Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^2+2x+4$ με $x\in R$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x)=-2x+2$ με $x\in R$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την $f'(5)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για $x>1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)' = -2x + 2$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α) είναι: $f'(5) = -2 \cdot 5 + 2 = -10 + 2 = -8$.

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της

για τα οποία η f' είναι αρνητική.

Επομένως $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 2 < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 2023,\ \ x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6,\ \ x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

β) Να υπολογίσετε το $f'(1)$.

(Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, για $x > 1$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (3x^2 - 6x + 2023)' = 3 \cdot 2x - 6 \cdot 1 + 0 = 6x - 6$$

β) Είναι:

$$f'(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 6 - 6 = 0$$

γ) Για κάθε $x > 1$ είναι:

$$x > 1 \Leftrightarrow 6x > 6 \Leftrightarrow 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta = (1, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε σημείο του Δ. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + 3x + 6,\ \ x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 3x^2 + 3,\ x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

β) Να υπολογίσετε το $f'(0)$.

(Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (x^3 + 3x + 6)' = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 3$$

β) Είναι:

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 3 = 0 + 3 = 3$$

γ) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$$

αφού $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-x^3$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης.

(Μονάδες 8)

Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{A}(1,0)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda=-3$

(Μονάδες 7)

γ) η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y=-3x+3$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Έχουμε $f'(x)=\left(1-x^3\right)'=(1)'-\left(x^3\right)'=0-3x^2=-3x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{A}(1,0)$ είναι ίσος με: $\lambda=f'(1)\overset{\alpha)}{=}-3\cdot 1^2=-3$.

γ) Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ είναι:

$$y=\lambda x+\beta \overset{\beta)}{\Leftrightarrow} y=-3x+\beta$$

Επειδή το σημείο $\mathrm{A}(1,0)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε:

$$0=-3\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=3$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y=-3x+3$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^2+2x+4$ με $x\in$ R.

α) Να δείξετε ότι $f'(x)=-2x+2$ με $x\in$ R.

(Μονάδες 7)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

(Μονάδες 10)

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\le 5$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in$ R η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)' = -2x + 2$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α) είναι: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Επίσης $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Έτσι, σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών για την f.

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
f'	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$
	O.M	

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

γ) Λόγω του πίνακα μεταβολών για την f, του ερωτήματος (β), η συνάρτηση f για $x = 1$ εμφανίζει ολικό μέγιστο ίσο με $f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = -1 + 2 + 4 = 5$. Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq 5$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 2023,\ \ x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6,\ \ x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 05)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2020$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (3x^2 - 6x + 2023)' = 3 \cdot 2x - 6 \cdot 1 + 0 = 6x - 6$$

β) Λύνουμε την εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Στη συνέχεια λύνουμε την ανίσωση

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

γ) Από τον πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$, το οποίο ισούται με $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2023 = 3 - 6 + 2023 = 2020$. Επομένως είναι:

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 2020 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ 3

Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τη συνάρτηση $x(t)=t^2-4t-1, t\geq 0$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα (s) και το $x(t)$ σε μέτρα (m).

α) Να βρείτε την ταχύτητα $\upsilon(t)$ του σημείου σε χρόνο t.

(Μονάδες 08)

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του υλικού σημείου τις χρονικές στιγμές $t_1=1$ s και $t_2=3$ s.

(Μονάδες 06)

γ) Σε ποια χρονική στιγμή το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο;

(Μονάδες 05)

δ) Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;

(Μονάδες 06)

ΛΥΣΗ

α) Η ταχύτητα $\upsilon(t)$ του σημείου σε χρόνο t είναι:

$$\upsilon(t) = x'(t) = (t^2 - 4t - 1)' = (t^2)' - (4t)' - (1)' = 2t - 4$$

β) Η ταχύτητα του σημείου τη χρονική στιγμή $t_1 = 1$ s είναι:

$$\upsilon(t_1) = \upsilon(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 \text{ m/s}$$

Η ταχύτητα του σημείου τη χρονική στιγμή $t_2 = 3$ s είναι:

$$\upsilon(t_2) = \upsilon(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 \text{ m/s}$$

γ) Το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο όταν $\upsilon(t) = 0$, δηλαδή όταν

$$2t - 4 = 0 \Leftrightarrow 2t = 4 \Leftrightarrow t = 2 \text{ s}$$

Επομένως, το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο τη χρονική στιγμή $t = 2$ s.

δ) Το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση όταν $\upsilon(t) > 0$, δηλαδή όταν

$$2t - 4 > 0 \Leftrightarrow 2t > 4 \Leftrightarrow t > 2$$

Άρα, το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση στο χρονικό διάστημα $t > 2$ (και στην αρνητική κατεύθυνση όταν $0 \leq t < 2$).

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-2x^2+x$, όπου $x\in\mathbb{R}$.

α)

i. Για $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $\mathrm{M}\left((2,f(2)\right)$.

(Μονάδες 5)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

Έχουμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-2x^2+x$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Για $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x)=(x^3-2x^2+x)'=3x^2-4x+1$.

ii. Λόγω του (α, i), ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο σημείο $\mathrm{M}\big((2,f(2)\big)$ είναι

$f'(2)=3\cdot 2^2-4\cdot 2+1=12-8+1=5$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α) η $f'(x)=3x^2-4x+1$, οπότε

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$ ή $x=1$.

Επίσης $f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{3}$ ή $x>1$. Έτσι:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$	

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,\frac{1}{3}]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{1}{3},1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Για $x=\dfrac{1}{3}$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με

$f(\frac{1}{3})=(\frac{1}{3})^3-2\cdot(\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}=\frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{1-6+9}{27}=\frac{4}{27}$ και για $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με $f(1)=1^3-2\cdot 1^2+1=0$.

γ) Τα ζητούμενα σημεία $\big(x,f(x)\big)$ είναι εκείνα για τα οποία ισχύει $f'(x)=0$.

Λόγω του ερωτήματος (β) είναι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$ ή $x=1$, οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι: $\left(\dfrac{1}{3},f(\dfrac{1}{3})\right)=(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{27})$ και $\big(1,f(1)\big)=(1,0)$.

ΘΕΜΑ 4

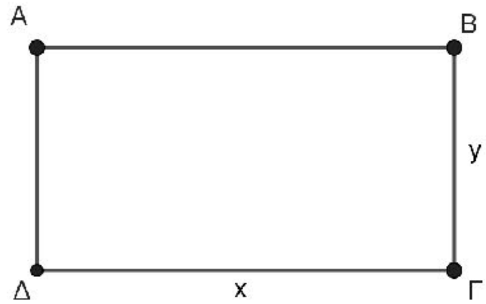
Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και εμβαδό 400 τετραγωνικά μέτρα (m^2) .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $\Pi(x)=2x+\dfrac{800}{x}$ με $x>0$. (Μονάδες 8)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\Pi(x)$ ως προς τη μονοτονία της. (Μονάδες 9)

γ) Για ποια τιμή του x η περίμετρος του οικοπέδου γίνεται ελάχιστη, και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της; (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ



α) Για το εμβαδό E του οικοπέδου έχουμε $\mathrm{E} = x \cdot y$ με $x, y > 0$.

Από τα δεδομένα είναι: $\mathrm{E} = 400 \Leftrightarrow x \cdot y = 400 \Leftrightarrow y = \dfrac{400}{x}$ (1) με $x > 0$.

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $\Pi = 2x + 2y \overset{(1)}{=} 2x + 2\dfrac{400}{x} = 2x + \dfrac{800}{x}$, δηλαδή

είναι $\Pi(x) = 2x + \dfrac{800}{x}$ με $x > 0$.

β) Για $x > 0$ η συνάρτηση Π είναι παραγωγίσιμη με $\Pi'(x) = \left(2x + \dfrac{800}{x}\right)' = 2 - \dfrac{800}{x^2}$

οπότε είναι: $\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \dfrac{800}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 800 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 400 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 20$.

Επίσης $\Pi'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 800 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 400 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > 20$, οπότε:

x	0		20		$+\infty$
Π'		$-$		$+$	
Π		↘	Ο.Ε	↗	

Επομένως η συνάρτηση $\Pi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 20]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[20, +\infty)$.

γ) Λόγω του ερωτήματος (β) η περίμετρος του ορθογωνίου οικοπέδου παίρνει την ελάχιστη τιμή για $x = 20$. Επίσης η ελάχιστη τιμή της περιμέτρου είναι:

$\Pi(20) = 2 \cdot 20 + \dfrac{800}{20} = 40 + 40 = 80$ μέτρα (m).

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\lambda x^2-x, x\in\mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ σταθερά.

α) Αν ισχύει $f'(1)=0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

Για $\lambda=-1$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-x$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3+\lambda x^2-x, x\in\mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ σταθερά.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=(x^3+\lambda x^2-x)'=3x^2+2\lambda x-1$

Ισχύει $f'(1)=0 \Leftrightarrow 3\cdot 1^2+2\lambda\cdot 1-1=0 \Leftrightarrow 3+2\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$.

Για $\lambda=-1$ η συνάρτηση f γράφεται: $f(x)=x^3-x^2-x$.

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=(x^3-x^2-x)'=3x^2-2x-1$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$ ή $x=1$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{3}$ ή $x>1$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$	

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-\dfrac{1}{3}]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-\dfrac{1}{3},1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Για $x=-\dfrac{1}{3}$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με

$f(-\dfrac{1}{3})=(-\dfrac{1}{3})^3-(-\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{-1-3+9}{27}=\dfrac{5}{27}$ και για $x=1$

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με $f(1)=1^3-1^2-1=-1$.

γ) Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y=-x$ είναι ίσος με -1, τα ζητούμενα σημεία $\left(x,f(x)\right)$ είναι εκείνα για τα οποία ισχύει

$f'(x)=-1 \Leftrightarrow 3x^2-2x-1=-1 \Leftrightarrow 3x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\dfrac{2}{3}$.

