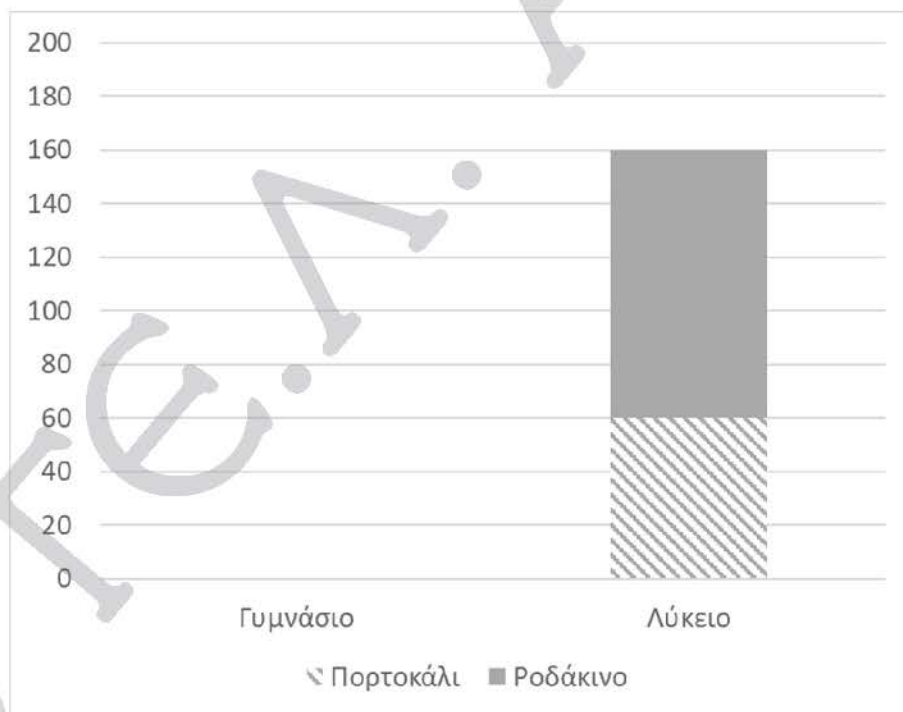
		Προτίμηση σε γεύση χυμού		
		Πορτοκάλι	Ροδάκινο	Σύνολο
Σχολεία	Γυμνάσιο	120	80	
	Λύκειο	60	100	
	Σύνολο			

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα συνάφειας.

(Μονάδες 15)

β) Να συμπληρώσετε το παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα, με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα συνάφειας.

Κατακόρυφα:

- Πορτοκάλι $120 + 60 = 180$.
- Ροδάκινο $80 + 100 = 180$.

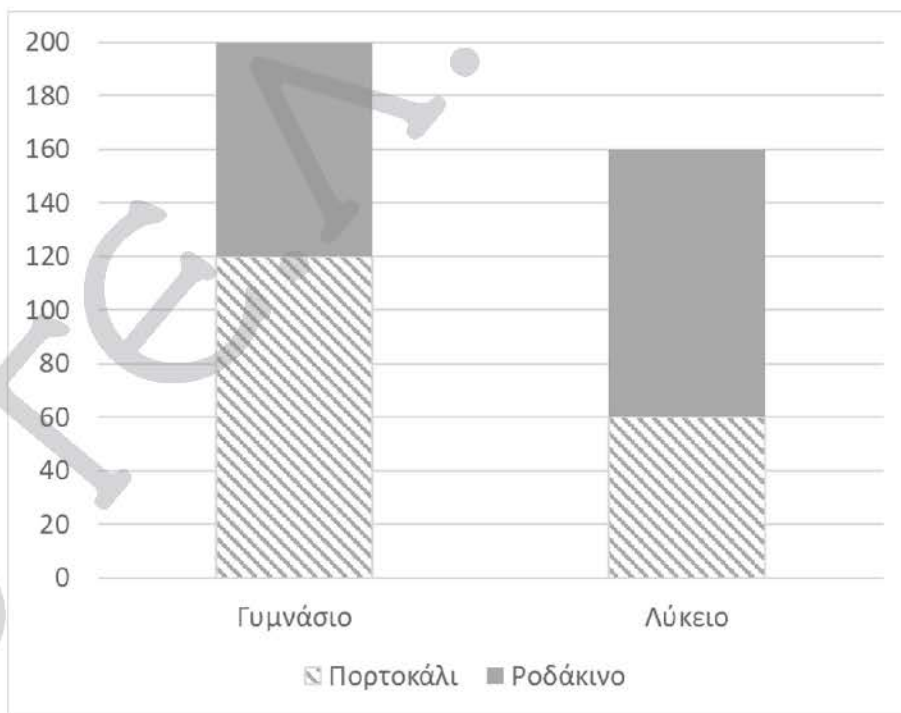
Οριζόντια:

- Γυμνάσιο $120 + 80 = 200$.
- Λύκειο $60 + 100 = 160$.

Συνολικά $180 + 180 = 360$ και $200 + 160 = 360$.

		Προτίμηση σε γεύση χυμού		
		Πορτοκάλι	Ροδάκινο	Σύνολο
Σχολεία	Γυμνάσιο	120	80	200
	Λύκειο	60	100	160
	Σύνολο	180	180	360

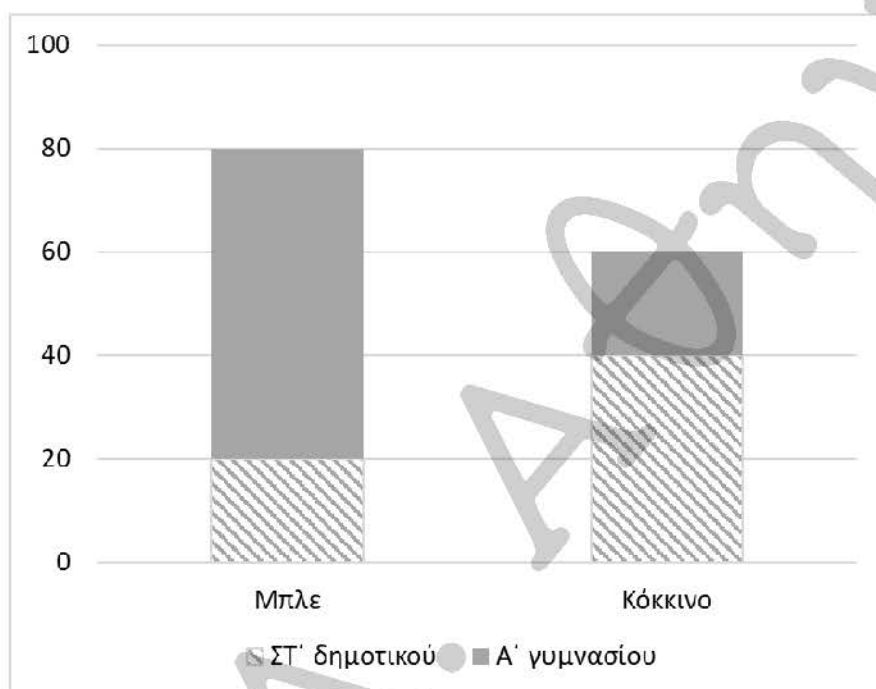
β) Χρησιμοποιούμε τα δεδομένα του πίνακα για να συμπληρώσουμε το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα, με τη ράβδο που αφορά το γυμνάσιο.



ΘΕΜΑ 2

Σε μια γιορτή που συμμετέχουν παιδιά των τάξεων ΣΤ' δημοτικού και Α' γυμνασίου, κάθε παιδί παίρνει, ως δώρο ένα μπαλάκι. Υπάρχουν μπλε και κόκκινα μπαλάκια, τα οποία διαφέρουν μόνο ως προς το χρώμα. Κάθε παιδί επιλέγει ποιο χρώμα προτιμά.

Τα αποτελέσματα των επιλογών, ανά τάξη, φαίνονται στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα.



α)

i. Πόσα ήταν τα παιδιά που επέλεξαν μπλε μπαλάκι; (Μονάδες 6)

ii. Πόσα παιδιά της ΣΤ' δημοτικού επέλεξαν μπλε μπαλάκι; (Μονάδες 6)

iii. Πόσα παιδιά της Α' γυμνασίου επέλεξαν μπλε μπαλάκι; (Μονάδες 6)

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συνάφειας.

		Μπαλάκι		
		Μπλε	Κόκκινο	Σύνολο
Τάξη	ΣΤ' δημοτικού			
	Α' γυμνασίου			
	Σύνολο			

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α)

i. Μπλε μπαλάκι επέλεξαν 80 παιδιά, όπως φαίνεται στη ράβδο στα αριστερά.

ii. Τα παιδιά της ΣΤ' δημοτικού που επέλεξαν μπλε μπαλάκι ήταν 20, όπως φαίνεται στην ίδια ράβδο.

iii. Τα παιδιά της Α' γυμνασίου που επέλεξαν μπλε μπαλάκι ήταν $80 - 20 = 60$.

β) Συμπληρώνουμε τον πίνακα συνάφειας.

Μπλε:

- ΣΤ' δημοτικού 20.
- Α' γυμνασίου 60.

Κατακόρυφα:

- Μπλε $20 + 60 = 80$.
- Κόκκινο $40 + 20 = 60$.

Οριζόντια:

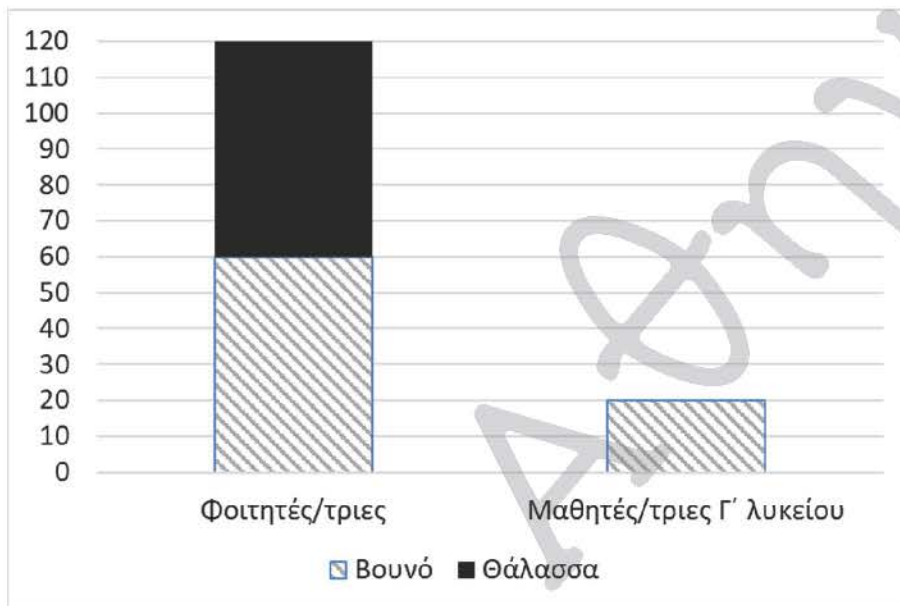
- ΣΤ' δημοτικού $20 + 40 = 60$.
- Α' γυμνασίου $60 + 20 = 80$.

Συνολικά $80 + 60 = 140$.

		Μπαλάκι		
		Μπλε	Κόκκινο	Σύνολο
Τάξη	ΣΤ' Δημοτικού	20	40	60
	Α' Γυμνασίου	60	20	80
	Σύνολο	80	60	140

ΘΕΜΑ 2

Ρωτήθηκαν 120 φοιτητές και φοιτήτριες και 120 μαθητές και μαθήτριες της Γ' λυκείου, πού προτιμούν να πάνε διακοπές το καλοκαίρι, μεταξύ βουνού και θάλασσας. Όλοι και όλες έδωσαν μία από τις δύο απαντήσεις αυτές. Τα αποτελέσματα των απαντήσεών τους φαίνονται στο παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα, αλλά από τη ράβδο «Μαθητές/τριες Γ' λυκείου» λείπει το μέρος που αντιστοιχεί στην απάντηση «θάλασσα».



α)

i. Πόσοι/ες μαθητές/τριες Γ' λυκείου απάντησαν ότι προτιμούν βουνό; (Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε πόσοι/ες μαθητές/τριες Γ' λυκείου απάντησαν ότι προτιμούν θάλασσα.

(Μονάδες 6)

β) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) την παρακάτω πρόταση.

«Οι περισσότεροι/ες από τους φοιτητές/τριες απάντησαν ότι προτιμούν βουνό.»

(Μονάδες 5)

γ) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε το παραπάνω στοιβαγμένο

ραβδόγραμμα.

