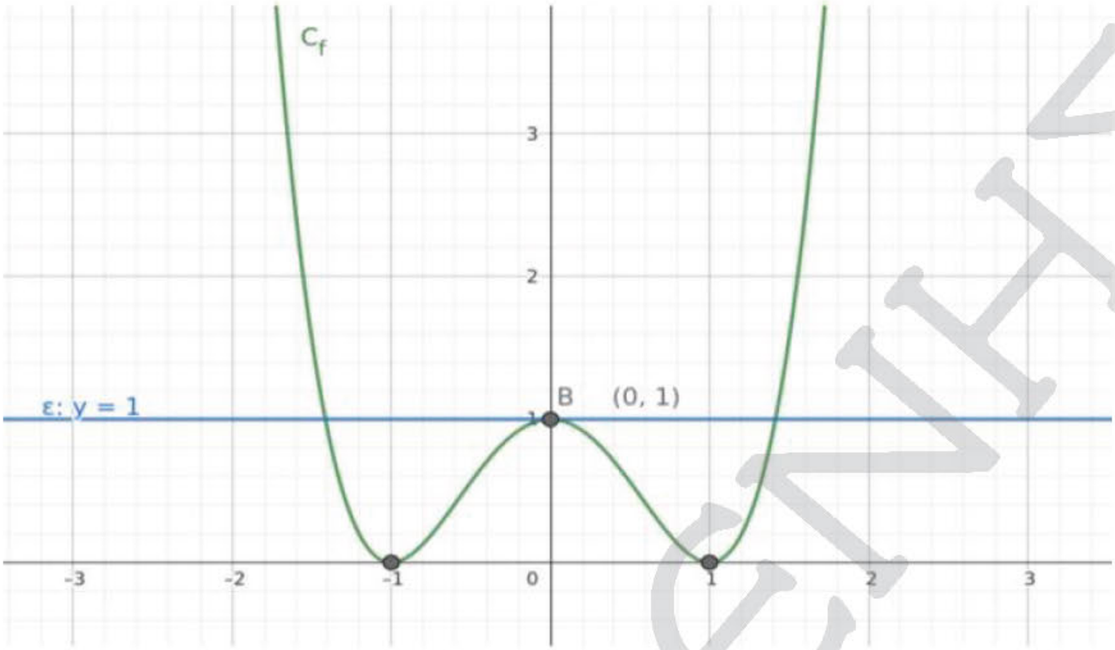
Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$.



α) Να βρείτε, με βάση το παραπάνω σχήμα, τη μονοτονία της συνάρτησης σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$.

(Μονάδες 10)

β) Αν η ευθεία $(\varepsilon){:}\, y = 1$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Β(0,1), τότε:

i) Να βρείτε την $f(0)$ και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x'x.

(Μονάδες 10)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί $f'(0) = 0$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Ισχύει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο [-1,0] και γνησίως φθίνουσα στο [0,1], όπως φαίνεται από το σχήμα.

β) i) Εφόσον το Β(0,1) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f θα ισχύει ότι $f(0) = 1$.

Η (ε) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, οπότε η γωνία που σχηματίζει με αυτόν είναι 0 μοίρες.

ii) Εφόσον η (ε): y=1 είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Β(0,1), η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι 0 μοίρες και η κλίση της (ε) είναι εφ0=0 και ίση με την $f'(0)$,οπότε $f'(0) = 0$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sqrt{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $f'(4)$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο που περιέχει τις τιμές για τις οποίες ορίζεται η ρίζα, δηλαδή $x \geq 0$. Συνεπώς $D_f = [0, +\infty)$.

β) Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης.

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ως άθροισμα δύο συναρτήσεων:

$f'(x) = (2x)' + \left(\sqrt{x}\right)' = 2(x)' + \left(\sqrt{x}\right)'$.

Άρα, $f'(x) = 2 \cdot 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε $f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Στην παραπάνω συνάρτηση $f'(x)$ βάζουμε όπου x το 4.

Άρα έχουμε $f'(4) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}}$=2+$\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 4x,\ x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,1)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 4$.

(Μονάδες 07)

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = 4x - 3$.