Για $x=0$ το $f(0)=0$

και για $x=\dfrac{2}{3}$ το $f(\dfrac{2}{3})=(\dfrac{2}{3})^3-(\dfrac{2}{3})^2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}-\dfrac{4}{9}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{8-12-18}{27}=-\dfrac{22}{27}$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(0,0)$ και $\left(\dfrac{2}{3},f(\dfrac{2}{3})\right)=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{22}{27}\right)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι: $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ με $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

(Μονάδες 10)

γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $\mathrm{M}\left(2, f(2)\right)$, είναι η ευθεία (ε): $y=-\dfrac{3}{25}x+\dfrac{16}{25}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Για $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x)'(x^2+1) - x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

β) Λόγω του ερωτήματος (α) η $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	ΤΜ	$\searrow$	

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Για $x = -1$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$

και για $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

γ) Είναι $f(2) = \dfrac{2}{5}$ οπότε το $\mathrm{M}(2, f(2)) = \left(2, \dfrac{2}{5}\right)$.

Λόγω του ερωτήματος (α) η $f'(2) = \dfrac{1-2^2}{(2^2+1)^2} = -\dfrac{3}{25}$.

Έστω (ε): $y = \lambda x + \beta$ με $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο M.

Είναι $\lambda = f'(2) = -\dfrac{3}{25}$, οπότε η (ε): $y = -\dfrac{3}{25}x + \beta$.

Επίσης το $\mathrm{M}\left(2, \dfrac{2}{5}\right) \in$ (ε) $\Leftrightarrow \dfrac{2}{5} = -\dfrac{3}{25}\cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = \dfrac{2}{5} + \dfrac{6}{25} = \dfrac{16}{25}$.

Επομένως (ε): $y = -\dfrac{3}{25}x + \dfrac{16}{25}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}, x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι

$$f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}, x\in\mathbb{R}$$

(Μονάδες 05)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης.

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+5}}(x^2+2x+5)' = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}$$
$$= \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

β) Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} > 0 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} < 0 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,+\infty)$.

γ) Αφού $f'(-1)=0$, $f'(x)<0$ στο $(-\infty,-1)$ και $f'(x)>0$ στο $(-1,+\infty)$, τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-1$. Επομένως, θα ισχύει:

$$f(x) \geq f(-1) \Leftrightarrow f(x) \geq \sqrt{(-1)^2+2\cdot(-1)+5} \Leftrightarrow f(x) \geq 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

δ) Τα ζητούμενα σημεία $(x, f(x))$ είναι εκείνα για τα οποία ισχύει $f'(x)=0$. Σύμφωνα με το ερώτημα (β), η λύση της εξίσωσης $f'(x)=0$ είναι $x=-1$. Άρα, στο σημείο $A\big(-1,f(-1)\big)=(-1,2)$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y = \lambda x + \beta \text{ , όπου } \lambda = f'(-1) = 0$$

Οπότε είναι:

$$y = \beta \Leftrightarrow y = 2$$

αφού οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν της εξίσωση της εφαπτομένης.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f, όπου f' είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$.

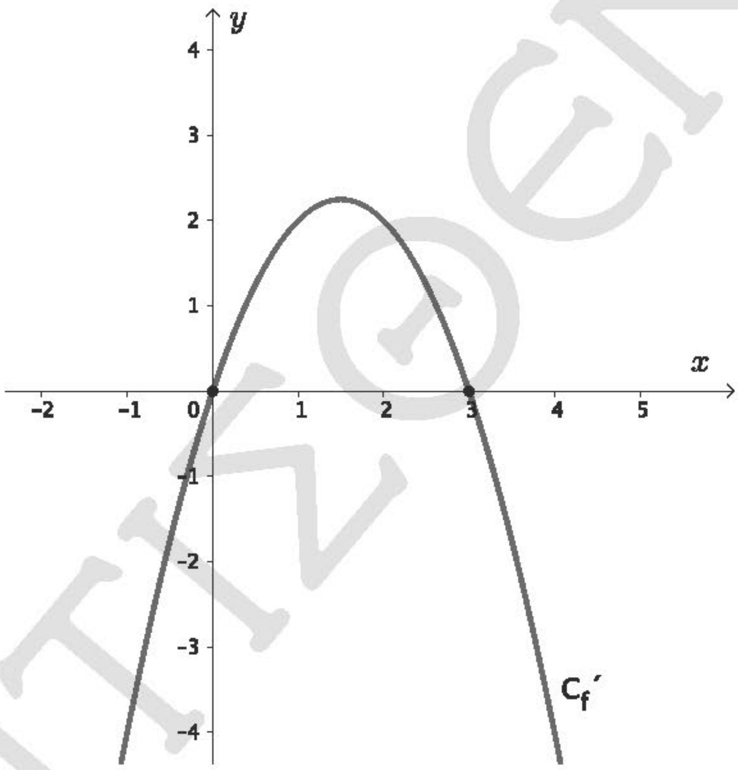
(Μονάδες 09)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.

(Μονάδες 06)

γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία A(0,-1) και B(3,2), τότε να βρείτε τα ακρότατα της f.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' συμπεραίνουμε ότι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 3$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,3)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$ και, αφού είναι $1 < 2$, θα ισχύει $f(1) < f(2)$.

γ) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(3,2)$, τότε θα είναι:

$$f(0) = -1 \quad \text{και} \quad f(3) = 2$$

Από τον πίνακα του ερωτήματος (α) προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$, το οποίο ισούται με $f(0) = -1$ και τοπικό μέγιστο για $x = 3$, το οποίο ισούται με $f(3) = 2$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f. Αν η $C_{f'}$ είναι ευθεία η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(3,0)$, τότε:

α) Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.

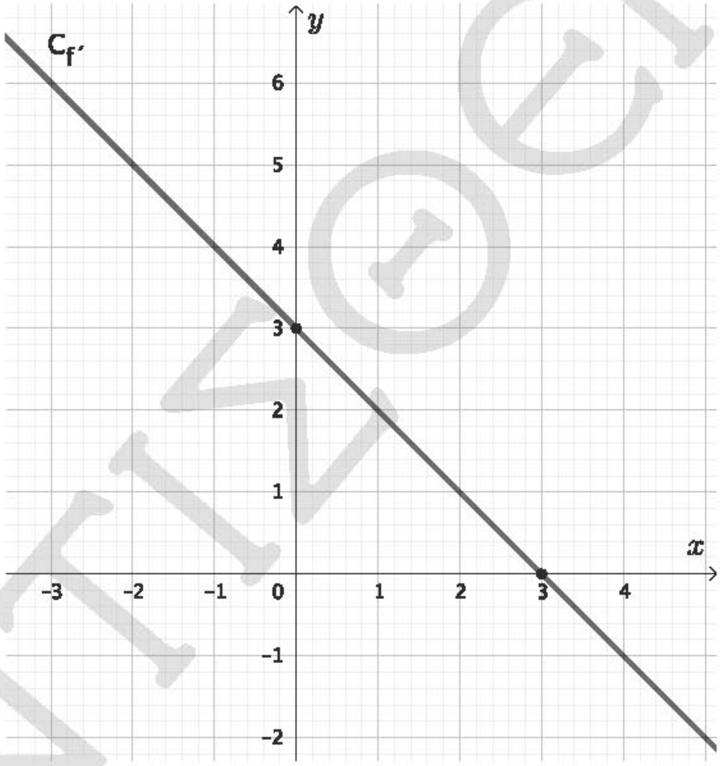
(Μονάδες 10)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(3)$ και $f(4)$.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε το είδος και την τιμή του ακροτάτου που παρουσιάζει η f αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$.

(Μονάδες 09)



ΛΥΣΗ

α) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' συμπεραίνουμε ότι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (3, +\infty)$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$ και, αφού είναι $3 < 4$, θα ισχύει $f(3) > f(4)$.

γ) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$, τότε θα είναι:

$$f(3) = 2$$

Από τον πίνακα του ερωτήματος (α) προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο για $x = 3$, το οποίο ισούται με $f(3) = 2$.

ΘΕΜΑ 4

Δύο θετικοί αριθμοί x, y συνδέονται με τη σχέση $2x+y=20$.

α)

i. Να δείξετε ότι το γινόμενο των δύο αριθμών, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $f(x)=-2x^2+20x$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη τιμή του x ώστε το γινόμενο των δύο αριθμών να γίνει μέγιστο.

(Μονάδες 7)

Λύση

α)

i. Έχουμε $2x+y=20 \Leftrightarrow y=20-2x$ (1).

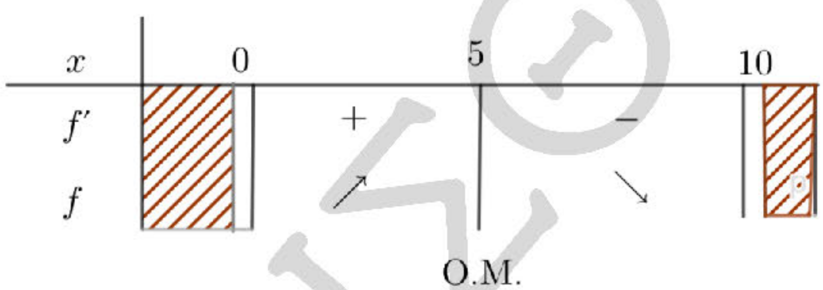
Οπότε $xy \overset{(1)}{=} x(20-2x)=20x-2x^2$. Τελικά η συνάρτηση ως προς x που δίνει το γινόμενο των δύο αριθμών είναι η $f(x)=-2x^2+20x$.

ii. Από την εκφώνηση έχουμε $x>0$ και $y>0$. Όμως $2x+y=20 \Leftrightarrow y=20-2x$. Άρα, επειδή $y>0$, έχουμε $20-2x>0 \Leftrightarrow 2x<20 \Leftrightarrow x<10$, οπότε το x ανήκει στο ανοικτό διάστημα $(0,10)$, δηλαδή $D_f=(0,10)$.

β) Η f στο πεδίο ορισμού της είναι παραγωγίσιμη, με $f'(x)=-4x+20$.

Έχουμε $f'(x)>0 \Leftrightarrow -4x+20>0 \Leftrightarrow x<5$, επομένως f γνησίως αύξουσα για $x\in(0,5]$. Αντίστοιχα $f'(x)<0 \Leftrightarrow -4x+20<0 \Leftrightarrow x>5$, επομένως f γνησίως φθίνουσα για $x\in[5,10)$.

γ) Από το β) ερώτημα συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών



Οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=5$, $f(5)=-2\cdot 5^2+20\cdot 5=50$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-8x+18$ και $g(x)=-(x-4)^4+2$.

α) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων αυτών.