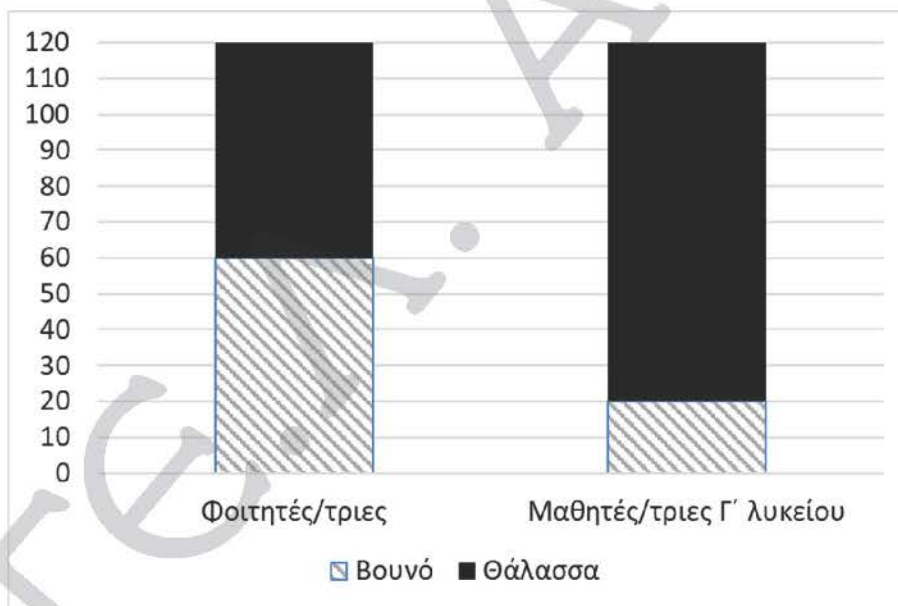
(Μονάδες 9)

α)

- i. Όπως φαίνεται από τη ράβδο στα δεξιά, η οποία αντιστοιχεί σε μαθητές/τριες της Γ' λυκείου που απάντησαν «βουνό», αυτοί/ες ήταν 20.
- ii. Εφόσον απάντησαν 120 μαθητές/τριες της Γ' λυκείου συνολικά, αυτοί/ες που απάντησαν «θάλασσα» ήταν $120 - 20 = 100$.

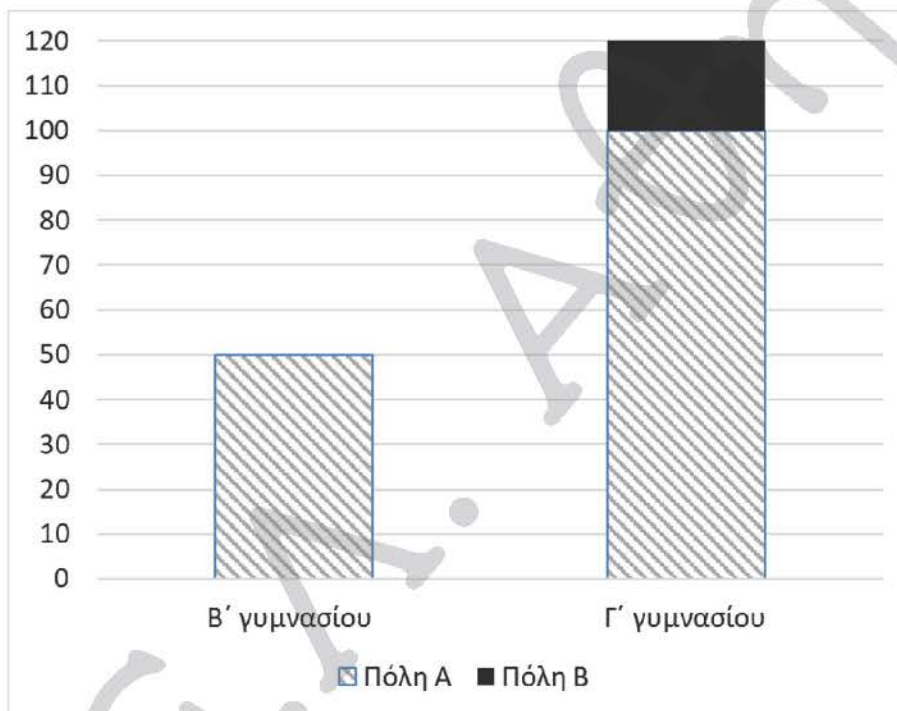
β) Η πρόταση είναι λανθασμένη (Λ), καθώς 60 απάντησαν «βουνό» και 60 «θάλασσα», σύμφωνα με το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα.

γ) Συμπληρώνουμε το μέρος της ράβδου στα δεξιά, το οποίο αντιστοιχεί σε μαθητές/τριες Γ' λυκείου που απάντησαν «θάλασσα». Σύμφωνα με την απάντηση στο ερώτημα β), αυτοί/ες ήταν 100. Συνολικά, οι μαθητές/τριες της Γ' λυκείου που απάντησαν στην έρευνα ήταν 120, όπως φαίνεται και στο συμπληρωμένο στοιβαγμένο ραβδόγραμμα, παρακάτω.



ΘΕΜΑ 2

Τα παιδιά των τάξεων Β' και Γ' ενός γυμνασίου πρόκειται να πάνε ημερήσια εκδρομή. Δύο είναι οι υποψήφιοι προορισμοί, η πόλη Α και η πόλη Β. Το δεκαπενταμελές μαθητικό συμβούλιο έκανε ψηφοφορία μεταξύ των δύο πόλεων, στην οποία συμμετείχαν όλα τα παιδιά των δύο τάξεων, δηλώνοντας την προτίμησή τους (πόλη Α ή πόλη Β). Δεν υπήρχε «λευκή» ψήφος. Την πόλη Β προτίμησαν 60 παιδιά της Β' τάξης και 20 παιδιά της Γ' τάξης. Στα αποτελέσματα της ψηφοφορίας αντιστοιχεί το παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα, από το οποίο λείπει το μέρος της ράβδου που αντιστοιχεί στα παιδιά της Β' γυμνασίου που προτίμησαν την πόλη Β.



α) Σύμφωνα με το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα:

i. Πόσα παιδιά της Β' γυμνασίου προτίμησαν την πόλη Α; (Μονάδες 4)

ii. Πόσα παιδιά της Γ' γυμνασίου συμμετείχαν στην ψηφοφορία; (Μονάδες 7)

β) Πόσα παιδιά της Γ' γυμνασίου προτίμησαν την πόλη Α; (Μονάδες 6)

γ) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε το παραπάνω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα. (Μονάδες 8)

α) Όπως φαίνεται στο στοιβαγμένο ραβδόγραμμα:

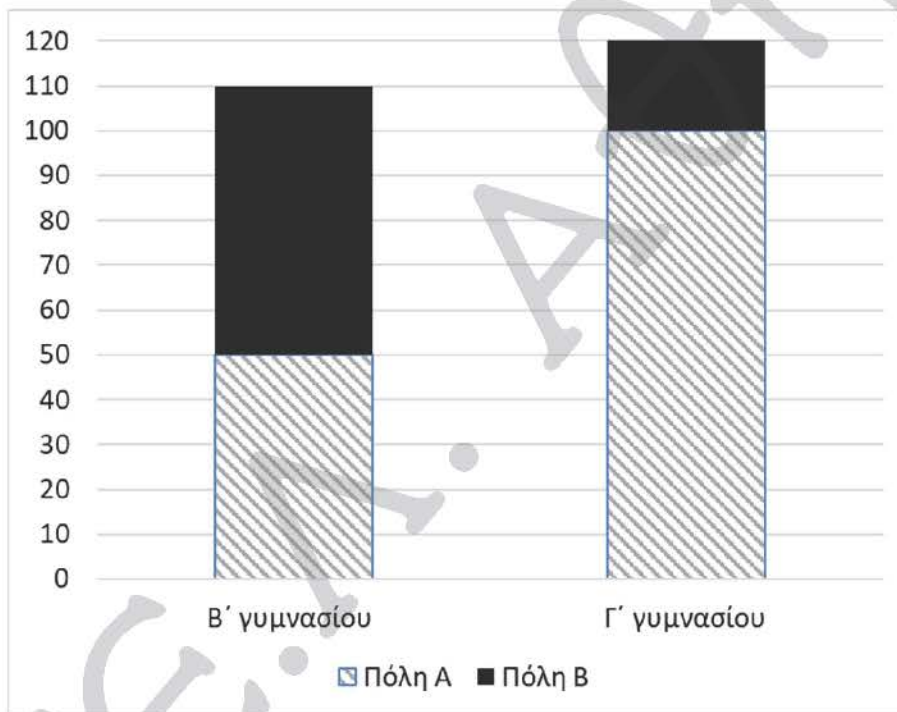
i. 50 παιδιά της Β΄ γυμνασίου προτίμησαν την πόλη Α.

ii. 120 παιδιά της Γ΄ γυμνασίου συμμετείχαν στην ψηφοφορία, εφόσον δεν υπήρχε «λευκή» ψήφος.

β) Τα παιδιά της Γ΄ γυμνασίου, τα οποία προτίμησαν την πόλη Α, σύμφωνα με την ράβδο του στοιβαγμένου ραβδογράμματος στα δεξιά ήταν 100.

γ) Μένει να συμπληρωθεί και να χρωματιστεί με σκούρο χρώμα, το μέρος της ράβδου στα αριστερά, το οποίο αντιστοιχεί στα 60 παιδιά της Β΄ γυμνασίου που προτίμησαν την πόλη Β.

Άρα έχουμε:



ΘΕΜΑ 2

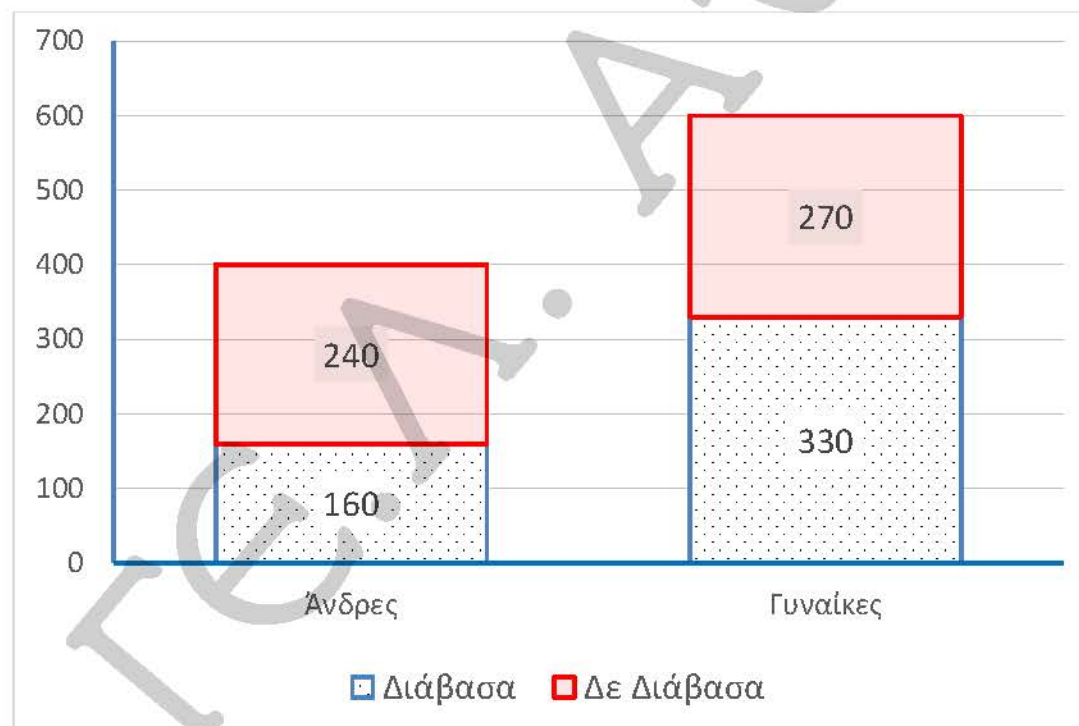
Σε μία έρευνα, τυχαία επιλεγμένοι ενήλικες, ρωτήθηκαν αν έχουν διαβάσει ένα τουλάχιστον λογοτεχνικό βιβλίο τον τελευταίο χρόνο. Οι απαντήσεις τους, ανά φύλο, αναπαρίστανται στο παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

α) Στην έρευνα αυτή:

- i. πόσοι άνδρες και πόσες γυναίκες συμμετείχαν; (Μονάδες 4)
- ii. ποιο είναι το μέγεθος του δείγματος; (Μονάδες 3)

β) Να βρείτε τα ποσοστά, όσων έχουν διαβάσει, ένα τουλάχιστον λογοτεχνικό βιβλίο τον τελευταίο χρόνο:

- i. μεταξύ των ανδρών του δείγματος, (Μονάδες 6)
- ii. μεταξύ των γυναικών του δείγματος, (Μονάδες 6)
- iii. μεταξύ όλων των ατόμων του δείγματος. (Μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

α)

i. Το πλήθος των ανδρών που συμμετείχαν στην έρευνα είναι $160 + 240 = 400$.

