Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x + 2$ για κάθε x του πεδίου ορισμού A.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 2} f(x)$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο που περιέχει τις τιμές για τις οποίες ορίζεται το κλάσμα, δηλαδή $D_f = R - \{2\}$.

β) Το κλάσμα της συνάρτησης f απλοποιείται, δηλαδή $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$ για κάθε $x \epsilon R - \{2\}$.

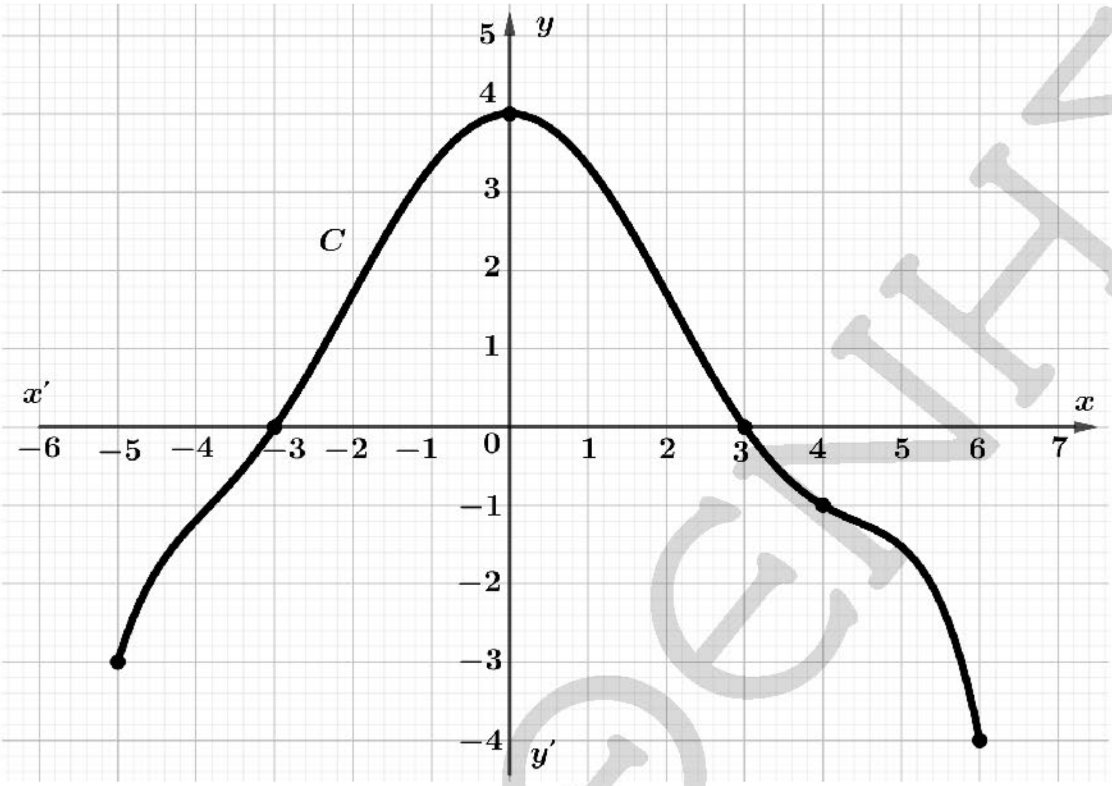
Άρα, $f(x) = x + 2$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 4$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης f.

Μελετώντας το σχήμα:



α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Για τη συνάρτηση f, να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της και να βρείτε το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστό της.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \to -3} f(x)$ και $\lim_{x \to 4} f(x)$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής της παράστασης. Επομένως: $A_f = [-5, 6]$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-5, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 6]$.

Άρα για $x = 0$, η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο (ολικό) ίσο με $f(0) = 4$.

Επίσης για $x = 6$, η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) ίσο με $f(6) = -4$.

γ) Από τη γραφική παράσταση που δόθηκε παρατηρούμε ότι:

Όταν x—> -3, το $f(x)$ —>0, δηλαδή $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ = 0.

Όταν x—> 4, το $f(x)$ —>-1, δηλαδή $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ = -1.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x-1)\cdot(x-2)}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq -1\ \kappa\alpha\iota\ x\neq 1$ οπότε πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο A = R - $\{-1,1\}$.

β) Είναι $x^2-1=(x-1)\cdot(x+1)$, ως διαφορά τετραγώνων.