(Μονάδες 12)

γ) Να δείξετε ότι $f(x)\geq g(x), x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Έχουμε $f'(x)=\left(x^2-8x+18\right)'=2x-8, x\in\mathbb{R}$ και

$g'(x)=\left[-(x-4)^4+2\right]'=-4(x-4)^3\cdot(x-4)'=-4(x-4)^3, x\in\mathbb{R}$.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε:

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-8=0\Leftrightarrow x=4$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow 2x-8>0\Leftrightarrow x>4$. Όμοια βρίσκουμε $f'(x)<0\Leftrightarrow x<4$. Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,4]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4,+\infty)$ και έχει (ολικό) ελάχιστο το $f(4)=2$.

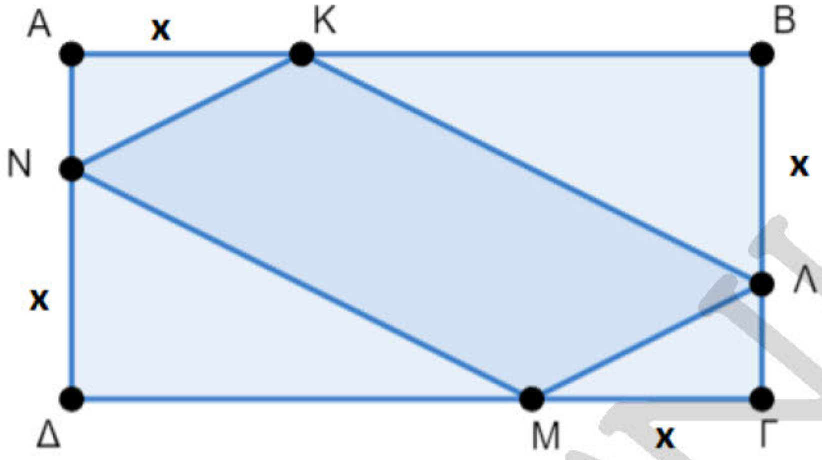
Ακόμα $g'(x)=0\Leftrightarrow -4(x-4)^3=0\Leftrightarrow x-4=0\Leftrightarrow x=4$ και

$g'(x)>0\Leftrightarrow -4(x-4)^3>0\Leftrightarrow x-4<0\Leftrightarrow x<4$. Όμοια βρίσκουμε $g'(x)<0\Leftrightarrow x>4$. Επομένως, η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,4]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[4,+\infty)$ και έχει (ολικό) μέγιστο το $g(4)=2$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε $f(x)\geq 2$ και $g(x)\leq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως $f(x)\geq g(x), x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις $\mathrm{AB}=4$ και $\mathrm{B\Gamma}=2$. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Κ,Λ,Μ και Ν των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα έτσι ώστε $\mathrm{AK}=\mathrm{B\Lambda}=\mathrm{\Gamma M}=\mathrm{\Delta N}=\mathrm{x}$.



α) Να δείξετε ότι

i. το εμβαδόν του ΑΚΝ ως συνάρτηση του x είναι $\mathrm{E_1(x)}=\frac{1}{2}(2-\mathrm{x})\cdot\mathrm{x},\ \mathrm{x}\epsilon(0,2)$ και το εμβαδόν του ΚΒΛ ως συνάρτηση του x είναι $\mathrm{E_2(x)}=\frac{1}{2}(4-\mathrm{x})\cdot\mathrm{x},\ \mathrm{x}\epsilon(0,2)$.

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του ΚΛΜΝ ως συνάρτηση του x είναι $\mathrm{E(x)}=2\cdot(\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+4),\mathrm{x}\epsilon(0,2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε ως προς το x όταν $\mathrm{x}=\frac{3}{2}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του x, για την οποία το Ε(x) γίνεται ελάχιστο.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α)

i. Το εμβαδόν του ΑΚΝ υπολογίζεται από τον τύπο $\mathrm{E}_1(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}AN \cdot AK$ και γίνεται ως συνάρτηση του x, $\mathrm{E}_1(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}AN \cdot AK = \frac{1}{2}(2-\mathrm{x})\cdot \mathrm{x}$. Αντίστοιχα το εμβαδόν του ΚΒΛ ως συνάρτηση του x είναι $\mathrm{E}_2(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}BK \cdot B\Lambda = \frac{1}{2}(4-\mathrm{x})\cdot \mathrm{x}$, με x θετικό επειδή εκφράζει απόσταση και μικρότερο του 2 διότι είναι μικρότερο του ΒΓ, διότι το Λ είναι εσωτερικό σημείου του ΒΓ. Άρα $\mathrm{x}\epsilon(0,2)$.

ii. Το εμβαδόν του ΚΛΜΝ θα το βρούμε από το εμβαδόν του ΑΒΓΔ αν αφαιρέσουμε τα 4 εμβαδά των ορθογωνίων τριγώνων τα οποία ανά δύο είναι ίσα. Συγκεκριμένα, ΑΚΝ=ΜΛΓ και ΔΜΝ=ΚΒΛ, ως ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες, μία προς μία.

$$\mathrm{E}(\mathrm{x}) = (\mathrm{K\Lambda MN}) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) - 2(\mathrm{AKN}) - 2(\mathrm{KB\Lambda}) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) - 2\mathrm{E}_1(\mathrm{x}) - 2\mathrm{E}_2(\mathrm{x}) =$$
$$= \mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma} - 2\cdot\frac{1}{2}(2-\mathrm{x})\cdot\mathrm{x} - 2\cdot\frac{1}{2}(4-\mathrm{x})\cdot\mathrm{x}$$

Άρα, $\mathrm{E}(\mathrm{x}) = 4\cdot 2 - \mathrm{x}\cdot(2-\mathrm{x}) - (4-\mathrm{x})\cdot\mathrm{x} = 8 - 2\mathrm{x} + \mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + \mathrm{x}^2 = 2\mathrm{x}^2 - 6\mathrm{x} + 8$.

Τελικά, $\mathrm{E}(\mathrm{x}) = 2(\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 4)$ με $\mathrm{x}\epsilon(0,2)$.

β) Για να βρούμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε ως προς το x όταν $\mathrm{x} = \frac{3}{2}$, θα πάρουμε πρώτα την πρώτη παράγωγο του Ε(x) και μετά όπου x θα δώσουμε τη τιμή $\frac{3}{2}$. Άρα, έχουμε $\mathrm{E}'(\mathrm{x}) = [2(\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 4)]' = 2(2\mathrm{x} - 3)$ και $\mathrm{E}'\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(2\frac{3}{2} - 3\right) = 2(3-3) = 0$.

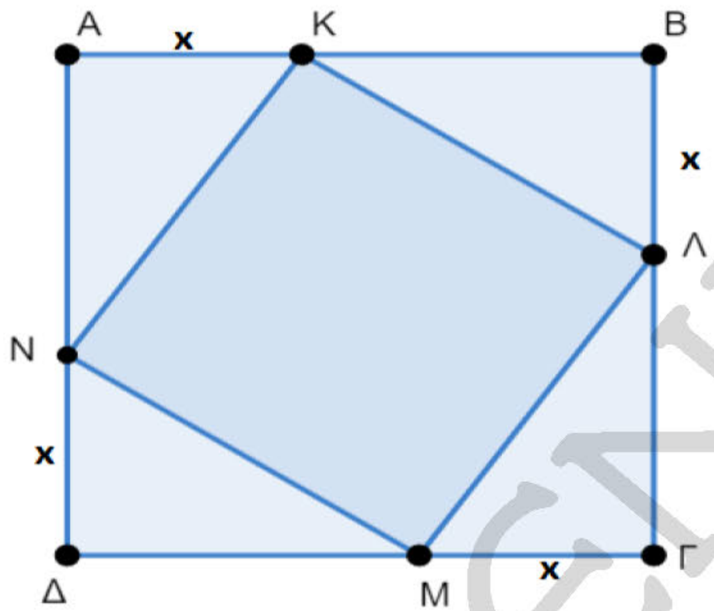
γ) Για να βρούμε που αποκτά την ελάχιστη τιμή, πρώτα θα βρούμε που μηδενίζεται το Ε΄(x) και έπειτα το πρόσημό του.

Το $\mathrm{E}'(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow 2(2\mathrm{x}-3) = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \frac{3}{2}$. Στον παρακάτω πίνακα μεταβολών του Ε φαίνεται αναλυτικά το πρόσημο της $\mathrm{E}'(\mathrm{x})$ και η μονοτονία του Ε(x). Παρατηρούμε ότι για $0 < \mathrm{x} \leq \frac{3}{2}$ η Ε είναι γνησίως φθίνουσα και για $\frac{3}{2} \leq x < 2$ η Ε είναι γνησίως αύξουσα, επομένως το εμβαδόν Ε(x) γίνεται ελάχιστο για $\mathrm{x} = \frac{3}{2}$.

x	0		$\frac{3}{2}$		2
Ε΄(x)		$-$	0	$+$	
Ε(x)		↘		↗	

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά $AB = 4$. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Κ,Λ,Μ και Ν των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα έτσι ώστε $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N = x$.



α) Να δείξετε ότι

i. το εμβαδόν του ΑΚΝ ως συνάρτηση του x είναι $E_1(x) = \frac{1}{2}(4-x)\cdot x$, $x \epsilon (0,4)$.

(Μονάδες 5)

ii. το εμβαδόν του ΚΛΜΝ ως συνάρτηση του x είναι $E(x)=2\cdot(x^2-4x+8), x\epsilon(0,4)$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη πρώτη παράγωγο του εμβαδού Ε(x).

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την τιμή του x, για την οποία το Ε(x) γίνεται ελάχιστο.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α)

i. το εμβαδόν $E_1(x)$ του ΑΚΝ υπολογίζεται από τον τύπο $E_1(x)=\frac{1}{2}AN\cdot AK$ και γίνεται ως συνάρτηση του x, $E_1(x)=\frac{1}{2}AN\cdot AK=\frac{1}{2}(4-x)\cdot x$,

με x θετικό επειδή εκφράζει απόσταση και μικρότερο του 4 διότι x=AK<AB=4, άρα x$\epsilon(0,4)$.

ii. Το εμβαδόν E(x) του ΚΛΜΝ θα το βρούμε αν από το ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε τα 4 ορθογώνια τρίγωνα. Τα τρίγωνα είναι όλα ίσα, διότι είναι ορθογώνια και έχουν ίσες τις αντίστοιχες κάθετες πλευρές τους άρα και ισεμβαδικά:

$$E(x)=(ΚΛΜΝ)=(ΑΒΓΔ)-4(ΑΜΚ)=(ΑΒΓΔ)-4E_1(x)=AB^2-4\cdot\frac{1}{2}(4-x)\cdot x.$$

$$E(x)=16-2(4-x)\cdot x=16-8x+2x^2=2(x^2-4x+8)$$

$E(x)=2(x^2-4x+8)$ με x$\epsilon(0,4)$.