Το πλήθος των γυναικών που συμμετείχαν στην έρευνα είναι $330 + 270 = 600$.

ii. Το μέγεθος του δείγματος είναι $400 + 600 = 1000$ άτομα.

β)

i. Το ποσοστό μεταξύ των ανδρών του δείγματος, που έχουν διαβάσει, ένα τουλάχιστον

λογοτεχνικό βιβλίο τον τελευταίο χρόνο, είναι $\frac{160}{400} = \frac{40}{100} = 40\%$.

ii. Το ποσοστό μεταξύ των γυναικών του δείγματος, που έχουν διαβάσει, ένα τουλάχιστον

λογοτεχνικό βιβλίο τον τελευταίο χρόνο, είναι $\frac{330}{600} = \frac{55}{100} = 55\%$.

iii. Το πλήθος όλων των ατόμων που συμμετείχαν στην έρευνα είναι $400 + 600 = 1000$.

Από αυτά έχουν διαβάσει, ένα τουλάχιστον λογοτεχνικό βιβλίο τον τελευταίο χρόνο

$160 + 330 = 490$ άτομα.

Επομένως το ποσοστό μεταξύ όλων των ατόμων του δείγματος, που έχουν διαβάσει, ένα

τουλάχιστον λογοτεχνικό βιβλίο τον τελευταίο χρόνο, είναι $\frac{490}{1000} = \frac{49}{100} = 49\%$.

ΘΕΜΑ 4

Θέλοντας να διερευνήσουμε τη σχέση μεταξύ φύλου (άνδρας, γυναίκα) και καπνίσματος (μη καπνιστής, καπνιστής) για άτομα ηλικίας ανω των 15 ετών, διεξήχθη πανελλαδική έρευνα και συλλέχθηκε ένα δείγμα 1000 ατόμων. Τα δεδομένα οργανώθηκαν στον παρακάτω πίνακα συνάφειας :

		Κάπνισμα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Φύλο	Άνδρες	260	160	
	Γυναίκες	280	300	
	Σύνολο			

α) Να συμπληρώσετε τα κενά κελιά του παραπάνω και να συμπληρώσετε στον παρακάτω πίνακα το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα των συχνοτήτων του πίνακα συνάφειας.



(Μονάδες 9)

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων ως προς το φύλο και το αντίστοιχο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμά του.

(Μονάδες 9)

γ) Με βάση τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας φαίνεται να υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ φύλου και καπνίσματος;

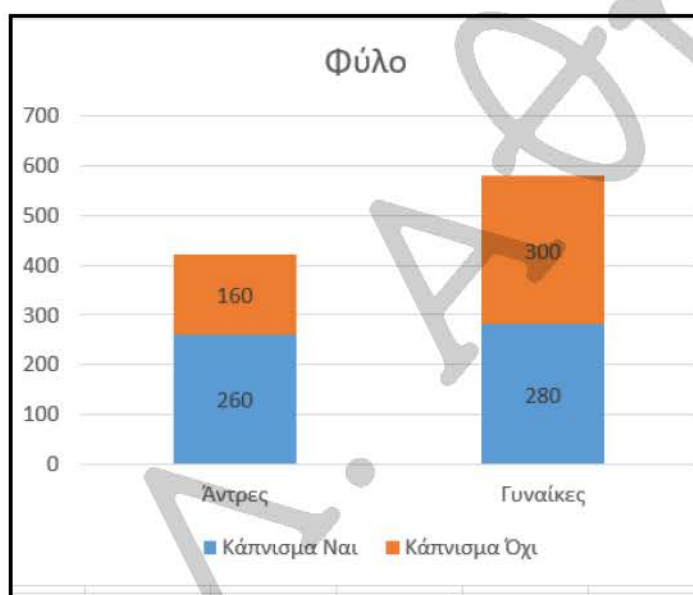
(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ο πίνακας συνάφειας φαίνεται συμπληρωμένος παρακάτω:

		Κάπνισμα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
	Άνδρες	260	160	420
	Γυναίκες	280	300	580
	Σύνολο	540	460	1000

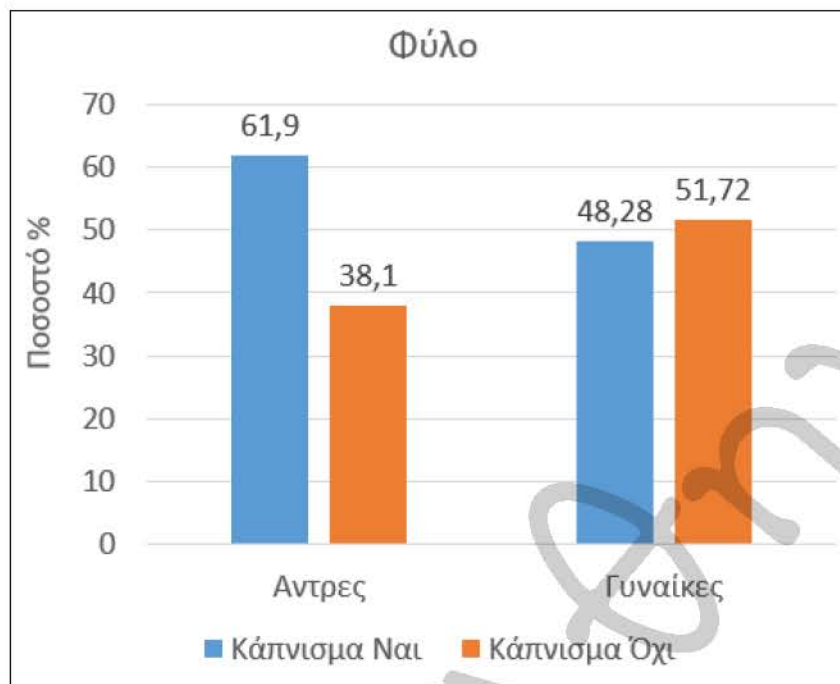
Το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα των συχνοτήτων αυτού του πίνακα είναι το εξής:



β) Το σύνολο των ανδρών είναι $260+160=420$ εκ των οποίων καπνιστές είναι οι 260. Άρα το ποσοστό των ανδρών καπνιστών είναι $\frac{260}{420} = 61,90\%$. Παρόμοια συμπληρώνουμε τον ζητούμενο πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων ως προς το φύλο, που είναι ο εξής:

		Κάπνισμα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Φύλο	Άνδρες	61,90%	38,10%	100%
	Γυναίκες	48,28%	51,72%	100%
	Σύνολο			

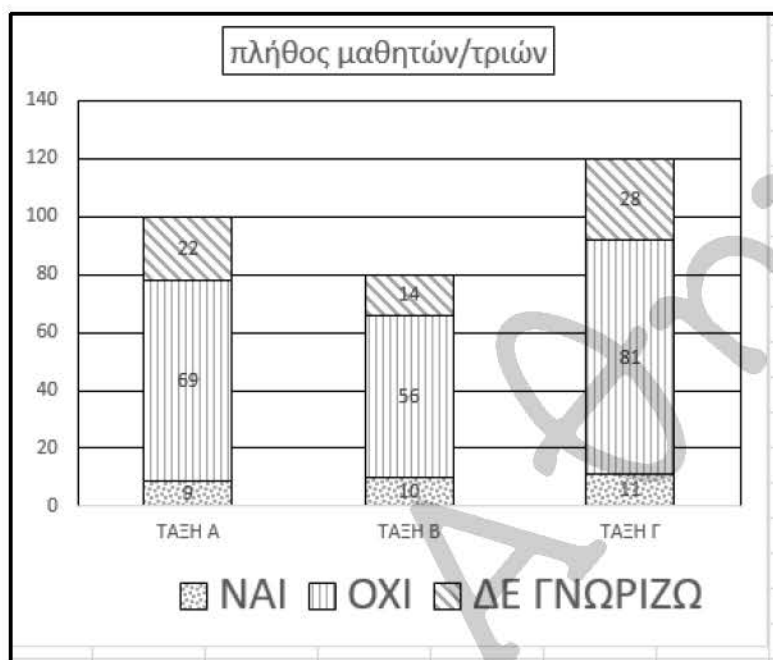
Το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα του είναι το παρακάτω:



γ) Από το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα του (β) ερωτήματος φαίνεται ότι στους άντρες το ποσοστό των καπνιστών είναι σημαντικά μεγαλύτερο από αυτό των μη καπνιστών, ενώ στις γυναίκες το ποσοστό είναι ισόποσα μοιρασμένο με ελαφρύ προβάδισμα αυτό των μη καπνιστριών.

ΘΕΜΑ 2

Στα πλαίσια μιας έρευνας που διενεργήθηκε σε 300 μαθητές/μαθήτριες ενός Λυκείου σχετικά με την Κλιματική Αλλαγή τέθηκε η ερώτηση : «Πιστεύετε ότι η κλιματική αλλαγή είναι κάτι για το οποίο οι επιστήμονες υπερβάλλουν;» Οι απαντήσεις των μαθητών/τριών του σχολείου αναπαριστώνται στο επόμενο στοιβαγμένο ραβδόγραμμα:



α) Ποιο ποσοστό των μαθητών που απάντησαν ΝΑΙ πηγαίνει στην Α' Λυκείου;

(Μονάδες 8)

β)

i. Πόσοι μαθητές του Λυκείου απάντησαν ότι η κλιματική αλλαγή είναι κάτι για το οποίο οι επιστήμονες υπερβάλλουν; Τι ποσοστό του συνόλου των μαθητών είναι;

(Μονάδες 8)

ii. Τι ποσοστό από κάθε τάξη απάντησαν ότι η κλιματική αλλαγή είναι κάτι για το οποίο οι επιστήμονες δεν υπερβάλλουν;

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το ραβδόγραμμα οι μαθητές/μαθήτριες του Λυκείου που απάντησαν ΝΑΙ είναι $9+10+11=30$ (9 από την Α', 10 από τη Β' και 11 από τη Γ'). Από αυτούς οι 9 είναι μαθητές της Α' τάξης. Έτσι το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν ΝΑΙ και πηγαίνει στην Α' Λυκείου είναι $\frac{9}{30} = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$.

β)

i. Αθροίζοντας τις τιμές των ράβδων με την απάντηση «ναι» έχουμε 30 μαθητές/μαθήτριες (9 από την Α', 10 από τη Β' και 11 από τη Γ') που απάντησαν ότι η κλιματική αλλαγή είναι κάτι για το οποίο οι επιστήμονες υπερβάλλουν. Το ποσοστό είναι $\frac{30}{300} = \frac{10}{100} = 10\%$ των μαθητών/τριών του Λυκείου.

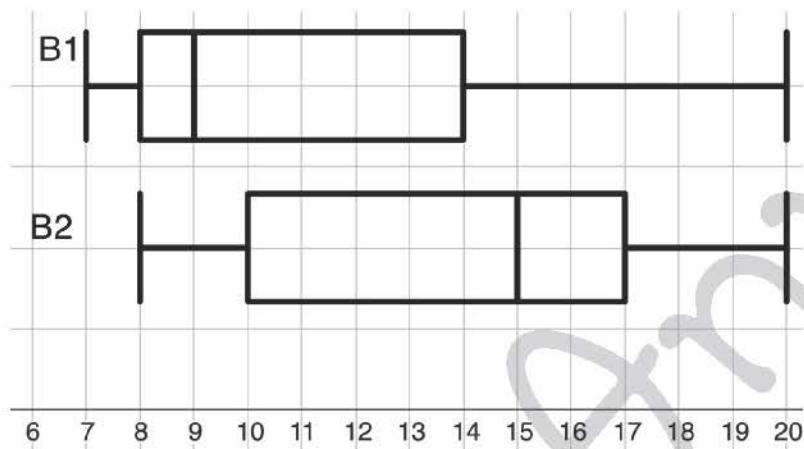
ii. Από τους 100 μαθητές/μαθήτριες της Α' τάξης οι 69 απάντησαν ότι οι επιστήμονες δεν υπερβάλλουν. Το ζητούμενο ποσοστό είναι $\frac{69}{100} = 69\%$.

Από τους 80 μαθητές/μαθήτριες της Β' τάξης οι 56 απάντησαν ότι οι επιστήμονες δεν υπερβάλλουν. Το ζητούμενο ποσοστό είναι $\frac{56}{80} = \frac{14}{20} = \frac{70}{100} = 70\%$.