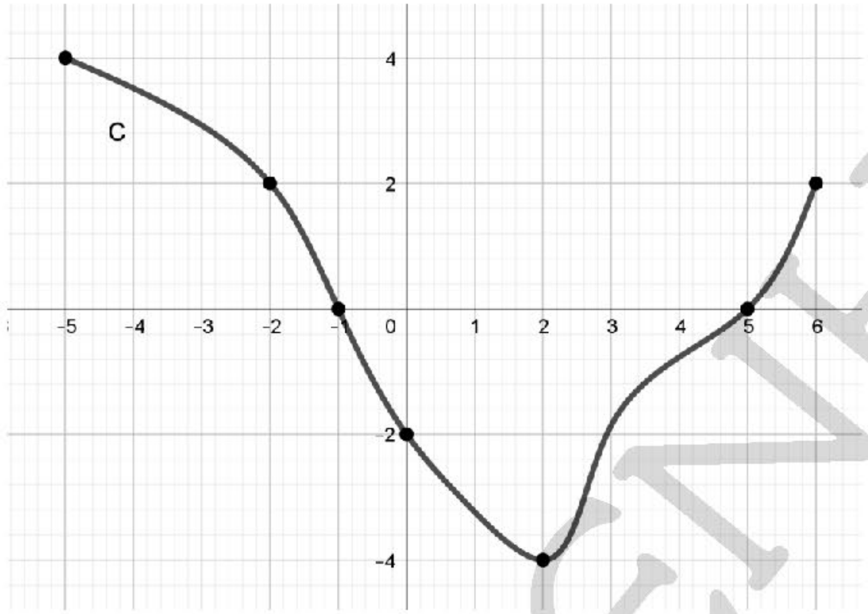
Για $x\in$ A = R - $\{-1,1\}$, ισχύει: $g(x)=\dfrac{(x-2)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\dfrac{x-2}{x+1}$.

γ) Λόγω του ερωτήματος (β) είναι: $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{1-2}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης f.

Μελετώντας το σχήμα:



α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Για τη συνάρτηση f, να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της και να βρείτε το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστό της.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x\to -2} f(x)$ και $\lim_{x\to 5} f(x)$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής της παράστασης. Επομένως: $A_f = [-5, 6]$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-5, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, 6]$.

Άρα για $x = -5$, η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο (ολικό) ίσο με $f(-5) = 4$.

Επίσης για $x = 2$, η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) ίσο με $f(2) = -4$.

γ) Από τη γραφική παράσταση που δόθηκε παρατηρούμε ότι:

Όταν x—> -2, το $f(x)$ —>2, δηλαδή $\lim_{x \to -2} f(x) = 2$.

Όταν x—> 5, το $f(x)$ —>0, δηλαδή $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$f(x)=x+1$$

(Μονάδες 09)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν

$$x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$$

Επομένως, έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο

$$A=(-\infty,1)\cup(1+\infty)$$

β) Για κάθε $x\in A$ είναι:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

γ) Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα (β) είναι:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-x}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = x - 1$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x \neq 0$.

Επομένως, έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in A$ είναι:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x} = \frac{x(x-1)}{x} = x - 1.$$

γ) Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα (β) προκύπτει:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -2.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2-2x}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = x - 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x \neq 0$.

Επομένως, έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in A$ είναι: $f(x) = \frac{x^2-2x}{x} = \frac{x(x-2)}{x} = x - 2$.

γ) Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα (β) προκύπτει:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x - 2) = -2$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-2}$ και $g(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι για $x \neq 2$ είναι: $f(x)-g(x)=x+1$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)-g(x)]$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Για τις δύο συναρτήσεις πρέπει το $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$, άρα το $A_f=A_g=\mathbb{R}-\{2\}$.

β) Για $x\neq 2$ είναι:

$$f(x)-g(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-2}-\frac{x+1}{x-2}=\frac{(x+1)(x-1)-(x+1)}{x-2}=\frac{(x+1)(x-2)}{x-2}=x+1.$$

γ) Λόγω του ερωτήματος (β) είναι:

$$\lim_{x\to 2}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to 2}(x+1)=3.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = f(0)+3f(2)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$, επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $A=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

β) Είναι: $\Pi=f(0)+3f(2)=\dfrac{2\cdot 0}{0-1}+3\cdot\dfrac{2\cdot 2}{2-1}=0+3\cdot 4=12$.

γ) Είναι: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2\cdot 2}{2-1}=\dfrac{4}{1}=4$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathrm{A}$ ισχύει:

$$f(x)=x-2$$

(Μονάδες 09)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν

$$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Επομένως, έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο

$$\mathrm{A}=(-\infty, 1) \cup(1,+\infty)$$

β) Η εξίσωση $x^2-3x+2=0$ έχει $\Delta=(-3)^2-4 \cdot 1 \cdot 2=9-8=1$ και ρίζες

$$x_1=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2}=\frac{3-1}{2}=1 \text{ και } x_2=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2}=\frac{3+1}{2}=2$$

Επομένως το τριώνυμο γράφεται

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

Για κάθε $x \in \mathrm{A}$ είναι:

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$$

γ) Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα (β) είναι:

$$\lim_{x \to 1} f(x)=\lim_{x \to 1}(x-2)=-1$$