β) Για να βρούμε την πρώτη παράγωγο του E(x), έχουμε:

$E'(x)=[2(x^2-4x+8)]'=2(2x-4)$ άρα, $E'(x)=2(2x-4)$.

γ) Για να βρούμε που αποκτά την ελάχιστη τιμή, πρώτα θα βρούμε που μηδενίζεται η συνάρτηση E΄(x) και έπειτα το πρόσημό του.

Το $E'(x)=0\Leftrightarrow 2(2x-4)=0\Leftrightarrow 2x-4=0\Leftrightarrow x=2$.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται αναλυτικά το πρόσημο της $E'(x)$ και η μονοτονία του E(x). Παρατηρούμε πως στο $x=2$ αλλάζει η μονοτονία άρα αποκτά την ελάχιστη τιμή το E(x).

X	**0**	**2**	**4**
E΄(x)	−	0	+
E(x)	↘		↗

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+\frac{2}{3}$, $x\in R$

α) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f.

(Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1,1)$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

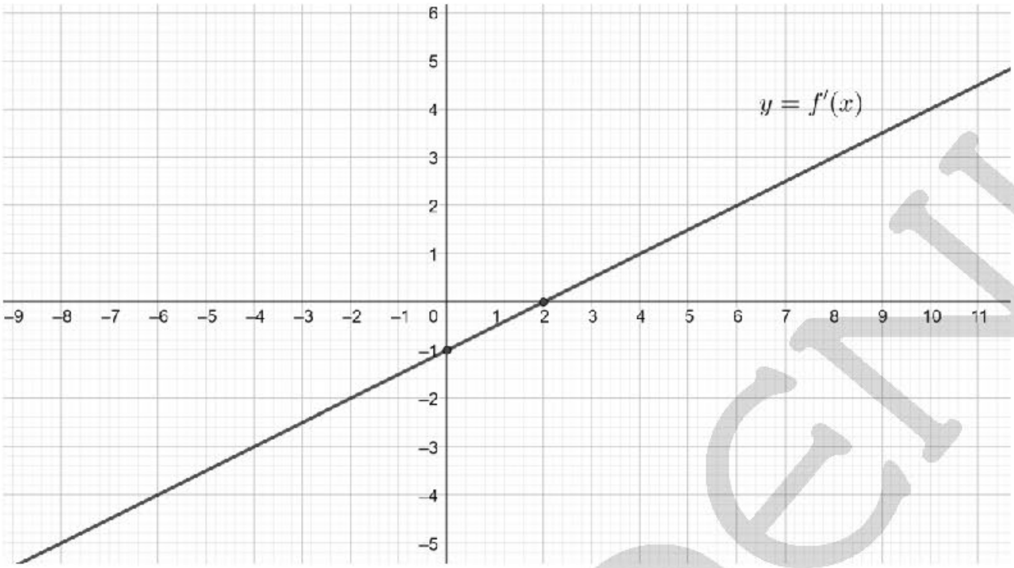
α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = (\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3})' = x^2 - 2x + 1$.

β) Έχουμε $f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in R$ και ισχύει $f'(x) = 0$ μόνο για $x = 1$. Δηλαδή η παράγωγος της συνάρτησης μηδενίζεται μόνο σε ένα σημείο και εκατέρωθεν αυτού είναι θετική. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R και δεν έχει ακρότατα.

γ) Έστω $y = \lambda \cdot x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $A(1,1)$. Για το λ γνωρίζουμε ότι ισχύει $\lambda = f'(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$. Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας παίρνει τη μορφή $y = 0 \cdot x + \beta$ και επειδή το σημείο $A(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας αυτής θα επαληθεύει την εξίσωση της. Δηλαδή ισχύει $1 = 0 \cdot 1 + \beta$, άρα $\beta = 1$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι $y = 1$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(2)=5$ και $f(0)=6$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' της συνάρτησης, η οποία είναι ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -1.



α) Να αιτιολογήσετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,2]$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{A}(0,f(0))$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Από το σχήμα έχουμε $f'(x)<0$ για $x<2$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$.

β) Από το ίδιο σχήμα έχουμε $f'(x)>0$ για $x>2$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x=2$ το $f(2)=5$.

γ) Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $(x_0,f(x_0))$ δίνεται από τον τύπο $y=f'(x_0)x+\beta$. Είναι $f'(0)=-1$, οπότε $y=-x+\beta$. Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,6)$, άρα $6=-0+\beta \Leftrightarrow \beta=6$. Τελικά η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι $y=-x+6$.

Σχόλιο: Η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+6$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με εμβαδόν 4 m^2.

α) Αν το μήκος της πλευράς ΑΒ = x m, να δείξετε ότι η πλευρά ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ συναρτήσει του x είναι ΒΓ $= \frac{4}{x}, x > 0$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι, η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x + \frac{8}{x}, x > 0.$$

(Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 8)

δ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με σταθερό εμβαδό, παίρνει την ελάχιστη τιμή της, όταν αυτό γίνει τετράγωνο. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε $\mathrm{E} = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = 4\ m^2$ και $\mathrm{AB} = x\ m$ με $x > 0$.

Αν $\mathrm{B\Gamma} = y$ με $y > 0$ τότε έχουμε: $\mathrm{E} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{B\Gamma} = x \cdot y$ ή $4 = x \cdot y \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{x},\ x > 0$ άρα

ΒΓ $= \dfrac{4}{x},\ x > 0$.

β) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $\Pi = 2 \cdot \mathrm{AB} + 2 \cdot \mathrm{B\Gamma} = 2x + 2y$, η οποία λόγω του ερωτήματος (α) γράφεται: $\Pi = 2x + 2\dfrac{4}{x} = 2x + \dfrac{8}{x},\ x > 0$. Άρα η συνάρτηση $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x},\ x > 0$, δίνει την περίμετρο του ορθογωνίου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$.

γ) Για $x > 0$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x) = \left(2x + \dfrac{8}{x}\right)' = 2 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = \dfrac{2(x^2 - 4)}{x^2}$, οπότε:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 2$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > 2$.

Και για την f έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

x		0		2		$+\infty$
f'		‖	$-$		$+$	
f		‖	$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$	

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$. Στο $x_0 = 2$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της $f(2) = 4 + 4 = 8$.

δ) Λόγω του ερωτήματος (γ) η περίμετρος του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη όταν $x = 2$. Τότε όμως λόγω του ερωτήματος (α) το $y = \dfrac{4}{2} = 2$. Επομένως οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες, άρα αυτό είναι τετράγωνο. Οπότε έχει δίκιο ο μαθητής.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1, x \in \mathbb{R}$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = 6x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$, στο σημείο της με τετμημένη $x_o = 1$.

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-5}{g'(x)-10}$.

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (2x^3 - x^2 + x - 1)' = 2 \cdot 3x^2 - 2x + 1 - 0 = 6x^2 - 2x + 1$$

Το τριώνυμο $6x^2 - 2x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 4 - 24 = -20 < 0$.

Άρα, $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της με τετμημένη $x_o = 1$ είναι:

$$y = g'(1)x + \beta \qquad (1)$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$g'(x) = (6x^2 - 2x + 1)' = 6 \cdot 2x - 2 \cdot 1 + 0 = 12x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\text{, οπότε}$$

$$g'(1) = 12 \cdot 1 - 2 = 10$$

Επειδή το σημείο $(1, g(1)) = (1,5)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε από την (1):

$$5 = 10 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -5$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y = 10x - 5$$

γ) Είναι:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x) - 5}{g'(x) - 10} = \lim_{x \to 1} \frac{6x^2 - 2x + 1 - 5}{12x - 2 - 10} = \lim_{x \to 1} \frac{6x^2 - 2x - 4}{12x - 12}$$

Επειδή $\lim_{x \to 1}(12x - 12) = 0$, δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα του πηλίκου για το όριο

$$\lim_{x \to 1} \frac{6x^2 - 2x - 4}{12x - 12}$$

Έτσι, παραγοντοποιούμε τους όρους του κλάσματος

$$\frac{6x^2 - 2x - 4}{12x - 12}$$

και έχουμε:

$$\lim_{x \to 1} \frac{6x^2 - 2x - 4}{12x - 12} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(6x + 4)}{12(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{6x + 4}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

ΘΕΜΑ 4

Μια επιχείρηση παραγωγής αιθέριων ελαίων εκτιμά ότι το ημερήσιο κόστος $C(x)$ (σε εκατοντάδες ευρώ) για την παραγωγή x κιλών λεβάντας είναι:

$$C(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 30, x \geq 0$$

α) Πόσο είναι το ημερήσιο κόστος για την παραγωγή 2 κιλών λεβάντας;

(Μονάδες 05)

β) Να υπολογίσετε το $C(0)$. Τι εκφράζει;

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $C(x)$.

(Μονάδες 05)

δ) Να βρείτε πόσα κιλά λεβάντας πρέπει να παράγονται ημερησίως ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος. Πόσο είναι το ελάχιστο ημερήσιο κόστος;

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 2$ έχουμε:

$$C(2) = 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 30 = 16 - 16 - 16 + 30 = 14$$

Άρα, το ημερήσιο κόστος για την παραγωγή 2 κιλών λεβάντας είναι:

$$14 \cdot 100 = 1400 \text{ ευρώ}$$

β) Για $x = 0$ προκύπτει το ημερήσιο κόστος της επιχείρησης όταν δεν παράγει καθόλου λεβάντα. Έχουμε:

$$C(0) = 2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 30 = 30$$

Επομένως, το σταθερό ημερήσιο κόστος της επιχείρησης είναι:

$$30 \cdot 100 = 3000 \text{ ευρώ}$$

γ) Η παράγωγος της συνάρτησης $C(x)$ είναι:

$$\begin{aligned} C'(x) &= (2x^3 - 4x^2 - 8x + 30)' = 2 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x - 8 \\ &= 6x^2 - 8x - 8, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

δ) Έχουμε:

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις

$$x = -\frac{2}{3} \text{ (απορρίπτεται) ή } x = 2$$

$$C'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$$

$$C'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0,2)$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της C φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	0		2		$+\infty$
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα, η συνάρτηση C είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση C παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο για $x = 2$, το οποίο ισούται με $C(2) = 14$. Επομένως, το ελάχιστο ημερήσιο κόστος της επιχείρησης ισούται με $14 \cdot 100 = 1400$ ευρώ και προκύπτει κατά την παραγωγή 2 κιλών λεβάντας.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(0,2)$ και $\mathrm{B}(x,0)$ με $x>0$.