Από τους 120 μαθητές/μαθήτριες της Γ' τάξης οι 81 απάντησαν ότι οι επιστήμονες δεν υπερβάλλουν. Το ζητούμενο ποσοστό είναι $\frac{81}{120} = \frac{27}{40} = \frac{67,5}{100} = 67,5\%$.

ΘΕΜΑ 4

Τα τμήματα Β1 και Β2 ενός σχολείου έγραψαν ένα διαγώνισμα στα μαθηματικά, με τα ίδια θέματα. Στα παρακάτω θηκογράμματα παρουσιάζονται οι βαθμοί των μαθητών (σε κανένα τμήμα δεν έχουμε ακραίες τιμές).



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με βάση τα δύο θηκογράμματα.

	Τμήμα Β1	Τμήμα Β2
Q_1		
δ		
Q_3		
x_{min}		
x_{max}		

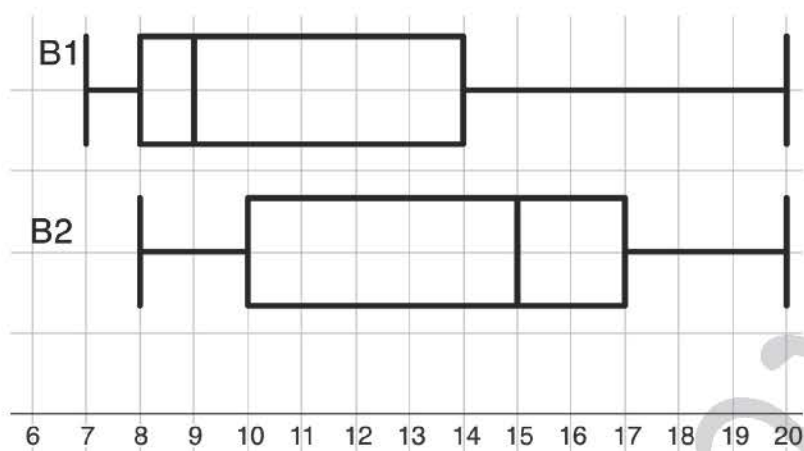
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος καθώς και το εύρος των βαθμών των δύο τμημάτων, στο διαγώνισμα.

(Μονάδες 7)

γ) Ο καθηγητής αποφάσισε να δώσει ένα βραβείο στο 25% των μαθητών του κάθε τμήματος, οι οποίοι πήραν τη μεγαλύτερη βαθμολογία. Ο Δημήτρης πήρε 16 στο διαγώνισμα και πήρε βραβείο. Σε ποιο από τα δύο τμήματα είναι ο Δημήτρης;

(Μονάδες 6)



α) Με βάση τα θηκογράμματα ο πίνακας γίνεται:

	Τμήμα B1	Τμήμα B2
Q_1	8	10
δ	9	15
Q_3	14	17
x_{min}	7	8
x_{max}	20	20

β) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των βαθμών του B1 είναι:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 14 - 8 = 6$$

Το εύρος είναι $R = x_{max} - x_{min} = 20 - 7 = 13$ μονάδες.

Και για το B2:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 17 - 10 = 7$$

Το εύρος είναι $R = x_{max} - x_{min} = 20 - 8 = 12$ μονάδες.

γ) Και στα δύο τμήματα:

- αν ένας βαθμός είναι μεγαλύτερος του Q_3 , τότε ανήκει στο 25% των μεγαλύτερων βαθμών του τμήματος, ενώ
- αν ένας βαθμός είναι μικρότερος του Q_3 , τότε δεν ανήκει στο 25% των μεγαλύτερων βαθμών του τμήματος.

Επομένως:

Στο B1, $Q_3 = 14$, άρα ο βαθμός 16 είναι στο 25% των μεγαλύτερων βαθμών του τμήματος.

Όμως, στο B2 είναι $Q_3 = 17$. Άρα το 16 δεν ανήκει στο 25% των μεγαλύτερων βαθμών του τμήματος.

Επομένως, εφόσον ο Δημήτρης πήρε βραβείο έχοντας βαθμό 16 είναι στο B1.

ΘΕΜΑ 4

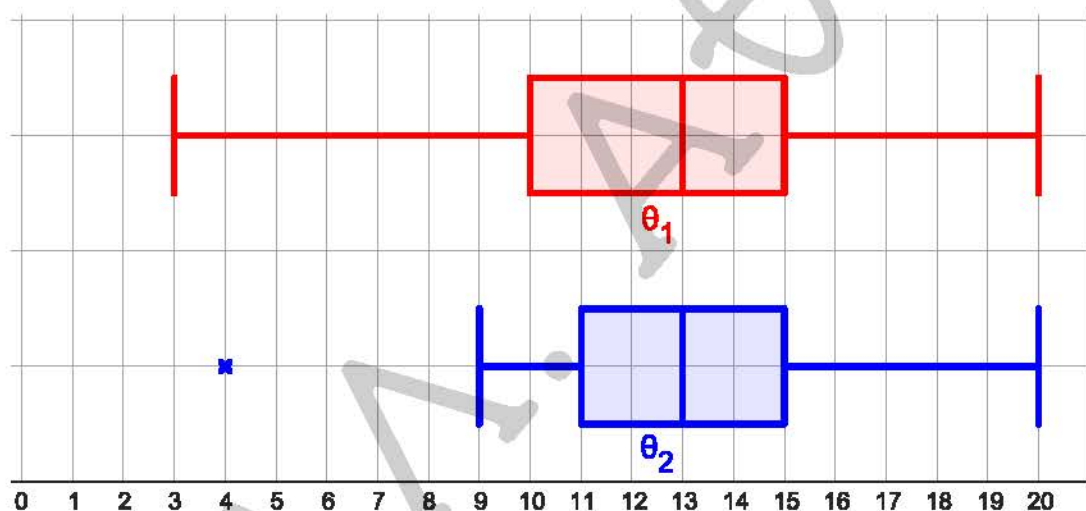
Η Μαρία και οι συμμαθητές της συμμετείχαν σε έναν διαγωνισμό στη Στατιστική. Η βαθμολογία της Μαρίας αρχικά καταχωρήθηκε ως 3 πριν διορθωθεί με τη σωστή βαθμολογία που ήταν 13. Τα παρακάτω θηκογράμματα θ_1 και θ_2 παρουσιάζουν τις βαθμολογίες των παιδιών, πριν και μετά τη διόρθωση στη βαθμολογία της Μαρίας.

α) Ποια από τα δύο θηκογράμματα θ_1 και θ_2 :

- i. έχει ακραία τιμή; (Μονάδες 3)
- ii. περιέχει τη σωστή βαθμολογία της Μαρίας; (Μονάδες 4)

β) Να συγκρίνετε τις δύο βαθμολογίες, πριν και μετά τη διόρθωση, ως προς:

- i. τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο, (Μονάδες 6)
- ii. το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, (Μονάδες 6)
- iii. τη μέση τιμή. (Μονάδες 6)



α) Από τα θηκογράμματα θ_1 και θ_2 παρατηρούμε ότι:

- i. Ακραία τιμή, την παρατήρηση 4, έχει η βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_2 .
- ii. Τη σωστή βαθμολογία της Μαρίας περιέχει το θ_2 , αφού στο θ_2 δεν περιλαμβάνεται η λανθασμένη παρατήρηση 3.

β) Από τα θηκογράμματα θ_1 και θ_2 παρατηρούμε ότι:

- i. Η διάμεσος είναι η ίδια, $\delta = 13$ και στις δύο βαθμολογίες, πριν και μετά τη διόρθωση.

Το πρώτο τεταρτημόριο για τη βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_1 είναι $Q_1 = 10$ και για τη βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_2 είναι $Q'_1 = 11$. Επομένως $Q_1 < Q'_1$.

Το τρίτο τεταρτημόριο είναι το ίδιο, $Q_3 = Q'_3 = 15$ και στις δύο βαθμολογίες.

- ii. Για τη βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_1 , η μέγιστη παρατήρηση είναι 20 και η ελάχιστη 3, οπότε το εύρος είναι $R = 20 - 3 = 17$.

Για τη βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_2 , η μέγιστη παρατήρηση είναι 20 και η ελάχιστη 4, οπότε το εύρος είναι $R' = 20 - 4 = 16$.

Επομένως $R > R'$, άρα το εύρος της λανθασμένης βαθμολογίας είναι μεγαλύτερο από το εύρος της διορθωμένης βαθμολογίας.

Για τη βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_1 , το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι

$$Q = Q_3 - Q_1 = 15 - 10 = 5.$$

Για τη βαθμολογία που παρουσιάζεται στο θ_2 , το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι

$$Q' = Q'_3 - Q'_1 = 15 - 11 = 4.$$

Επομένως $Q > Q'$, άρα το ενδοτεταρτημοριακό εύρος της λανθασμένης βαθμολογίας είναι μεγαλύτερο από το εύρος της διορθωμένης βαθμολογίας.

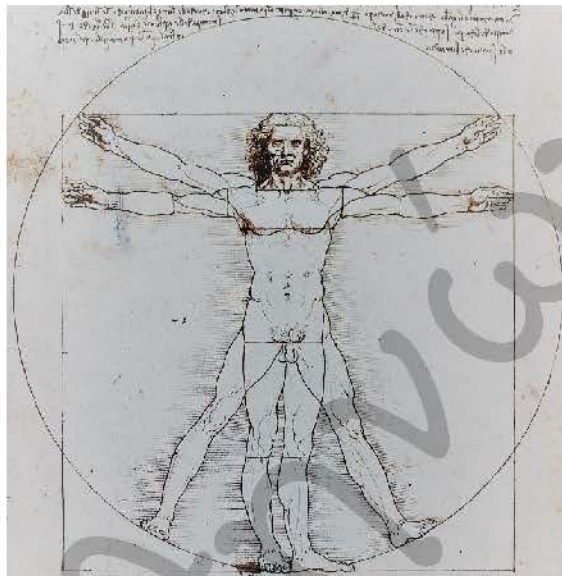
- iii. Η μέση τιμή της διορθωμένης βαθμολογίας, είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή της λανθασμένης βαθμολογίας, αφού η παρατήρηση 3 αντικαταστάθηκε με την μεγαλύτερη παρατήρηση 13.

Σημείωση: Αν το πλήθος των παιδιών που συμμετείχαν στον διαγωνισμό είναι n , τότε η μέση

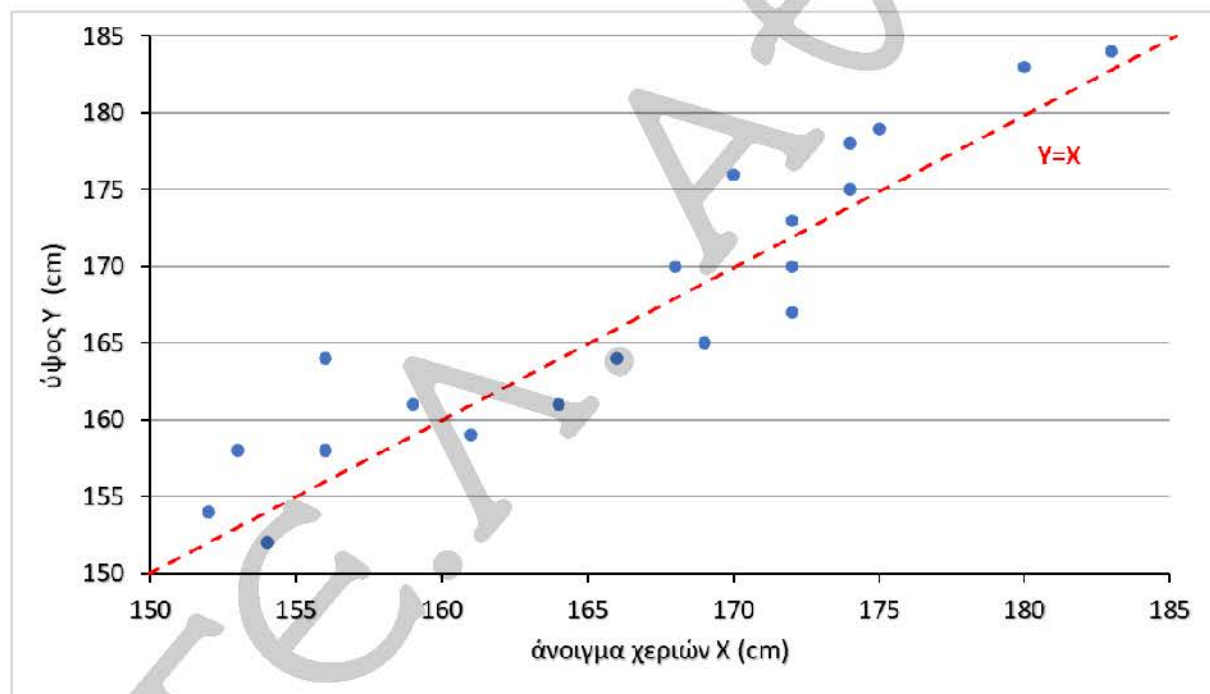
τιμή αυξήθηκε κατά $\frac{-3+13}{n} = \frac{10}{n}$.