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (2x^2 - 1)' = (2x^2)' - (1)' = 2 \cdot 2x - 0 = 4x$$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,1)$ είναι ίσος με

$$\lambda = f'(1) = 4 \cdot 1 = 4$$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,1)$ είναι:

$$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = 4x + \beta$$

Επειδή το σημείο $A(1,1)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε:

$$1 = 4 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y = 4x - 3$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 2x,\ x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 2x - 2,\ x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, -1)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 0$.

(Μονάδες 07)

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = -1$.

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = (x^2 - 2x)' = (x^2)' - (2x)' = 2x - 2 \cdot 1 = 2x - 2$$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, -1)$ είναι ίσος με:

$$\lambda = f'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_o = 1$ είναι:

$$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = \beta$$

Επειδή το σημείο $A(1, -1)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε:

$$-1 = \beta$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y = -1$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $f'(2)$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο που περιέχει τις τιμές για τις οποίες ορίζεται το κλάσμα, δηλαδή για $x \neq 0$. Συνεπώς $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης.

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ως άθροισμα δύο συναρτήσεων:

$f'(x) = (3)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 0 - (-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2}$. Άρα, $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R} - \{0\}$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε $f'(x) = \frac{1}{x^2}$

Στη παραπάνω παράγωγο βάζουμε όπου x το 2. Άρα έχουμε $f'(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-2x^3+x^2-4$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι $f'(x)=-6x^2+2x$.

(Μονάδες 8)

Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{A}(-1,-1)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda=-8$.

(Μονάδες 7)

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y=-8x-9$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $f'(x)=\left(-2x^3+x^2-4\right)'=\left(-2x^3\right)'+\left(x^2\right)'-(4)'=-6x^2+2x$ με $x\in\mathbb{R}$.

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{A}(-1,-1)$ είναι ίσος με:

$\lambda=f'(-1)\overset{\alpha)i}{=}-6(-1)^2+2(-1)=-6-2=-8$.

γ) Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=-1$ είναι:

$y=\lambda x+\beta\overset{\beta)}{\Leftrightarrow}y=-8x+\beta$

Επειδή το σημείο $\mathrm{A}(-1,-1)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε:

$-1=-8(-1)+\beta\Leftrightarrow\beta=-9$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y=-8x-9$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\frac{1}{3}\mathrm{x}^3-2023,\ \ \mathrm{x}\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $\mathrm{f}'(\mathrm{x})=\mathrm{x}^2,\ \ \mathrm{x}\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το $\mathrm{f}'(-1)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{f}'(-1)+\mathrm{f}'(1)=2$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ως άθροισμα δύο συναρτήσεων:

$$\mathbf{f}'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2023\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - (2023)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 = x^2.$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε $\mathbf{f}'(x) = x^2$. Άρα, για x=-1 έχουμε $\mathbf{f}'(-1) = (-1)^2 = 1$.

γ) Ομοίως για x=1 προκύπτει $\mathbf{f}'(1) = 1^2 = 1$, άρα: $\mathbf{f}'(-1) + \mathbf{f}'(1) = 1 + 1 = 2$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = -3 \cdot \frac{1}{\mathrm{x}}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{3}{\mathrm{x}^2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το $\mathrm{f}'(-3)$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x \neq 0$. Επομένως, έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο

$A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in A$ είναι:

$$f'(x) = \left(-3 \cdot \frac{1}{x}\right)' = -3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -3\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{x^2}.$$

γ) Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα (β) έχουμε $f'(x) = \frac{3}{x^2}$.

Άρα, για x=-3 έχουμε $f'(-3) = \frac{3}{(-3)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $f\,'(-2)$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο που περιέχει τις τιμές για τις οποίες ορίζεται το κλάσμα, δηλαδή για $x \neq 0$. Συνεπώς $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης.

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ως άθροισμα δύο συναρτήσεων:

$$f'(x) = \left(4 \cdot \frac{1}{x}\right)' - (1)' = 4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' - 0 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{4}{x^2}.$$

Άρα, $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

Άρα, για x=-2 έχουμε: $f'(-2) = -\frac{4}{(-2)^2} = -\frac{4}{4} = -1$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $f\,'(-2) + f\,(2)$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο που περιέχει τις τιμές για τις οποίες ορίζεται το κλάσμα, δηλαδή για $x \neq 0$. Συνεπώς $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης.

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ως άθροισμα δύο συναρτήσεων:

$$f\,'(x) = \left(2 \cdot \frac{1}{x}\right)' - (1)' = 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' - 0 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}.$$

Άρα, $f\,'(x) = -\frac{2}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε $f\,'(x) = -\frac{2}{x^2}$.