α) Να δείξετε ότι η απόσταση των σημείων A και B συναρτήσει του x είναι:

$d(x)=(\mathrm{AB})=\sqrt{x^2+4}$ με $x>0$.

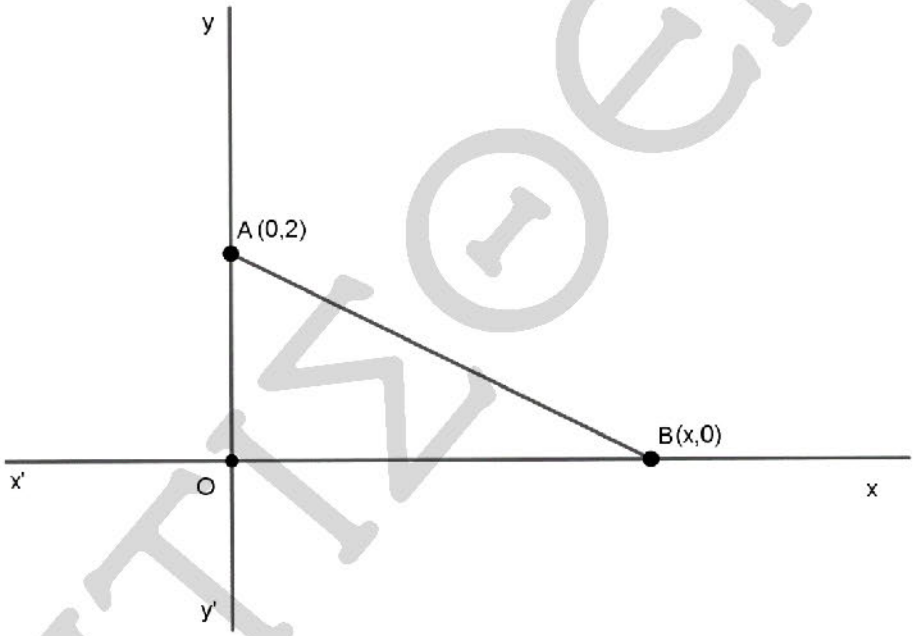
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων A και B ως προς x όταν $x=3$.

(Μονάδες 9)

γ) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι, καθώς το σημείο B κινείται προς τα δεξιά στον ημιάξονα $\mathrm{O}x$, το μήκος του AB αυξάνεται. Να αιτιολογήσετε γιατί συμβαίνει αυτό, αξιοποιώντας το ερώτημα (β).

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι:

$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{OA})^2 + (\mathrm{OB})^2 \Leftrightarrow (\mathrm{AB})^2 = 2^2 + x^2 \Leftrightarrow (\mathrm{AB})^2 = 4 + x^2$, οπότε $(\mathrm{AB}) = \sqrt{4+x^2}$.

Όμως $d(x) = (\mathrm{AB})$, επομένως $d(x) = \sqrt{x^2+4}$ με $x > 0$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α) η απόσταση των σημείων Α και Β είναι

$d(x) = \sqrt{x^2+4}$ με $x > 0$.

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$d'(x) = (\sqrt{x^2+4})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}(x^2+4)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} .$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων Α και Β όταν $x = 3$

είναι $d'(3) = \dfrac{3}{\sqrt{3^2+4}} = \dfrac{3}{\sqrt{9+4}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

γ) Λόγω του ερωτήματος (β) για $x > 0$ η $d'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ και είναι $d'(x) > 0$ για κάθε

$x \in (0, +\infty)$. Επομένως η συνάρτηση d είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε καθώς το σημείο Β κινείται προς τα δεξιά στον ημιάξονα $\mathrm{O}x$, το μήκος του ΑΒ αυξάνεται.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x)$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

(Μονάδες 3)

δ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2023)$ και $f(2301)$ της συνάρτησης f.

(Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{x^2}{x^2+1} = \dfrac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}^2+1} = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή με

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

γ) Λόγω του ερωτήματος (β) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

i. Είναι: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Επίσης: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Έτσι για την f έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$
		Ο.Ε	

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

ii. Λόγω του ερωτήματος (γ,i) η f στο $x = 0$ εμφανίζει ολικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.

δ) Οι αριθμοί 2023 και 2301 ανήκουν στο διάστημα $(0, +\infty)$ στο οποίο η συνάρτηση λόγω του ερωτήματος (γ,i) είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως θα ισχύει: $2023 < 2301 \Rightarrow f(2023) < f(2301)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2, x > 0$.

α) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$ και το πρόσημο της f'.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό $x > 0$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α)

Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα παραγωγίσιμη στο διάστημα $\ ,+\infty)$, με παράγωγο:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x, x > \ .$$

Ισχύει ότι $f'\ \ x) = 4x\ \ x^2 - 1) = 4x\ \ x - 1)\ \ x + 1)$ και

$f'\ \ x) = \quad \Leftrightarrow 4x\ \ x^2 - 1) = \quad \Leftrightarrow x = \quad$ ή $x = -1$ ή $x = 1$, από τις οποίες γίνεται δεκτή μόνο η $x = 1$, εφόσον $x > 0$.

Επίσης, εφόσον $x > 0$, $f'\ \ x) < \quad \Leftrightarrow 4x\ \ x^2 - 1) < \quad \Leftrightarrow x^2 - 1 < \quad \Leftrightarrow \quad < x < 1$ και

$f'\ \ x) > \quad \Leftrightarrow 4x\ \ x^2 - 1) > \quad \Leftrightarrow x^2 - 1 > \quad \Leftrightarrow x > 1$.

Οπότε, ισχύει ότι $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$ και $f'\ \ x) > \quad \Leftrightarrow x > 1$.

β)

Σύμφωνα με το ερώτημα (α), η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\ ,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, οπότε έχει ελάχιστη τιμή στο 1, το f(1) = 1.

γ)

Η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή το 1, οπότε θα ισχύει ότι $f(x) \geq 1 > \quad \Rightarrow f(x) > 0$, για κάθε $x > \ .$

ΘΕΜΑ 4

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα, πλάτος y μέτρα και περίμετρο 200 μέτρα.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = 100x - x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$

(Μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

(Μονάδες 9)

γ) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο, και ποια είναι η μέγιστη τιμή του; Για την τιμή που βρήκατε τι σχήμα προκύπτει;

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Για το εμβαδό Ε του ορθογωνίου οικοπέδου έχουμε $\mathrm{E} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ με $\mathrm{x}, \mathrm{y} > 0$.

Από τα δεδομένα μας δίνεται ότι η περίμετρος είναι: Π=200 μέτρα.

Γνωρίζουμε πως $\Pi = 2\mathrm{x} + 2\mathrm{y}$ με $\mathrm{x}, \mathrm{y} > 0$.

Άρα, $2\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 200 \Leftrightarrow \mathrm{x} + \mathrm{y} = 100$ με $\mathrm{x}, \mathrm{y} > 0$ και $\mathrm{y} = 100 - \mathrm{x}$ με $0 < \mathrm{x} < 100$.

Επομένως, το εμβαδόν γίνεται $\mathrm{E} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \mathrm{x}(100 - \mathrm{x}) = 100\mathrm{x} - \mathrm{x}^2$.

Άρα, $\mathrm{E}(\mathrm{x}) = 100\mathrm{x} - \mathrm{x}^2$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $(0,100)$, διότι x εκφράζει διάσταση οπότε παίρνει μόνο θετικές τιμές και μέχρι 100 βάση της εξίσωσης $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 100$.

β) Για $0 < \mathrm{x} < 100$ η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$\mathrm{E}'(\mathrm{x}) = (100\mathrm{x} - \mathrm{x}^2)' = 100 - 2x$, οπότε

$\mathrm{E}'(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2\mathrm{x} = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{x} = 100 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 50$ μέτρα.

Επίσης, $\mathrm{E}'(\mathrm{x}) > 0 \Leftrightarrow 100 - 2\mathrm{x} > 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} < 50$, οπότε:

x	0	50	100
E'(x)	+	0	−
E(x)	↗		↘

Επομένως, η συνάρτηση $\mathrm{E}(\mathrm{x})$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,50]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [50,100) .

γ)Λόγω του ερωτήματος (β) το εμβαδόν του ορθογωνίου οικοπέδου παίρνει την μέγιστη τιμή για $\mathrm{x} = 50$. Επίσης, η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι:

$\mathrm{E}(50) = 100 \cdot 50 - 50^2 = 5000 - 2500 = 2500$ τετραγωνικά μέτρα.

Το σχήμα που προκύπτει είναι τετράγωνο, διότι $\mathrm{x} = \mathrm{y} = 50$ μέτρα.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x + 5, x \in R$ και $\lambda \in R$ σταθερά.

α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in R$.

(Μονάδες 7)

Για $\lambda = 3$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{7}{3}\right)$ και $f(\frac{13}{4})$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2 - x}$$

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x + 5, x \in R$ και $\lambda \in R$ σταθερά.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με

$f' = (x^3 - 3x^2 + \lambda x + 5)' = 3x^2 - 6x + \lambda.$

Ισχύει $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow -3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3.$

Για $\lambda = 3$ η συνάρτηση f γράφεται: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5.$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x + 5)' = 3x^2 - 6x + 3.$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$ και $f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$ στο R.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		+	0	+	
f			$\nearrow$		

Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Επειδή $\frac{7}{3} < \frac{13}{4}$ και η συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο R θα ισχύει για τους αριθμούς

$f\left(\frac{7}{3}\right) < f\left(\frac{13}{4}\right).$

γ) Για το όριο έχουμε:

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x^2 - x} = \lim_{x\to1}\frac{3(x-1)^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to1}\frac{3(x-1)}{x} = \frac{3(1-1)}{1} = 0.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x)=ax^2-2x$, $x\in R$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός.