ΘΕΜΑ 4

Ο Λεονάρντο ντα Βίντσι, στο σχέδιο του «Ο Άνθρωπος του Βιτρούβιου», ισχυρίζεται ότι το άνοιγμα των χεριών ενός ατόμου και το ύψος του είναι περίπου ίσα. Θέλοντας να το διερευνήσει αυτό, μια ομάδα μαθητών ενός Λυκείου επέλεξε τυχαία ένα δείγμα 20 συμμαθητών τους και μέτρησε, σε cm, το άνοιγμα των χεριών και το ύψος τους. Με τα δεδομένα αυτά η ομάδα των μαθητών κατασκεύασε το παρακάτω διάγραμμα



διασποράς και την ευθεία $Y = X$ στο ίδιο σχήμα, όπως φαίνεται παρακάτω:



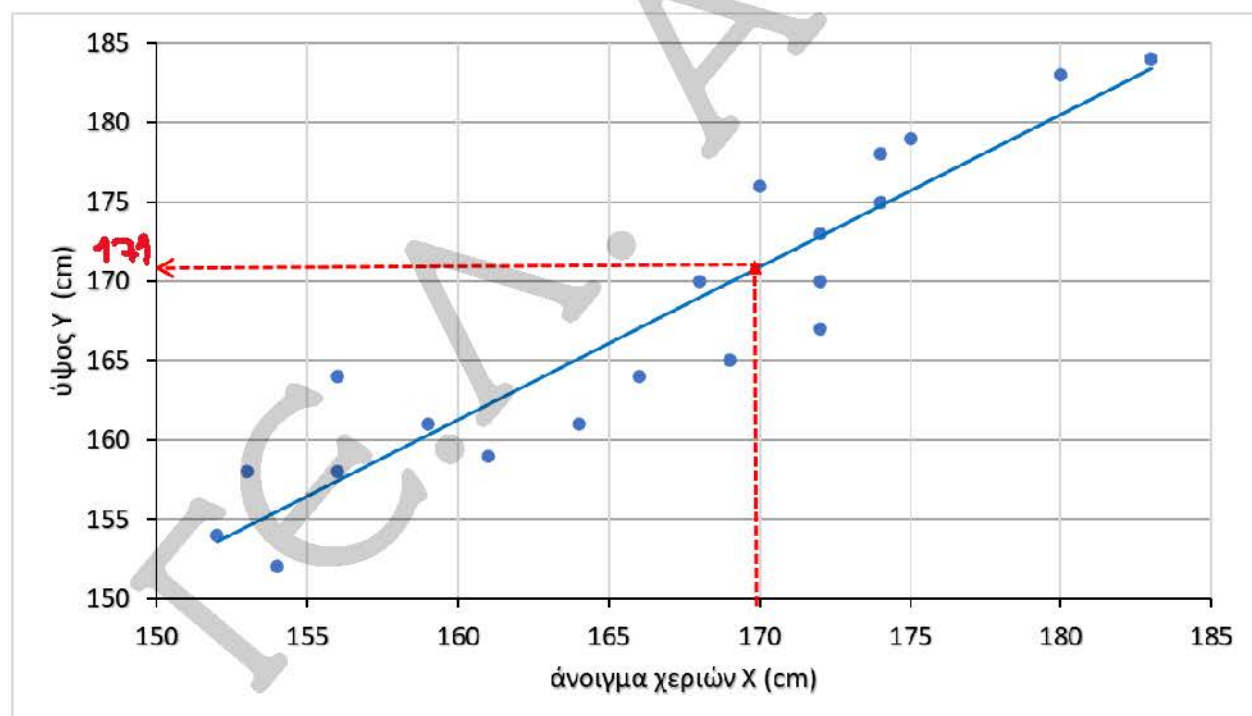
- α) Στην έρευνα των μαθητών ποιες είναι οι μεταβλητές και ποιο το είδος τους; (Μονάδες 7)
- β) Οι μαθητές υπολόγισαν ότι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των παραπάνω μεταβλητών είναι $r = 0,93$. Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Λεονάρντο ντα Βίντσι; (Μονάδες 8)
- γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία που προσαρμόζεται «με το μάτι» στα δεδομένα. (Μονάδες 5)
- δ) Ένας από τους μαθητές του Λυκείου που δεν συμμετείχε στην έρευνα, έχει άνοιγμα χεριών 170 cm. Να εκτιμήσετε ποιο θα είναι περίπου το ύψος του. (Μονάδες 5)

α) Οι δύο μεταβλητές της έρευνας είναι: το άνοιγμα των χεριών (μήκος των χεριών του μαθητή σε διάταση) που συμβολίζεται με το X και το ύψος του μαθητή που συμβολίζεται με το Y . Οι μεταβλητές αυτές είναι ποσοτικές, αφού αναφέρονται σε ένα ποσοτικό χαρακτηριστικό, το μήκος, και συνεχείς αφού μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή.

β) Επειδή ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των μεταβλητών X και Y είναι $r = 0,93$, οι X και Y είναι ισχυρά, θετικά, γραμμικά συσχετισμένες μεταβλητές.

Αν οι δύο μεταβλητές ήταν ίσες, όλα τα σημεία των δεδομένων θα ήταν πάνω στην ευθεία $Y = X$. Στο διάγραμμα διασποράς των μαθητών, όλα τα σημεία των δεδομένων είναι πολύ καλά συγκεντρωμένα γύρω από την ευθεία $Y = X$. Αυτό επιβεβαιώνεται και από την τιμή του $r = 0,93$, που μας λέει ότι τα σημεία των δεδομένων είναι πολύ συγκεντρωμένα γύρω από κάποια ευθεία. Επομένως, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το άνοιγμα των χεριών ενός ατόμου και το ύψος του είναι περίπου ίσα.

γ) Η ευθεία που προσαρμόζεται «με το μάτι» στα δεδομένα φαίνεται παρακάτω:



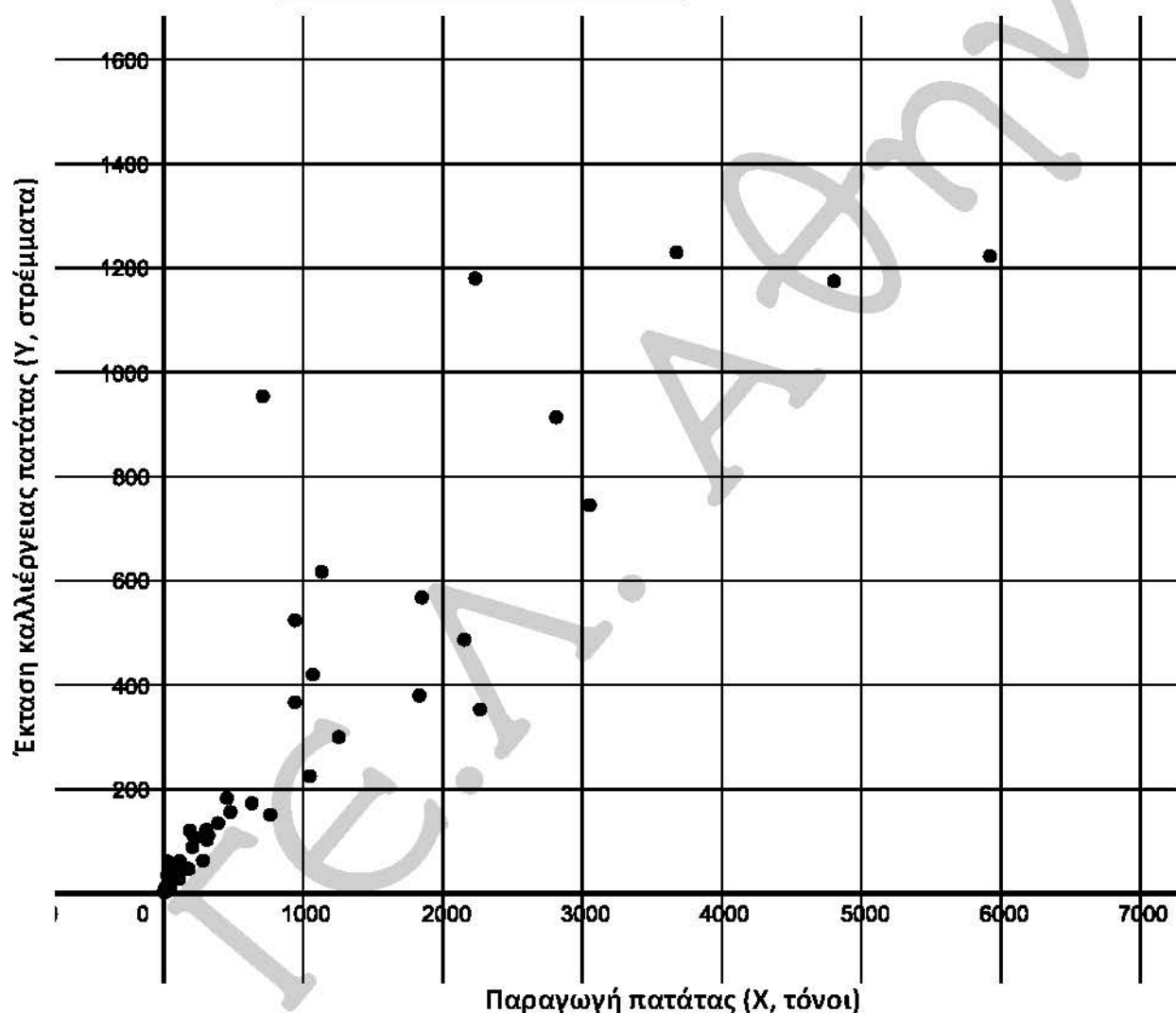
δ) Χρησιμοποιώντας την ευθεία του ερωτήματος (γ), βρίσκουμε την τεταγμένη του σημείου, της ευθείας αυτής, που έχει τετμημένη 170. Αυτή φαίνεται να είναι 171. Άρα ένας μαθητής με άνοιγμα χεριών 170 cm, εκτιμάται ότι θα έχει ύψος περίπου 171 cm.

Σημείωση: Δεν εκτιμούμε ότι ο μαθητής θα έχει ύψος 176 cm, όσο ο μαθητής του δείγματος με άνοιγμα χεριών 170 cm.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω διάγραμμα διασποράς φαίνεται η παραγωγή πατάτας (X) σε σχέση με την έκταση (Y) στην οποία παράγεται, για 50 περιοχές της Ελλάδας από ολόκληρη την επικράτεια, των οποίων η έκταση δεν ξεπερνάει τα 1400 στρέμματα. Η παραγωγή της πατάτας (μεταβλητή X) είναι μετρημένη σε τόνους και η έκταση (μεταβλητή Y) είναι μετρημένη σε στρέμματα.

ΚΑΛΛΙΕΡΓΕΙΑ ΠΑΤΑΤΑΣ ΣΕ ΤΟΝΟΥΣ (≤1400 στρέμματα)



α) Η παραγωγή της πατάτας σε τόνους, ομαδοποιήθηκε στις κλάσεις $[0,1000)$, $[1000,2000)$, $[2000,3000)$, $[3000,4000)$, $[4000,5000)$, $[5000,6000)$. Να αντιγράψετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω διάγραμμα.