Άρα, για x=-2 έχουμε $f\,'(-2) = -\frac{2}{(-2)^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. Επίσης, για x=2 έχουμε

$f(2) = \frac{2}{2} - 1 = 1 - 1 = 0.$

Άρα: $f\,'(-2) + f\,(2) = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $f'(9)$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο που περιέχει τις τιμές για τις οποίες ορίζεται η ρίζα, δηλαδή για $\mathrm{x} \geq 0$. Συνεπώς $\mathrm{D_f} = [0, +\infty)$.

β) Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης.

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ως άθροισμα δύο συναρτήσεων:

$\mathbf{f}\,'(\mathrm{x}) = \left(\sqrt{x}\right)' - (1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Άρα, $\mathbf{f}\,'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $\mathrm{x} > 0$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε $\mathbf{f}\,'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Άρα, για x=9 έχουμε $\mathbf{f}\,'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + 1$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-1, \frac{2}{3})$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 1$.

(Μονάδες 07)

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = x + \frac{5}{3}$.

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης

$f'(x) = \left(\frac{1}{3} \cdot x^3 + 1\right)' = \frac{1}{3} \cdot (x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$

Άρα, $f'(x) = x^2$ για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$.

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-1, \frac{2}{3})$ είναι ίσος με:

$$\lambda = f'(-1) = (-1)^2 = 1.$$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_o = -1$ είναι:

$$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = 1 \cdot x + \beta \Leftrightarrow y = x + \beta.$$

Επειδή το σημείο $A(-1, \frac{2}{3})$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε:

$$\frac{2}{3} = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = x + \frac{5}{3}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5 \cdot \frac{1}{x}$ με $x \epsilon \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

(Μονάδες 09)

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,5)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = -5$.

(Μονάδες 07)

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = -5x + 10$.

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της δοσμένης συνάρτησης $f(x) = 5 \cdot \frac{1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$f'(x) = \left(5 \cdot \frac{1}{x}\right)' = (5x^{-1})' = 5 \cdot (x^{-1})' = 5 \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{5}{x^2}$.

Άρα, $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,5)$ είναι ίσος με:

$$\lambda = f'(1) = -\frac{5}{1^2} = -5.$$

Επομένως, $\lambda = -5$.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_o = 1$ είναι:

$$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = -5 \cdot x + \beta.$$

Επειδή το σημείο $A(1,5)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε:

$$5 = -5 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 5 + 5 = 10.$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = -5x + 10$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την $f''(x)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = f(0) + f'(0) + f''(0)$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Για $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με:

$f'(x) = (x^2 - 3x + 4)' = 2x - 3$.

β) Για $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με:

$f''(x) = (2x - 3)' = 2$.

γ) Είναι: $\Pi = f(0) + f'(0) + f''(0) = (0^2 - 3 \cdot 0 + 4) + (2 \cdot 0 - 3) + 2 = 4 - 3 + 2 = 3$.

.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-7x$ με $x\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(2,-6)$, τότε:

α) να δείξετε ότι $f'(x)=4x-7$.

(Μονάδες 7)

β) να δείξετε ότι $\lambda=1$.

(Μονάδες 9)

γ) να δείξετε ότι $\beta=-8$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (2x^2 - 7x)' = 4x - 7$.

β) Η ευθεία $\varepsilon : y = \lambda x + \beta$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(2, -6)$, οπότε $\lambda = f'(2) = 4 \cdot 2 - 7 = 1$.

γ) Λόγω του ερωτήματος (β) η ε γράφεται $\varepsilon : y = x + \beta$.

Επειδή το σημείο $(2, -6)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε:

$-6 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -8$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}+2$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

β) Την παράγωγο f' της συνάρτησης.

(Μονάδες 9)

γ) Την τιμή $f'(2)$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Πρέπει $x \neq 0$. Επομένως $\mathrm{A} = \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Έχουμε $f'(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)' = \left(-x^{-1}\right)' + (2)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

γ) Έχουμε $f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

(Μονάδες 7)

γ) Ο Γιάννης υπολόγισε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη x_0=1 και βρήκε ότι σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 135 μοιρών και επίσης ότι δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Συμφωνείτε με τον Γιάννη; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2x+1-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x^2-3x+2)}{x-1}$.

Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει ρίζες x_1 =1 και x_2 =2 και παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο $\alpha x^2-\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$, $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}x(x-2)=1(-1)=-1$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$$f'(x)=(x^3-3x^2+2x+1)'=3x^2-6x+2.$$

Άρα, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$είναι:

$$f'(1)=3\cdot 1-6\cdot 1+2=-1.$$

γ) Ο Γιάννης έχει δίκαιο.

Γνωρίζουμε πως η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της, με τετμημένη $x_0=1$, με τον άξονα x ΄x ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της, δηλαδή,

$\varepsilon\varphi\omega=f'(1)=-1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow\omega=\frac{3\pi}{4}$, αφού $0\leq\omega<\pi$. Άρα η ω=135 μοίρες.

Επίσης, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$, δίνεται από τον τύπο $y=f'(1)x+\beta$.

Επίσης, το σημείο (1,f(1)), με f(1)=1-3$\cdot 1+2\cdot 1+1=1$, είναι το (1,1).

Με αντικατάσταση στην εξίσωση $y=f'(1)x+\beta$, έχουμε 1=(-1)$\cdot$ 1+β, δηλαδή β=2.

Άρα, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$ είναι η $y=-x+2$.

Το σημείο (0,0) δεν επαληθεύει την εξίσωση, γιατί για $x=0$ έχουμε $y=2$. Άρα, δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x)=ax^2-2x$, $x\in[0,+\infty)$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός.

α) Αν ισχύει $f'(1)=0$ να αποδείξετε ότι $a=1$.

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{2}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

(Μονάδες 03)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $g(x)=0$.

(Μονάδες 03)

γ) Για $a=1$

I) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f}{g}(x)$.

(Μονάδες 05)

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$.

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f'(x)=(ax^2-2x)'=2ax-2$.

Επομένως έχουμε $f'(1)=0 \Leftrightarrow 2a\cdot 1-2=0 \Leftrightarrow 2a=2 \Leftrightarrow a=1$.

β)

i) Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει να ισχύει $x\geq 0$. Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $[0,+\infty)$.

ii) Έχουμε $g(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{2} \Leftrightarrow x=2$.

γ) Για α=1 έχουμε

i) $h(x)=\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$, $x\in[0,2)\cup(2,+\infty)$.

ii)
$$\lim_{x\to 2}h(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to x}\frac{x(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{x-2}=$$
$$\lim_{x\to 2}\left[x(\sqrt{x}+\sqrt{2})\right]=2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}, x\in\mathbb{R}-\{2\}$.

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι $f'(x)=-\dfrac{3}{(x-2)^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $\mathrm{A}(3,4)$.

(Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(1,10)$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν η εφαπτομένη (η) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\Gamma(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση $y=f'(x_0)x$, να βρείτε το x_0.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Έχουμε

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'=\frac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2}=-\frac{3}{(x-2)^2},x\in\mathbb{R}-\{2\}$$

.

β)

i. Είναι $f'(3)=-3$ οπότε $(\varepsilon): y=f'(3)x+\beta \Leftrightarrow y=-3x+\beta$. Ακόμα η (ε) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(3,4)$, άρα $4=-3\cdot 3+\beta \Leftrightarrow \beta=13$. Τελικά (ε): $y=-3x+13$.

ii. Οι συντεταγμένες του $\mathrm{B}(1,10)$ επαληθεύουν την εξίσωση $y=-3x+13$,αφού $10=(-3)1+13$, επομένως η (ε) διέρχεται από το σημείο B.

γ) Για το τυχαίο σημείο $\Gamma(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εξίσωση της εφαπτομένης (η) είναι $y=f'(x_0)x$, η οποία λόγω του α) είναι $y=-\frac{3}{(x_0-2)^2}x$ (1). Η εφαπτομένη (η), επιπλέον, διέρχεται από το σημείο $\Gamma(x_0, f(x_0))$, άρα η (1) γίνεται

$$\frac{x_0+1}{x_0-2}=-\frac{3x_0}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow (x_0-2)(x_0+1)=-3x_0 \Leftrightarrow x_0^2+2x_0-2=0 \Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$f(x) = \frac{2}{x}, x \in \mathbb{R}^*$ και $g(x) = x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(2) = -\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε: $y = 2x - 3$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(2, g(2))$.