α)

i) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

(Μονάδες 04)

ii) Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1\,,f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $a=1$.

(Μονάδες 05)

Για $a=1$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 09)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{\sqrt{x}-1}$.

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α)

i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=(ax^2-2x)'=2ax-2$.

ii)Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Επομένως ισχύει $f'(1)=0 \Leftrightarrow 2a\cdot 1-2=0 \Leftrightarrow 2a=2 \Leftrightarrow a=1$.

β) Για $a=1$ έχουμε $f(x)=x^2-2x$ και $f'(x)=2x-2$.

Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$ και επιπλέον

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-2>0 \Leftrightarrow 2x>2 \Leftrightarrow x>1$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$, ενώ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=-1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		-	0	+	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

γ) Για $a=1$ έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}2(\sqrt{x}+1)=4$$

ΘΕΜΑ 4

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου $({}^{0}C)$ ενός δωματίου σε συνάρτηση με τον χρόνο t σε ώρες δίνεται από τον τύπο $\theta(t)=t^3-3t^2+2t+c$, $0\le t\le 4$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός.

α) Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του δωματίου τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι ίση με 8 βαθμούς Κελσίου, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού c.

(Μονάδες 06)

Για $c=8$

β) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας όταν $t=2$.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας γίνεται ελάχιστος και την τιμή του ελάχιστου ρυθμού μεταβολής.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $\theta(0)=8 \Leftrightarrow 0^3-3\cdot 0^2+2\cdot 0+c=8 \Leftrightarrow c=8$.

β) Για $c=8$ η συνάρτηση γίνεται $\theta(t)=t^3-3t^2+2t+8$ και ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας θ τη χρονική στιγμή t είναι $f(t)=\theta'(t)=(t^3-3t^2+2t+8)'=3t^2-6t+2$. Επομένως τη χρονική στιγμή $t=2$ ο ρυθμός μεταβολής είναι $f(2)=\theta'(2)=3\cdot 2^2-6\cdot 2+2=2\ {}^0C$ /ώρα.

γ) Για τον ρυθμό μεταβολής $f(t)=3t^2-6t+2$ έχουμε $f'(t)=(3t^2-6t+2)'=6t-6$, άρα $f'(t)=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow 6t=6 \Leftrightarrow t=1$ και $f'(t)>0 \Leftrightarrow 6t-6>0 \Leftrightarrow 6t>6 \Leftrightarrow t>1$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία του ρυθμού μεταβολής f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

t	0	1	4
f'	-	0	+
f	↘		↗

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας γίνεται ελάχιστος όταν $t=1$ και η ελάχιστη τιμή του είναι $f(1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1+2=-1\ {}^0C$ /ώρα.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+c$, $x\in R$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το c αν ισχύει $f(2)+f'(2)+f''(2023)=0$.

(Μονάδες 10)

Για $c=2$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 09)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2023)$, $f(2024)$.

(Μονάδες 06)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για $x \in R$ με $f'(x) = (x^2 - 4x + c)' = 2x - 4$ και η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη για $x \in R$ με $f''(x) = (2x-4)' = 2$. Επομένως έχουμε $f'(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$ και $f''(2023) = 2$, ενώ $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + c = 4 - 8 + c = c - 4$.

Άρα $f(2) + f'(2) + f''(2023) = 0 \Leftrightarrow c - 4 + 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow c = 2$.

β) Για $c = 2$ έχουμε $f(x) = x^2 - 4x + 2$ και $f'(x) = (x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4$, επομένως

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘		↗

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 2$ το $f(2) = -2$.

γ) Οι αριθμοί 2023, 2024 ανήκουν στο διάστημα $[2, +\infty)$ στο οποίο η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως ισχύει $2023 < 2024 \Leftrightarrow f(2023) < f(2024)$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$. Η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $(2,1)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη 3. Μελετώντας το σχήμα να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = 2$;

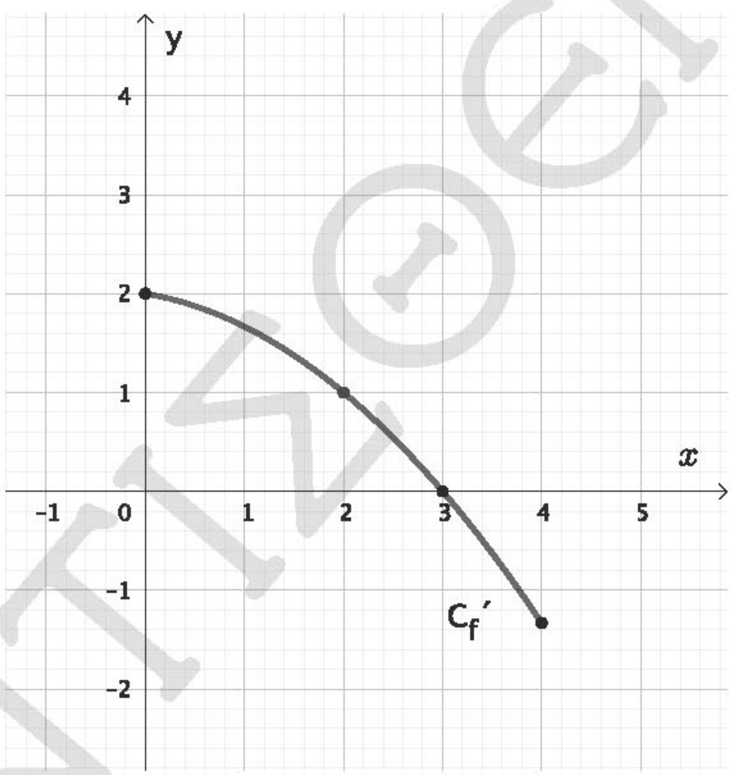
(Μονάδες 07)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο $[0,3]$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o = 3$.

(Μονάδες 08)



ΛΥΣΗ

α) Ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = 2$ ισούται με $f'(2)$. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' παρατηρούμε ότι $f'(2) = 1$.

β) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' παρατηρούμε ότι:

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0,3)$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$.

γ) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' παρατηρούμε επίσης ότι:

$$f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (3,4) \text{ και } f'(3) = 0$$

Για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ στο $(0,3)$ (η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$) και $f'(x) < 0$ στο $(3,4)$ (η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3,4]$). Επομένως, η f παρουσιάζει στο διάστημα $[0,4]$ μέγιστο για $x_o = 3$.

ΘΕΜΑ 4

Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x, y ώστε να έχει εμβαδόν $800\, m^2$. Η πλευρά ΑΒ της περιοχής, μήκους x, όπως φαίνεται στο σχήμα, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά m και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά m, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσει του x, είναι:

$$K(x) = 8x + \frac{3200}{x}, x > 0$$

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο.

(Μονάδες 12)

γ) Ποιο είναι το ελάχιστο κόστος περίφραξης;

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Το κόστος περίφραξης της πέτρινης πλευράς είναι ίσο με $6x$, ενώ το κόστος περίφραξης του συρμάτινου φράχτη είναι ίσο με $2x + 2y \cdot 2 = 2x + 4y$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $800\ m^2$, οπότε:

$$xy = 800 \Leftrightarrow y = \frac{800}{x}$$

Επομένως, το συνολικό κόστος της περίφραξης του κτήματος, συναρτήσει του x,

είναι: $$K(x) = 6x + 2x + 4\frac{800}{x} = 8x + \frac{3200}{x}, x > 0$$

β) Η συνάρτηση $K(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ με

$$K'(x) = 8 - \frac{3200}{x^2} = \frac{8x^2 - 3200}{x^2} = \frac{8(x^2 - 400)}{x^2}$$

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8(x^2 - 400)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 400 = 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x = 20$$

$$K'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (20, +\infty)$$

$$K'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0,20)$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της συνάρτησης K φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0		20		$+\infty$
$K'(x)$			$-$	0	$+$	
$K(x)$			$\searrow$		$\nearrow$	

Για τη συνάρτηση K ισχύουν $K'(20) = 0$, $K'(x) < 0$ στο $(0,20)$ και $K'(x) > 0$ στο $(20, +\infty)$. Επομένως, η συνάρτηση K παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 20$. Τότε είναι:

$$y = \frac{800}{20} = 40$$

Επομένως, οι διαστάσεις του κτήματος με το ελάχιστο κόστος περίφραξης είναι 20 m και $40\ m$.

γ) Η τιμή του ελάχιστου κόστους ισούται με:

$$K(20) = 8 \cdot 20 + \frac{3200}{20} = 160 + 160 = 320 \text{ ευρώ}$$

ΘΕΜΑ 4

Ένας αγρότης διαθέτει συρματόπλεγμα μήκους 200 m και θέλει να περιφράξει με αυτό σε ένα χωράφι του μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου ΑΒΓΔ με ενδιάμεσο χώρισμα ΕΖ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν $\text{ΑΔ} = x$ και $\text{ΑΒ} = y$, να αποδείξετε ότι το συνολικό εμβαδόν του σχήματος, συναρτήσει του x, είναι:

$$E(x) = \frac{200x - 2x^2}{3}, 0 < x < 100$$

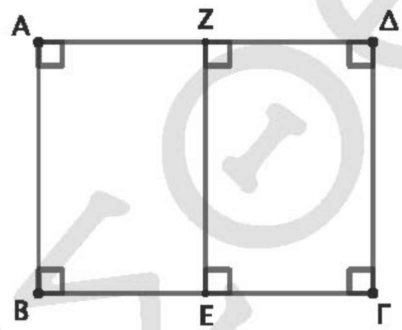
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ώστε το συνολικό εμβαδόν να είναι μέγιστο.

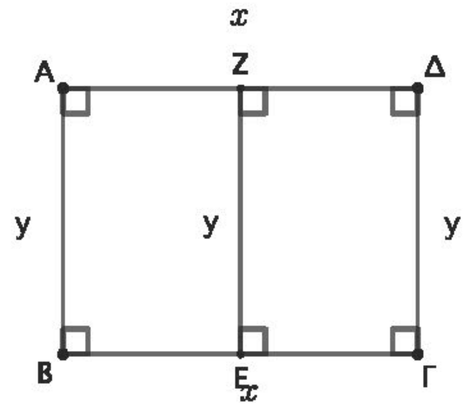
(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του σχήματος.