Κλάσεις με παραγωγή σε τόνους	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα % $f_i\%$
0, 1000)			
1000, 2000)			
2000, 3000)			
3000, 4000)			
4000, 5000)			
5000, 6000)	1	0,02	2
Σύνολο	50	1	100

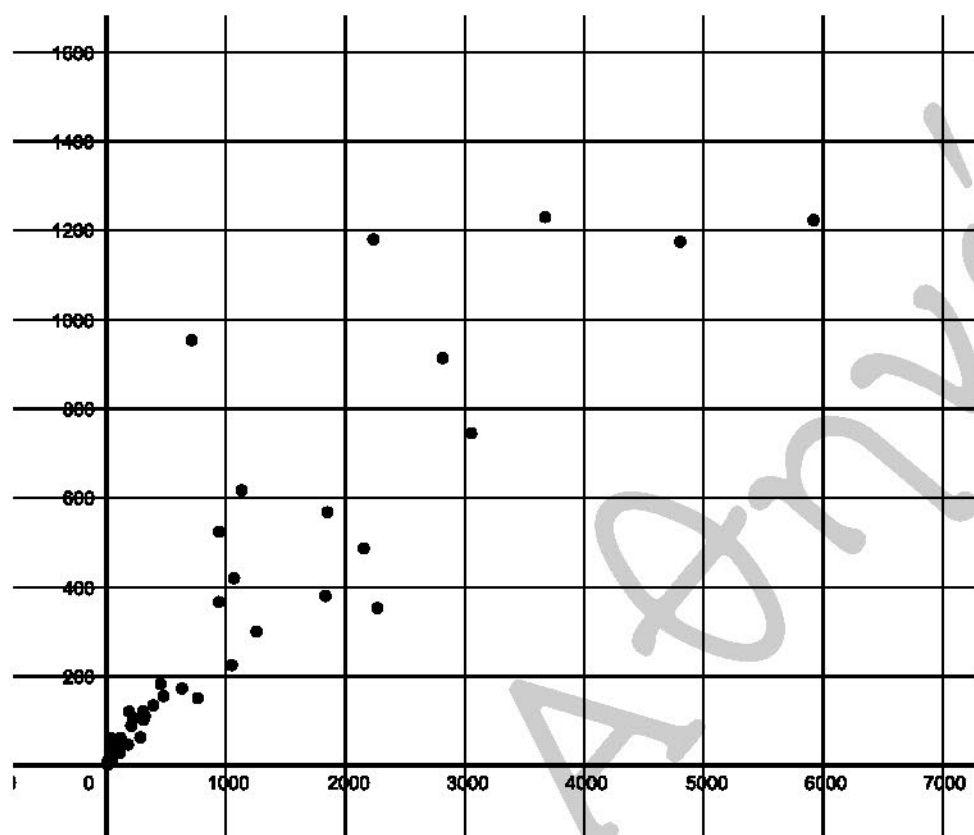
(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων για την μεταβλητή X . (Μονάδες 10)

γ) Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r μεταξύ των μεταβλητών (X) και (Y), όπου (X) είναι η παραγωγή πατάτας σε τόνους και (Y) είναι η έκταση σε στρέμματα στην οποία παράγονται οι πατάτες, θα είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)

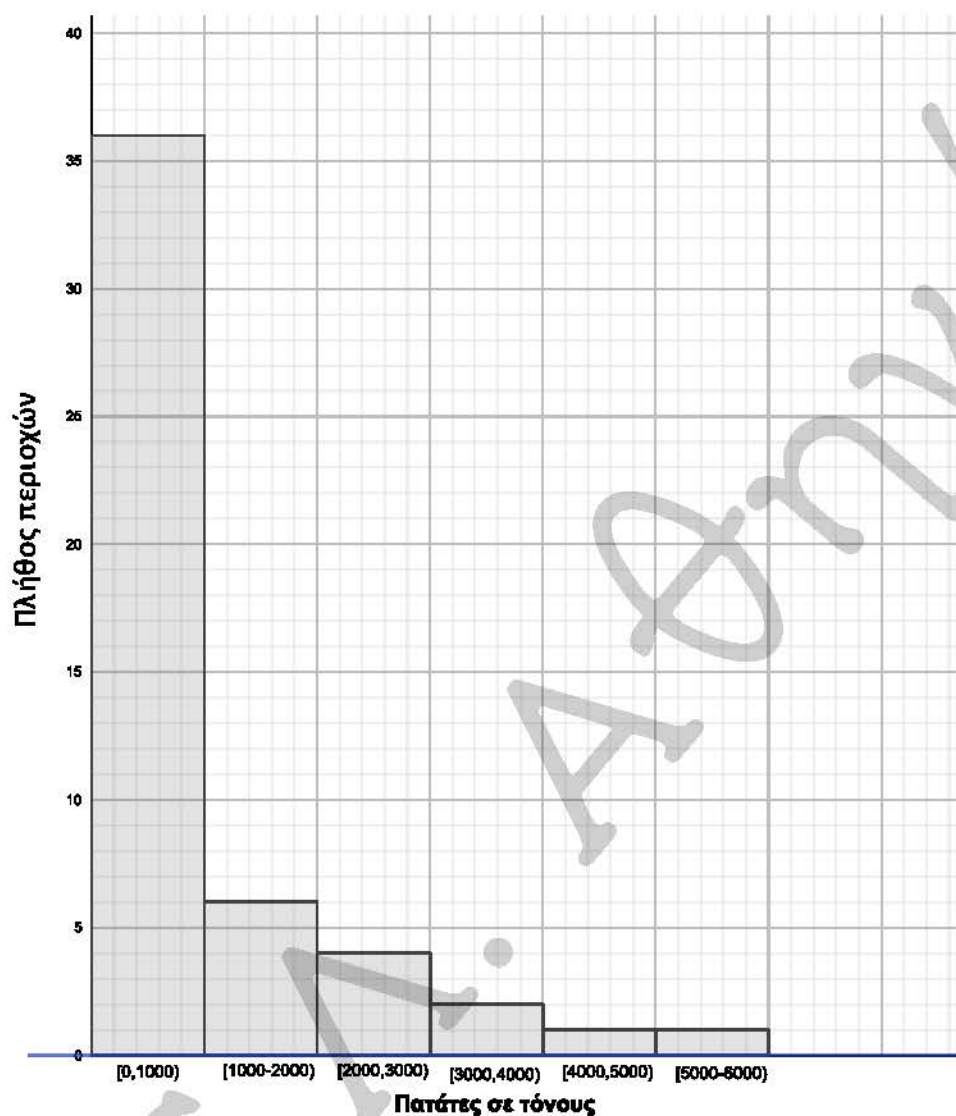
α)



Μετρώντας τις τελείες στο παραπάνω διάγραμμα διασποράς στα διαστήματα $[0,1000)$, $[1000,2000)$, $[2000,3000)$, $[3000,4000)$, $[4000,5000)$, $[5000,6000)$ συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα. Στις 2 τελευταίες κλάσεις έχουμε συχνότητα 1, στην κλάση $[3000,4000)$ 2, στην κλάση $[2000,3000)$ 4, στην κλάση $[1000,2000)$ 6. Για να βρούμε τη συχνότητα της 1^{ης} κλάσης αφαιρούμε από το πλήθος 50 το άθροισμα των προηγούμενων συχνοτήτων, οπότε βρίσκουμε 36.

Κλάσεις με παραγωγή σε τόνους	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα % $f_i\%$
$[0,1000)$	36	0,72	72
$[1000,2000)$	6	0,12	12
$[2000,3000)$	4	0,08	8
$[3000,4000)$	2	0,04	4
$[4000,5000)$	1	0,02	2
$[5000,6000)$	1	0,02	2
Σύνολο	50	1	100

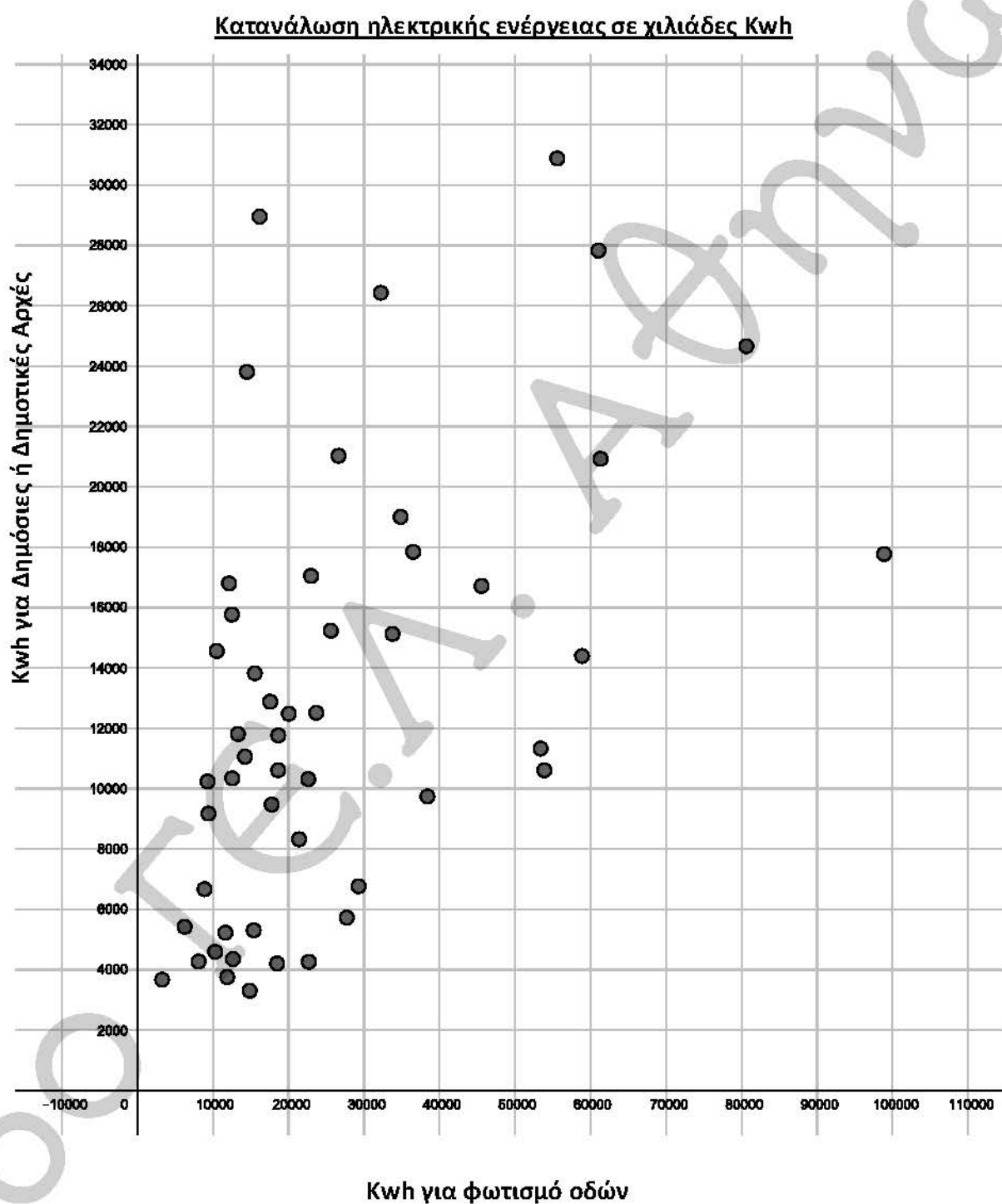
β) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων



γ) Ο συντελεστής συσχέτισης θα είναι θετικός. Γιατί παρατηρούμε ότι, όταν οι τιμές της μεταβλητής X αυξάνονται, τότε οι τιμές της Y τείνουν να αυξάνονται. Δηλαδή σχετικά μεγαλύτερες παραγωγές αντιστοιχούν σε σχετικά μεγαλύτερες εκτάσεις και σχετικά μικρότερες παραγωγές αντιστοιχούν σε σχετικά μικρότερες εκτάσεις.