(Μονάδες 9)

γ)

i) Να δείξετε ότι το σημείο $(2, g(2))$ ανήκει και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 2)

ii) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο κοινό τους σημείο (2,1), είναι κάθετες μεταξύ τους. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Γιάννη; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (δίνεται ότι: δύο ευθείες ε_1, ε_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, είναι κάθετες μεταξύ τους εάν ισχύει: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$)

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση ως πηλίκο δύο συναρτήσεων:

$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \left(\frac{2}{x}\right)' = \frac{(2)'\cdot x - 2\cdot(x)'}{x^2} = \frac{0\cdot x - 2\cdot 1}{x^2} = \frac{-2}{x^2}$. Για x=2 έχουμε $\mathrm{f}'(2) = \frac{-2}{2^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

β) Η εφαπτομένη της καμπύλης της g στο σημείο της με x=2 έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $g'(2)$. Θα βρούμε αρχικά την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης g, η οποία είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση g και έχουμε: $g'(x) = (x^2 - 2x + 1)' = (x^2)' - (2x)' + (1)' = 2 \cdot x - 2$ και για x=2 γίνεται $g'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$y = 2 \cdot x + \beta$, επειδή όμως το σημείο $(2, g(2)) = (2, 1)$ αφού $\mathrm{g}(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$, ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε: $1 = 2 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 1 = 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$. Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = 2 \cdot x - 3$.

γ)

i) Γνωρίζουμε από το προηγούμενο ερώτημα β) ότι το σημείο $(2, g(2))$ είναι το $(2, 1)$. Για να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα πρέπει να ισχύει: $\mathrm{f}(2) = 1$. Πράγματι, $\mathrm{f}(2) = \frac{2}{2} = 1$.

ii) Από το γi) έχουμε δείξει ότι το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι το σημείο $(2, 1)$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f σε αυτό το σημείο έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $\mathrm{f}'(2)$ που από το α) έχουμε ότι είναι $\mathrm{f}'(2) = -\frac{1}{2}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g σε αυτό το σημείο γνωρίζουμε από το β) ότι είναι η $y = 2 \cdot x - 3$, άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο 2. Το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των δύο εφαπτομένων είναι ίσο με: $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, άρα είναι κάθετες μεταξύ τους.

Ο ισχυρισμός του Γιάννη είναι σωστός.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{a}{x}, \quad x>0.$

α) Να βρείτε τον αριθμό α, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο Α(**1**,4).

(Μονάδες 5)

Στη συνέχεια δίνεται ότι α=4.

β) i) Να υπολογίσετε τον $f'(1)$.

(Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(**1**,4).

(Μονάδες 7)

γ) i) Να βρείτε τα σημεία τομής Κ, Λ της (ε) με τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 3)

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (ε) με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

(Μονάδες 4)

Λύση

α) Εφόσον το σημείο Α(**1**,4) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα ισχύει ότι $f(1)=4 \Leftrightarrow \frac{a}{1}=4 \Leftrightarrow a=4$. Οπότε η συνάρτηση είναι $f(x)=\frac{4}{x}$.

β) i) Ισχύει ότι $f'(x)=\left(\frac{4}{x}\right)'=\frac{(4)'x-4(x)'}{x^2}=\frac{-4}{x^2}$.

Οπότε $f'(1)=\frac{-4}{1^2}=-4$.

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(**1**,4) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(1)=-4$.

Οπότε η εξίσωσή της θα είναι $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta=-4x+\beta$. Το σημείο Α(**1**,4) ανήκει στην (ε) οπότε θα ισχύει $4=-4\cdot 1+\beta$, οπότε $\beta=8$.

Συνεπώς, η εφαπτομένη είναι $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta=-4x+8$.

γ) i) Για το σημείο τομής Κ με τον άξονα $x'x$ ισχύει ότι $y=0$, οπότε έχουμε $0=-4x+8 \Leftrightarrow x=2$. Άρα $K(2,0)$.

Αντίστοιχα, για το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ ισχύει ότι $x=0$, οπότε έχουμε $y=-4\cdot 0+8=8$ άρα $\Lambda(0,8)$.

ii) Αν Ο η αρχή των αξόνων, τότε ισχύει ότι $E=\frac{1}{2}OK\cdot O\Lambda=\frac{1}{2}2\cdot 8=8$.