(Μονάδες 07)



ΛΥΣΗ



α) Είναι ΑΔ $=$ ΒΓ $= x > 0$ και ΑΒ $=$ ΖΕ $=$ ΔΓ $= y > 0$. Έχουμε:

$$2x + 3y = 200 \Leftrightarrow 3y = 200 - 2x \Leftrightarrow y = \frac{200 - 2x}{3}$$

Είναι:
$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{200 - 2x}{3} > 0 \Leftrightarrow 200 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 100$$

Επομένως, το συνολικό εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, συναρτήσει του x, είναι:

$$E(x) = x \cdot \frac{200 - 2x}{3} = \frac{200x - 2x^2}{3}, 0 < x < 100$$

β) Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ με

$$E'(x) = \frac{200 \cdot 1 - 2 \cdot 2x}{3} = \frac{200 - 4x}{3}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{200 - 4x}{3} = 0 \Leftrightarrow 200 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 50$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{200 - 4x}{3} > 0 \Leftrightarrow 200 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < 50$$

$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 50$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της συνάρτησης $E(x)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0		50		100
$E'(x)$			$+$	0	$-$	
$E(x)$			$\nearrow$		$\searrow$	

Για τη συνάρτηση E ισχύουν $E'(50) = 0$, $E'(x) > 0$ στο $(0,50)$ και $E'(x) < 0$ στο $(50,100)$. Επομένως, η συνάρτηση E παρουσιάζει μέγιστο για $x = 50$. Τότε είναι:

$$y = \frac{200 - 2 \cdot 50}{3} = \frac{100}{3}$$

Άρα, οι διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ για τις οποίες το συνολικό εμβαδόν του γίνεται μέγιστο είναι $x = 50\ m$ και $y = \frac{100}{3}\ m$.

γ) Το μέγιστο εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ισούται με:

$$E(50) = \frac{200 \cdot 50 - 2 \cdot 50^2}{3} = \frac{10000 - 5000}{3} = \frac{5000}{3}\ m^2$$

ΘΕΜΑ 4

Ένας αγρότης διαθέτει συρματόπλεγμα μήκους 200 m και να θέλει να περιφράξει με αυτό σε ένα χωράφι του μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου ΑΒΓΔ με δύο ενδιάμεσα χωρίσματα ΕΖ και ΘΗ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν $ΑΔ = x$ και $ΑΒ = y$, να αποδείξετε ότι το συνολικό εμβαδόν του σχήματος, συναρτήσει του x, είναι:

$$E(x) = \frac{100x - x^2}{2}, 0 < x < 100$$

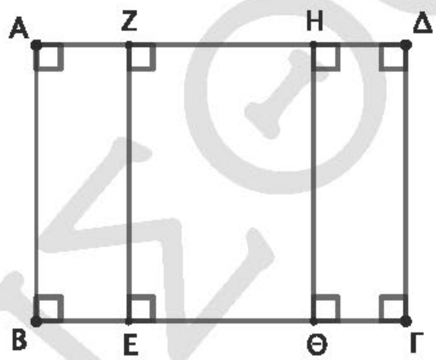
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ώστε το συνολικό εμβαδόν του να είναι μέγιστο.

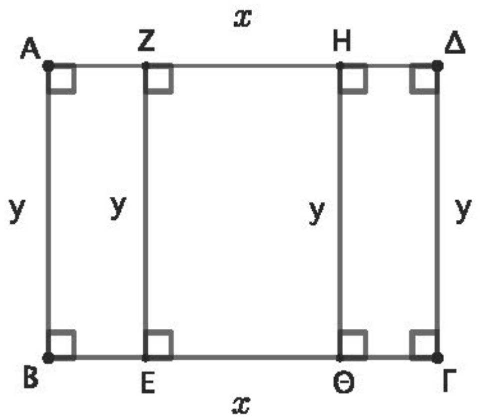
(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος.

(Μονάδες 07)



ΛΥΣΗ



α) Είναι ΑΔ $=$ ΒΓ $= x > 0$ και ΑΒ $=$ ΖΕ $=$ ΗΘ $=$ ΔΓ $= y > 0$. Έχουμε:

$$2x + 4y = 200 \Leftrightarrow 4y = 200 - 2x \Leftrightarrow 2y = 100 - x \Leftrightarrow y = \frac{100 - x}{2}$$

Είναι: $$y > 0 \Leftrightarrow \frac{100 - x}{2} > 0 \Leftrightarrow 100 - x > 0 \Leftrightarrow x < 100$$

Επομένως, το συνολικό εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, συναρτήσει του x, είναι:

$$E(x) = x \cdot \frac{100 - x}{2} = \frac{100x - x^2}{2}, 0 < x < 100$$

β) Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ με

$$E'(x) = \frac{100 \cdot 1 - 2x}{2} = \frac{100 - 2x}{2} = 50 - x$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 50 - x = 0 \Leftrightarrow x = 50$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow 50 - x > 0 \Leftrightarrow x < 50$$

$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 50$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της συνάρτησης $E(x)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	50	100
$E'(x)$		$+$	0	$-$
$E(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

Για τη συνάρτηση E ισχύουν $E'(50) = 0$, $E'(x) > 0$ στο $(0,50)$ και $E'(x) < 0$ στο $(50,100)$. Επομένως, η συνάρτηση E παρουσιάζει μέγιστο για $x = 50$. Τότε είναι:

$$y = \frac{100 - 50}{2} = 25$$

Άρα, οι διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ για τις οποίες το συνολικό εμβαδόν του γίνεται μέγιστο είναι $x = 50\ m$ και $y = 25\ m$.

γ) Το μέγιστο εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ισούται με:

$$E(50) = \frac{100 \cdot 50 - 50^2}{2} = \frac{5000 - 2500}{2} = 1250\ m^2$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x}, x \geq 0$, και το σημείο $A(3,0)$, όπως φαίνονται στο σχήμα. Αν $M(x, y)$ είναι τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση AM, συναρτήσει του x, είναι:

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 9}, x \geq 0$$

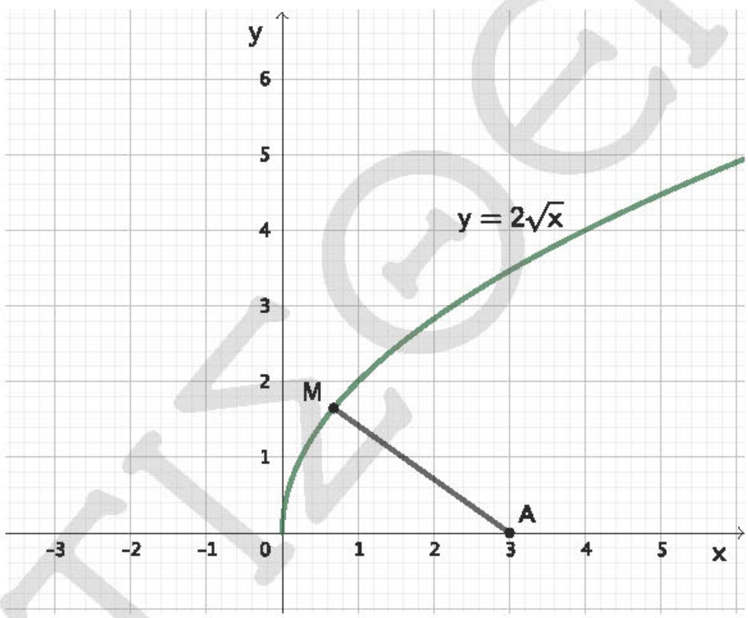
(Μονάδες 09)

β) Να βρείτε για ποιο σημείο M η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη. Θεωρείστε ότι η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόριζο $x^2 - 2x + 9, x \geq 0$, γίνει ελάχιστο.

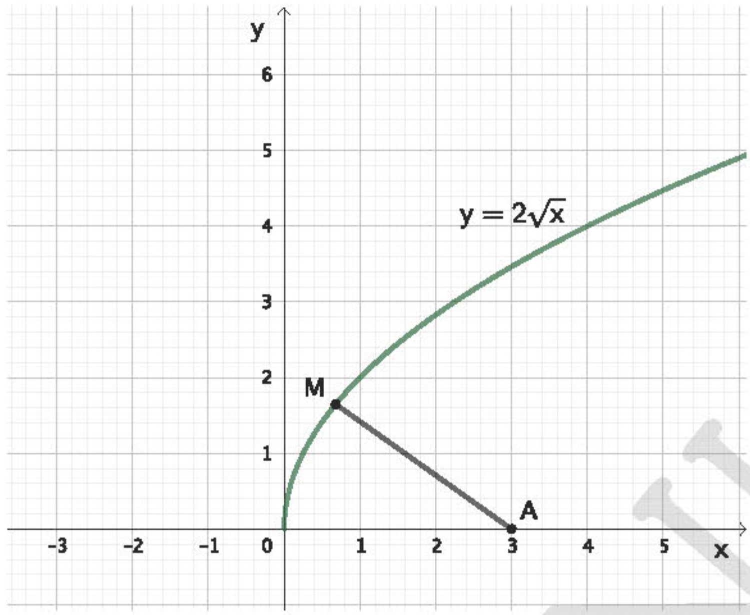
(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση AM.

(Μονάδες 06)



ΛΥΣΗ



α) Για το τυχαίο σημείο M της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι:

$$M(x,y) = \left(x, 2\sqrt{x}\right), x \geq 0$$

Επομένως, η απόσταση AM, συναρτήσει του x, είναι:

$$AM = d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + \left(2\sqrt{x} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 4x}$$

$$= \sqrt{x^2 - 2x + 9}, x \geq 0$$

β) Η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόριζο $x^2 - 2x + 9, x \geq 0$ γίνει ελάχιστο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 - 2x + 9, x \geq 0$.

Η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x \geq 0$ με

$$g'(x) = (x^2 - 2x + 9)' = 2x - 2$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της συνάρτησης $g(x)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Για τη συνάρτηση $g(x)$ ισχύουν $g'(1) = 0$, $g'(x) < 0$ στο $[0,1)$ και $g'(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$. Επομένως, η $g(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$.

Άρα, η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη για το σημείο $M(1,2)$.

γ) Η ελάχιστη απόσταση ΑΜ ισούται με: $d(1) = \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 9} = \sqrt{8}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\frac{x^3}{3}-x-4$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) Την παράγωγο της συνάρτησης.