ΘΕΜΑ 2

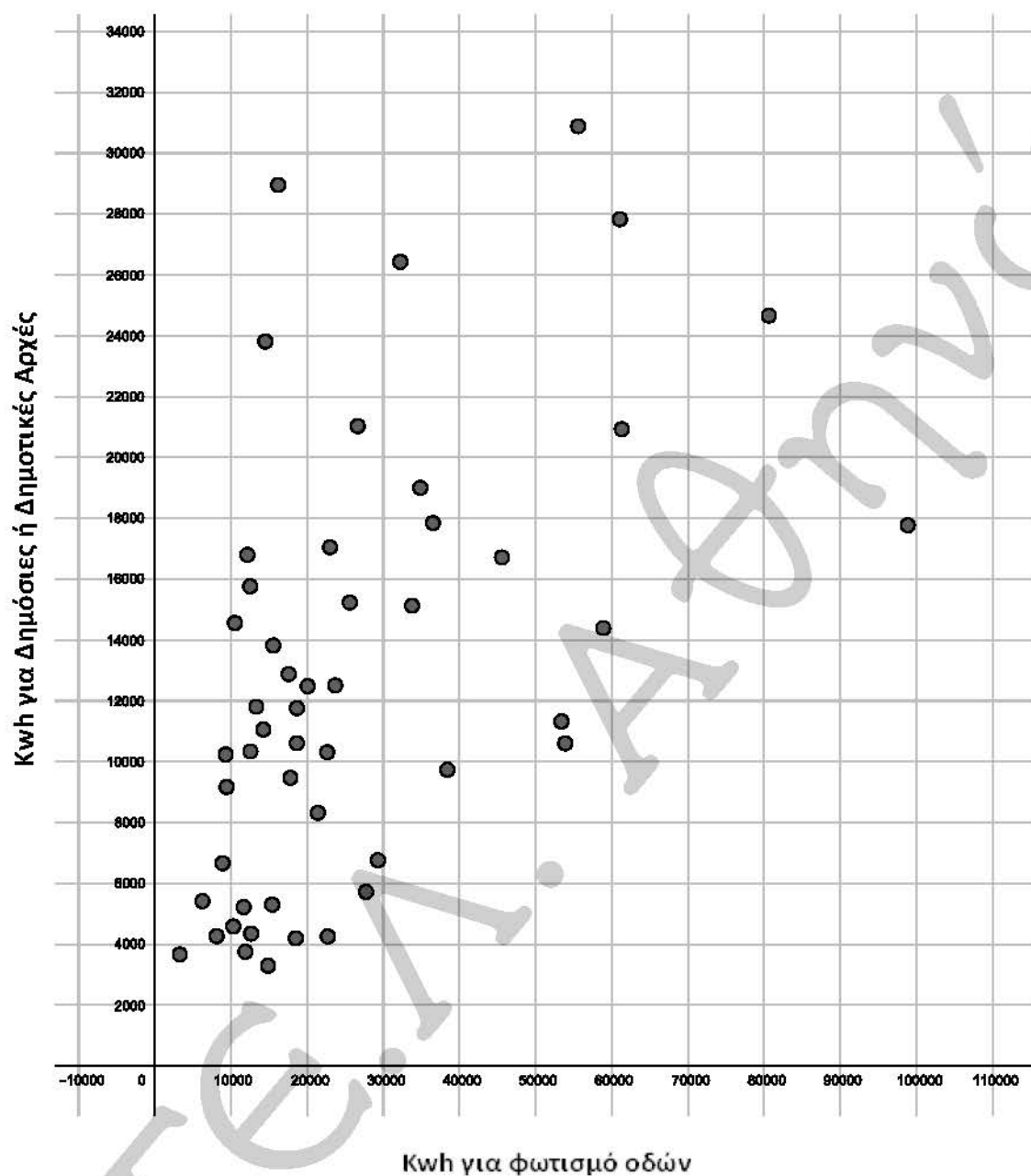
Στο παρακάτω διάγραμμα διασποράς παρουσιάζεται η κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας X για το φωτισμό των οδών στους 50 νομούς της Ελλάδας (εκτός του νομού Αττικής και Θεσσαλονίκης), σε σχέση με την κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας Y για τις Δημόσιες ή Δημοτικές Αρχές.



α) Να ομαδοποιήσετε την κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας Y που απαιτείται για τη χρήση σε Δημόσιες ή Δημοτικές Αρχές σε κλάσεις πλάτους 4000, ξεκινώντας από την κλάση $[2000,6000)$ και να φτιάξετε τον πίνακα συχνοτήτων f_i και σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$. (Μονάδες 15)

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων για την μεταβλητή Y . (Μονάδες 10)

α)



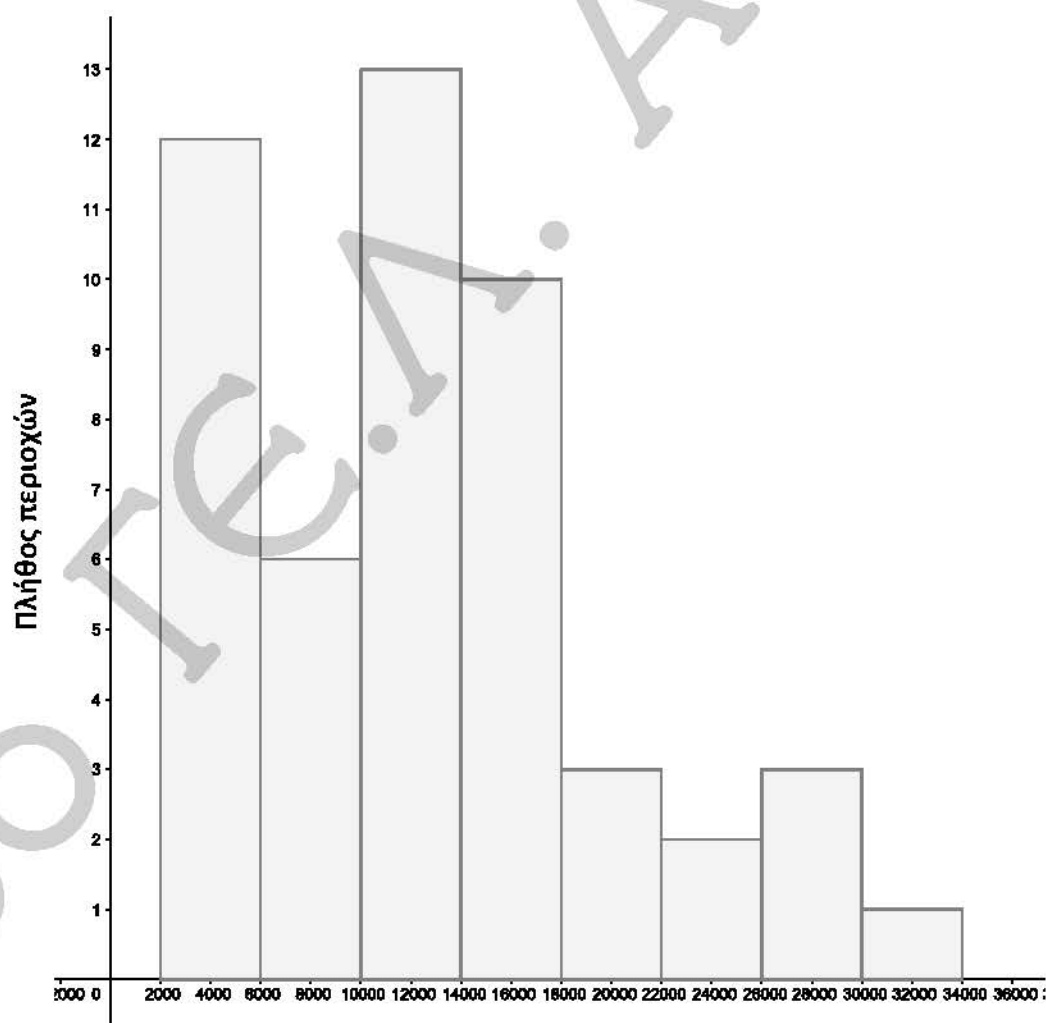
Μετρώντας τις τελείες στο παραπάνω διάγραμμα διασποράς στα διαστήματα $[2000,6000)$, $[6000,10000)$, $[10000,14000)$, $[14000,18000)$, $[18000,22000)$, $[22000,26000)$, $[26000,30000)$ και $[30000,34000)$ συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα.

Στις 3 τελευταίες κλάσεις έχουμε αντίστοιχη συχνότητα 1,3 και 2. Στην κλάση $[18000,22000)$ η συχνότητα είναι 3, στην κλάση $[14000,18000)$ είναι 10, στην κλάση $[10000,14000)$ είναι 13, στην κλάση $[6000,10000)$ είναι 6 και στην 1^η κλάση είναι 12.

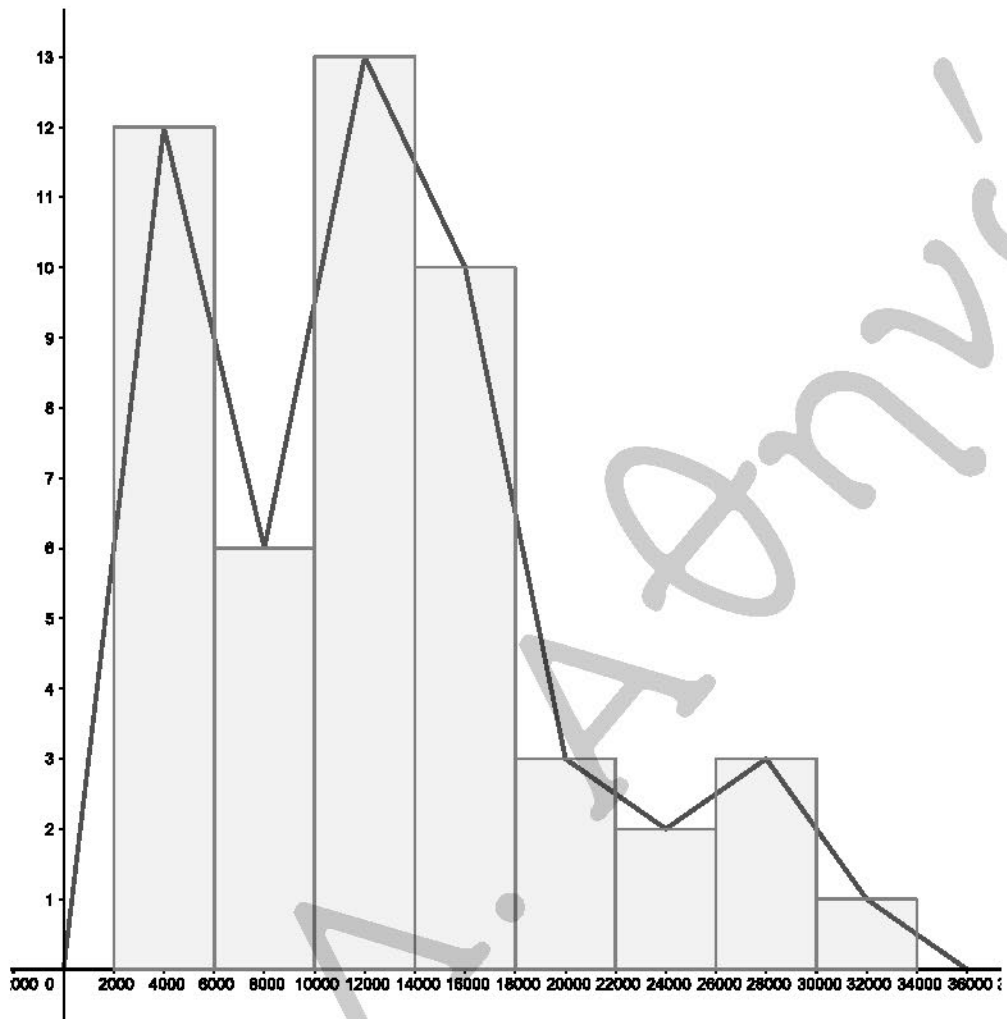
Συμπληρώνουμε τον πίνακα συχνοτήτων, όπως παρακάτω:

Κwh για Δημόσιες ή Δημοτικές Αρχές	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα % $f_i\%$
[2000, 6000)	12	0,24	24
[6000, 10000)	6	0,12	12
[10000, 14000)	13	0,26	26
[14000, 18000)	10	0,20	20
[18000, 22000)	3	0,06	6
[22000, 26000)	2	0,04	4
[26000, 30000)	3	0,06	6
[30000, 34000)	1	0,02	2
Σύνολο	50	1	100

β) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων



Κwh για φωτισμό οδών



ΘΕΜΑ 4

Ένας γεωπόνος, κατά την καλλιέργεια ενός είδους ντομάτας σε ένα συγκεκριμένο τύπο εδάφους, χρησιμοποίησε διαφορετικές ποσότητες ενός λιπάσματος (σε γραμμάρια ανά φυτό). Κατά τη συγκομιδή κατέγραψε τα αντίστοιχα βάρη των καρπών της ντομάτας (σε γραμμάρια) τα οποία δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

λίπασμα (γρ.)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
ντομάτα (γρ.)	110	150	150	160	180	230	230	245	245	250

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς μεταξύ της ποσότητας λιπάσματος ανά φυτό και του βάρους της ντομάτας. (Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε την ευθεία που νομίζετε ότι προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα. (Μονάδες 7)

γ) Να εκτιμήσετε την ποσότητα λιπάσματος ανά φυτό που απαιτείται, για την παραγωγή ντομάτας με αναμενόμενο βάρος 200 γραμμάρια. (Μονάδες 6)

δ) Εξηγήστε γιατί η ευθεία του ερωτήματος (β) δεν πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του αναμενόμενου βάρους ντομάτας, στην οποία θα χρησιμοποιηθεί 70 γραμμάρια λίπασμα. (Μονάδες 4)