(Μονάδες 4)

β) Τα ακρότατα της συνάρτησης.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτόμενη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y=3x+3$.

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι η μια από τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f με συντελεστή διεύθυνσης 3 και σημείο επαφής με αρνητική τετμημένη διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}\left(3,\frac{31}{3}\right)$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-x-4\right)'=\left(\frac{x^3}{3}\right)'-(x)'-(4)'=\frac{3x^2}{3}-1-0=\frac{3x^2}{3}-1=x^2-1$.

β) Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Ακόμα $f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$\tau.\mu.$		$\tau.\varepsilon.$		

Οπότε η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=-\frac{10}{3}$ και τοπικό ελάχιστο το $f(1)=-\frac{14}{3}$.

γ)

i. Αν $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής πρέπει

$$f'(x_0)=3 \Leftrightarrow x_0^2-1=3 \Leftrightarrow x_0^2=4 \Leftrightarrow x_0=\pm 2.$$

Επομένως υπάρχουν δύο εφαπτόμενες (ε_1) και (ε_2) παράλληλες στην ευθεία $y=3x+3$ και σημεία επαφής είναι τα $\mathrm{A}'\left(-2,-\frac{14}{3}\right)$ και $\mathrm{A}\left(2,-\frac{10}{3}\right)$.

ii. Σύμφωνα με το ερώτημα γ) i. οι εφαπτόμενες της C_f με συντελεστή διεύθυνσης 3 έχουν σημεία επαφής τα $\mathrm{A}'\left(-2,-\frac{14}{3}\right)$ και $\mathrm{A}\left(2,-\frac{10}{3}\right)$. Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο $\mathrm{A}'\left(-2,-\frac{14}{3}\right)$ που έχει αρνητική τετμημένη:

(ε_1): είναι $y=3x+\beta \overset{\left(-2,-\frac{14}{3}\right)}{\Longleftrightarrow} -\frac{14}{3}=3(-2)+\beta \Leftrightarrow \beta=\frac{4}{3}$. Άρα $y=3x+\frac{4}{3}$.

Η ευθεία (ε_1) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}\left(3,\frac{31}{3}\right)$, αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση, διότι $\frac{31}{3}=3\cdot 3+\frac{4}{3}$.

ΘΕΜΑ 4

Ένα σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος του σε μέτρα (m) μετά από t δευτερόλεπτα (s) από την εκτόξευσή του δίνεται από την συνάρτηση

$$h(t) = 8t - t^2, 0 \leq t \leq 8$$

α) Να υπολογίσετε το ύψος του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s.

(Μονάδες 04)

β) Να αποδείξετε ότι η ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t δίνεται από τη συνάρτηση

$$\upsilon(t) = 8 - 2t, 0 \leq t \leq 8$$

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s.

(Μονάδες 04)

δ) Σε ποια χρονική στιγμή το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος; Ποιο είναι το μέγιστο ύψος του σώματος;

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) Το ύψος του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s είναι:

$$h(t_1) = h(2) = 8 \cdot 2 - 2^2 = 16 - 4 = 12 \text{ m}$$

β) Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο:

$$\upsilon(t) = h'(t)$$

Η παράγωγος της συνάρτησης $h(t)$ είναι:

$$h'(t) = (8t - t^2)' = (8t)' - (t^2)' = 8 \cdot 1 - 2t = 8 - 2t$$

Επομένως, $\upsilon(t) = 8 - 2t, 0 \leq t \leq 8$.

γ) Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s είναι:

$$\upsilon(t_1) = \upsilon(2) = 8 - 2 \cdot 2 = 4 \text{ m/s}$$

δ) Είναι:

$$h'(t) = 8 - 2t, 0 \leq t \leq 8$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 8 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

$$h'(t) > 0 \Leftrightarrow 8 - 2t > 0 \Leftrightarrow t < 4, \text{ επομένως } h'(t) > 0 \text{ για } 0 < t < 4$$

Έχουμε, $h'(4) = 0$, $h'(t) > 0$ για $0 < t < 4$ και $h'(t) < 0$ για $4 < t < 8$. Οπότε, το ύψος γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή $t = 4$ s.

Η μέγιστη τιμή του ύψους είναι $h(4) = 8 \cdot 4 - 4^2 = 32 - 16 = 16$ m.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, και το σημείο $A(3,0)$, όπως φαίνονται στο σχήμα. Αν $M(x, y)$ είναι τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση AM, συναρτήσει του x, είναι:

$$d(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}, x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 08)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $2x^3 + x - 3 = (x-1) \cdot (2x^2 + 2x + 3)$.

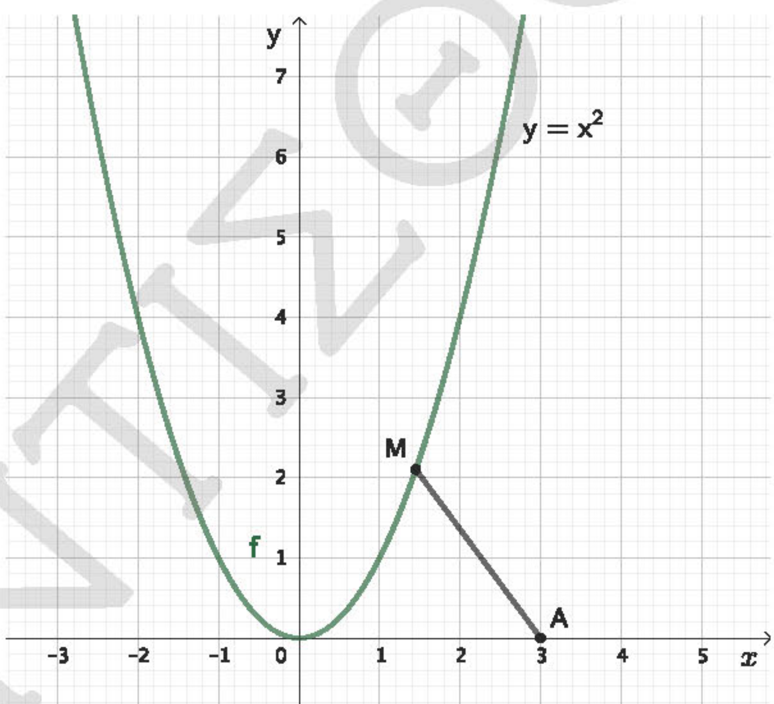
(Μονάδες 03)

ii. Να βρείτε για ποιο σημείο M η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη. Θεωρείστε ότι η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόριζο $x^4 + x^2 - 6x + 9$, $x \in \mathbb{R}$, γίνει ελάχιστο.

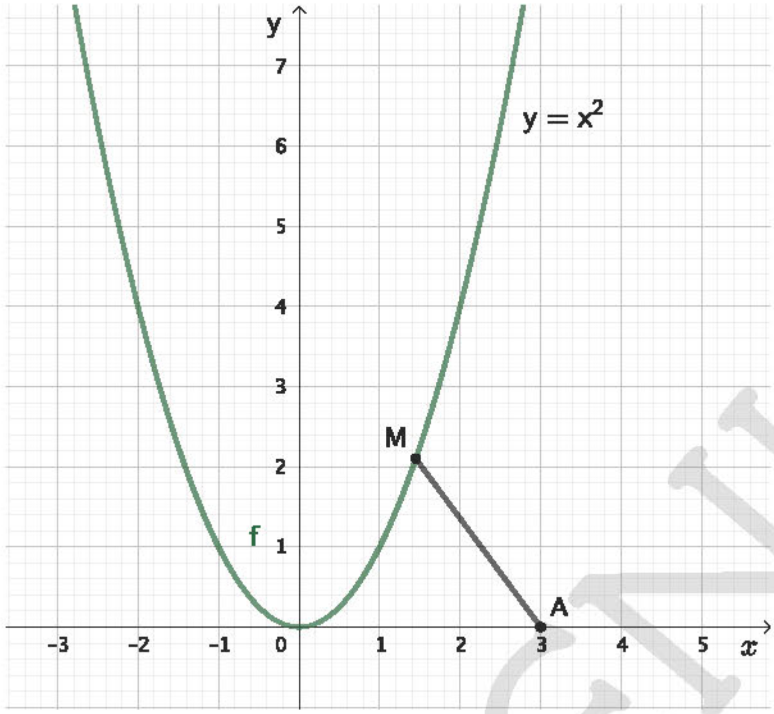
(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση AM.

(Μονάδες 06)



ΛΥΣΗ



α) Για το τυχαίο σημείο M της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι:

$$M(x,y) = (x, x^2), x \in \mathbb{R}$$

Επομένως, η απόσταση AM, συναρτήσει του x, είναι:

$$AM = d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2-0)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + x^4}$$
$$= \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}, x \in \mathbb{R}$$

β)

i. Είναι:

$$(x-1)\cdot(2x^2+2x+3) = 2x^3 + 2x^2 + 3x - 2x^2 - 2x - 3 = 2x^3 + x - 3$$

ii. Η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόριζο $x^4 + x^2 - 6x + 9$, $x \in \mathbb{R}$, γίνει ελάχιστο.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$, $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x \in \mathbb{R}$ με

$$g'(x) = (x^4 + x^2 - 6x + 9)' = 4x^3 + 2x - 6 = 2\cdot(2x^3 + x - 3)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot(2x^3 + x - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + x - 3 = 0$$

$$\overset{(i)}{\Leftrightarrow} (x-1)\cdot(2x^2+2x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ή } 2x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

(Η εξίσωση $2x^2 + 2x + 3 = 0$ είναι αδύνατη, αφού έχει διακρίνουσα $\Delta = -20 < 0$).

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2x^3 + x - 3) > 0 \Leftrightarrow 2x^3 + x - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot (2x^2 + 2x + 3) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

(Το τριώνυμο $2x^2 + 2x + 3$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού έχει διακρίνουσα $\Delta = -20 < 0$).

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της συνάρτησης $g(x)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$, αφού $g'(x) < 0$ για $x < 1$, και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$, αφού $g'(x) > 0$ για $x > 1$, και $g'(1) = 0$. Επομένως, η $g(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$.

Επομένως, η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη για το σημείο $M(1,1)$.

γ) Η ελάχιστη απόσταση AM ισούται με:

$$d(1) = \sqrt{1^4 + 1^2 - 6 \cdot 1 + 9} = \sqrt{5}$$