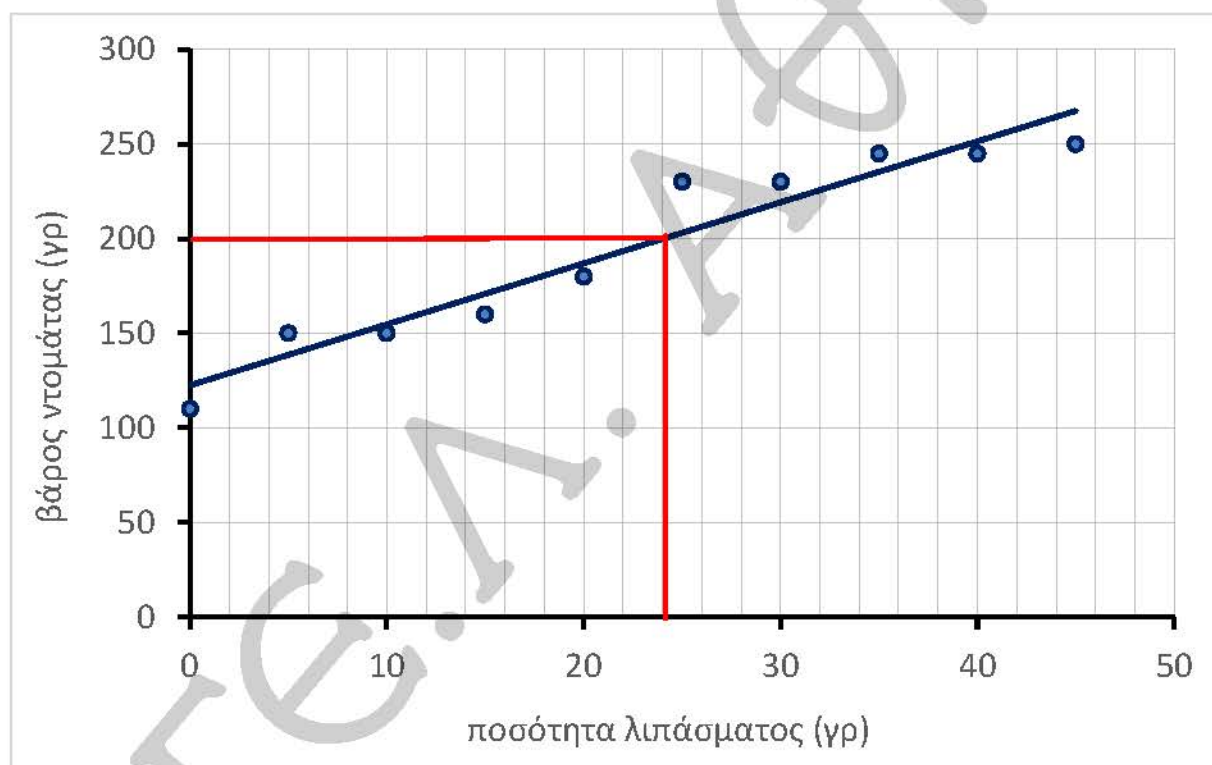
ΛΥΣΗ

α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

β) Επιλέγουμε την ευθεία στο παρακάτω σχήμα, που φαίνεται να είναι πιο κοντά στα σημεία των δεδομένων.

γ) Από το διάγραμμα διασποράς και την ευθεία που σχεδιάσαμε, εκτιμούμε ότι για την παραγωγή ντομάτας με αναμενόμενο βάρος 200 γραμμάρια, η ποσότητα λιπάσματος που απαιτείται, είναι 24 γραμμάρια.

δ) Η τιμή 70 της μεταβλητής ποσότητα λιπάσματος δεν οδηγεί σε ασφαλή συμπεράσματα αφού βρίσκεται έξω από το πεδίο των δεδομένων που έχουμε στη διάθεσή μας, που είναι από 0 έως 45. Άρα δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε το αναμενόμενο βάρος ντομάτας στην οποία θα χρησιμοποιηθεί 70 γραμμάρια λίπασμα.



ΘΕΜΑ 4

Στον παρακάτω πίνακα η μεταβλητή Y , παριστάνει την πρωινή συστολική αρτηριακή πίεση (σε mmHg) ενός ατόμου και η μεταβλητή X , παριστάνει την αντίστοιχη εσωτερική θερμοκρασία του περιβάλλοντος (σε $^{\circ}\text{C}$).

Θερμοκρασία X	5	8	10	12	15	16	17	20	22	23
Συστολική Πίεση Y	127	135	125	130	118	132	125	131	132	123

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς των μεταβλητών X και Y . (Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε την ευθεία που νομίζετε ότι προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται ότι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των X και Y είναι $r = -0,1$.

i. Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των X και Y . (Μονάδες 5)

ii. Να ερμηνεύσετε τη συσχέτιση της συστολικής αρτηριακής πίεσης με την αντίστοιχη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

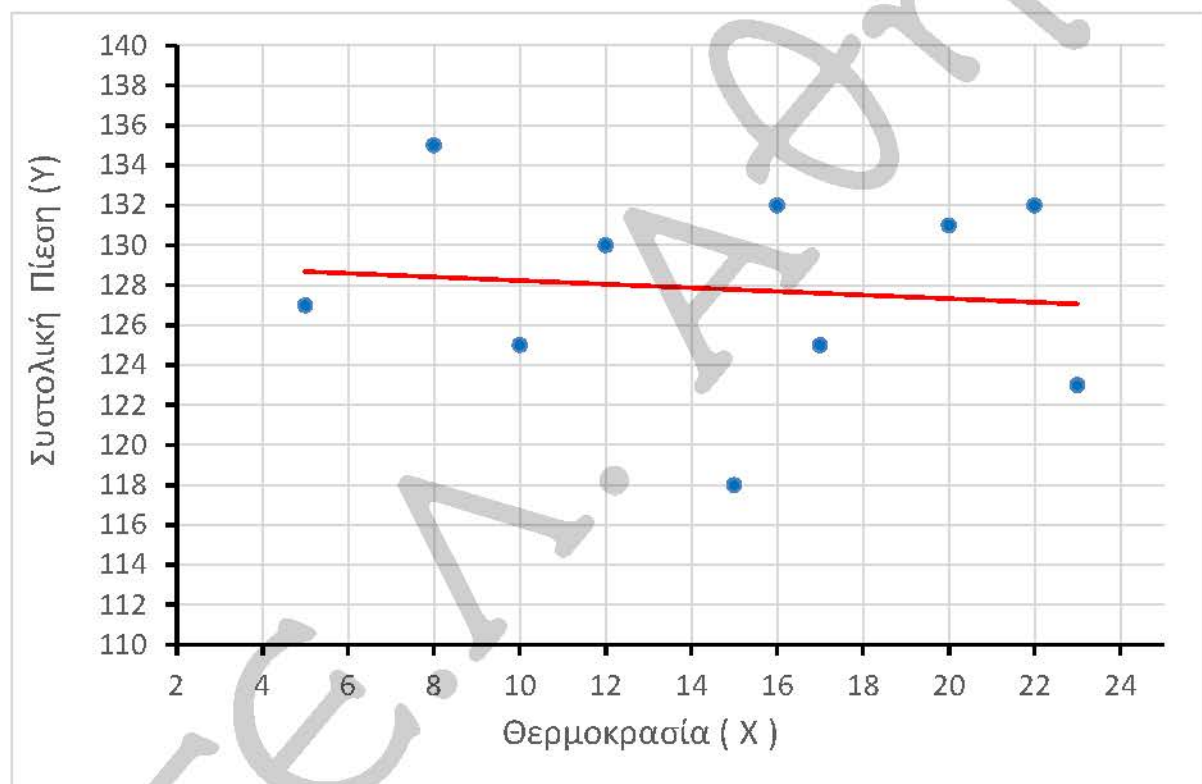
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

β) Επιλέγουμε την ευθεία που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η ευθεία αυτή φαίνεται ότι προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.

γ)

i. Επειδή ο συντελεστής συσχέτισης των μεταβλητών X και Y είναι $r = -0,1 < 0$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει αρνητική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών X και Y .

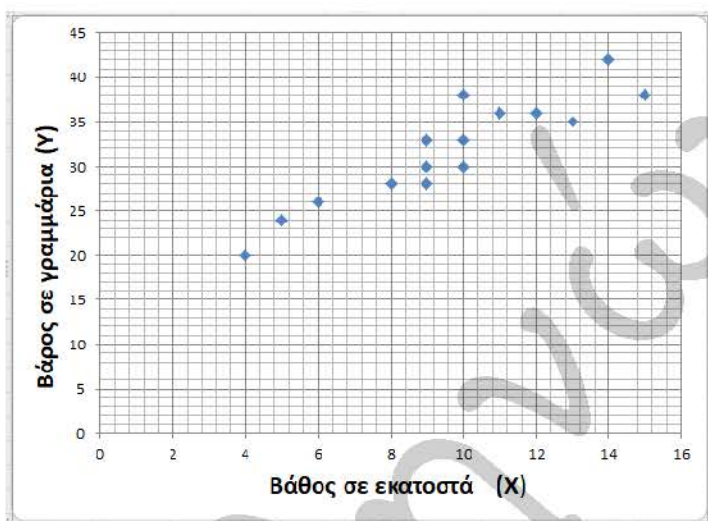
ii. Αν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος αυξάνεται, τότε αναμένεται να μειώνεται η συστολική αρτηριακή πίεση. Η αρτηριακή πίεση είναι γενικά υψηλότερη το χειμώνα και χαμηλότερη το καλοκαίρι.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το διπλανό διάγραμμα διασποράς δύο ποσοτικών μεταβλητών X και Y .

Η μεταβλητή X παριστάνει το βάθος μέσα στην άμμο σε εκατοστά στο οποίο αλιεύθηκε ένα μύδι, και η μεταβλητή Y παριστάνει το βάρος σε γραμμάρια του μυδιού.



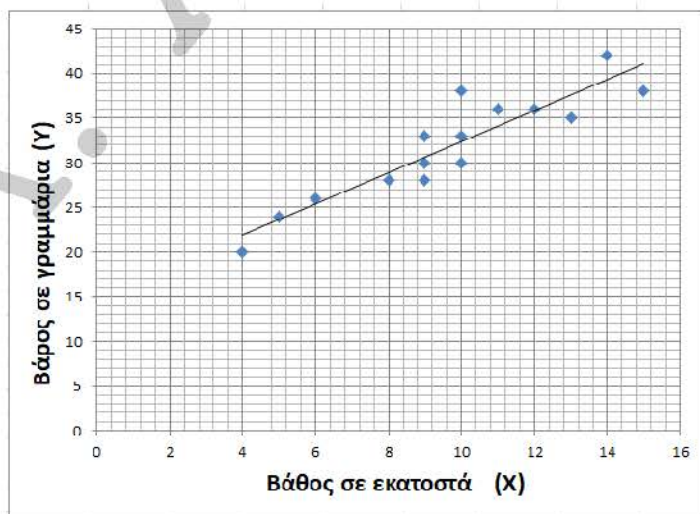
α) Με βάση το παραπάνω διάγραμμα να επιλέξετε ποιος μπορεί να είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των μεταβλητών X και Y από αυτούς που δίνονται παρακάτω.

- i. $r_1 = -1$ ii. $r_2 = -0,7$ iii. $r_3 = 0,9$ iv. $r_4 = 1$.

Να δικαιολογήσετε λεκτικά την απάντησή σας.

(Μονάδες 11)

β) Ένας μαθητής σχεδίασε την διπλανή ευθεία προσαρμοσμένη στα δεδομένα «με το μάτι». Με βάση αυτή την ευθεία να εκτιμήσετε:



- i. Ποιο είναι το αναμενόμενο βάρος του μυδιού σε βάθος 6 εκατοστά; (Μονάδες 7)

- ii. Σε τι βάθος προσδοκούμε να βρούμε ένα μύδι με αναμενόμενο βάρος 36 γραμμάρια;

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Οι μεταβλητές X και Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες, γιατί όσο οι τιμές της μεταβλητής X αυξάνονται, οι τιμές της μεταβλητής Y αυξάνονται και αυτές, οπότε σωστή απάντηση είναι μια από τις $r_3 = 0,9$ ή $r_4 = 1$. Οι παρατηρήσεις είναι αρκετά συγκεντρωμένες γύρω από την νοητή ευθεία, αλλά όχι πάνω σε αυτήν με συνέπεια σωστή απάντηση να είναι η $r_3 = 0,9$.

β)

- Από την τιμή 6 του άξονα βάθους X φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα X που τέμνει την ευθεία του μαθητή στο σημείο A . Από το A φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα Y , που τον τέμνει σε σημείο με τιμή βάρους 25. Έτσι το αναμενόμενο βάρος του μυδιού είναι 25 γραμμάρια.
- Από την τιμή 36 του άξονα βάρους Y φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα Y που τέμνει την ευθεία του μαθητή στο σημείο B . Από το B φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα X , που τον τέμνει σε σημείο με τιμή βάθους 12. Έτσι το αναμενόμενο βάθος θέσης του μυδιού είναι 12 εκατοστά.

