

Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται σε ευρώ, το ποσό που ξόδεψαν 20 μαθητές στο κυλικείο του σχολείου τους, στη διάρκεια μιας μέρας.

Ποσό σε ευρώ x_i	n_i	N_i	f_i	$f_i\%$
0	1			
1	9			
2	8			
3	2			
Σύνολο	20			

α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στην κόλλα σας, και να συμπληρώσετε τα κενά.

(Μονάδες 14)

β) Πόσοι μαθητές ξόδεψαν τη συγκεκριμένη ημέρα, το πολύ 2 ευρώ;

(Μονάδες 6)

γ) Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που ξόδεψαν τη συγκεκριμένη ημέρα, τουλάχιστον 2 ευρώ;

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $N_1 = v_1$ και $v_x = N_x - N_{x-1}$ ή $N_x = N_{x-1} + v_x$.

Επίσης $f_i = \frac{v_i}{v}$ και $f_i\% = 100 \cdot f_i$ οπότε ο πίνακας συμπληρωμένος είναι ο παρακάτω.

Ποσό σε ευρώ x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i\%$
0	1	1	0,05	5
1	9	10	0,45	45
2	8	18	0,40	40
3	2	20	0,10	10
Σύνολο	20		1	100

β) Τη συγκεκριμένη ημέρα το πολύ 2 ευρώ ξόδεψαν:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 1 + 9 + 8 = 18 \text{ μαθητές.}$$

Εναλλακτικά: $N_3 = 18$ μαθητές.

γ) Το ποσοστό των μαθητών που ξόδεψαν τη συγκεκριμένη ημέρα, τουλάχιστον 2

$$\text{ευρώ είναι: } f_3\% + f_4\% = 40 + 10 = 50\%.$$

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω πίνακα, δίνεται ο αριθμός των μαθητών ενός τμήματος του σχολείου με 25 μαθητές, που απουσίασαν από 0 έως και 5 ημέρες στη διάρκεια του προηγούμενου χειμώνα.

Ημέρες απουσίας	Αριθμός μαθητών που απουσίασε
0	10
1	2
2	2
3	κ
4	2
5	1

α) Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών κ , που απουσίασε από το σχολείο 3 ημέρες.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που δεν απουσίασε από το σχολείο.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών που απουσίασε τουλάχιστον 1 ημέρα από το σχολείο.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει: $10 + 2 + 2 + \kappa + 2 + 1 = 25 \Leftrightarrow \kappa = 25 - 17 \Leftrightarrow \kappa = 8$.

β) Το σύνολο των μαθητών του τμήματος είναι 25 και στη διάρκεια του προηγούμενου χειμώνα δεν σημείωσαν απουσίες οι 10. Οπότε το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\frac{10}{25} = 0,4 = \frac{40}{100} = 40\% \text{ των μαθητών.}$$

γ) Λόγω του ερωτήματος (α), από τον πίνακα που δόθηκε, τουλάχιστον 1 ημέρα απουσίασαν: $2 + 2 + 8 + 2 + 1 = 15$ μαθητές.

ΘΕΜΑ 2

Οι 50 εκπαιδευτικοί ενός σχολείου μιας μεγάλης πόλης, για να μεταβούν στη δουλειά τους (στο σχολείο), χρησιμοποιούν τα εξής μέσα:

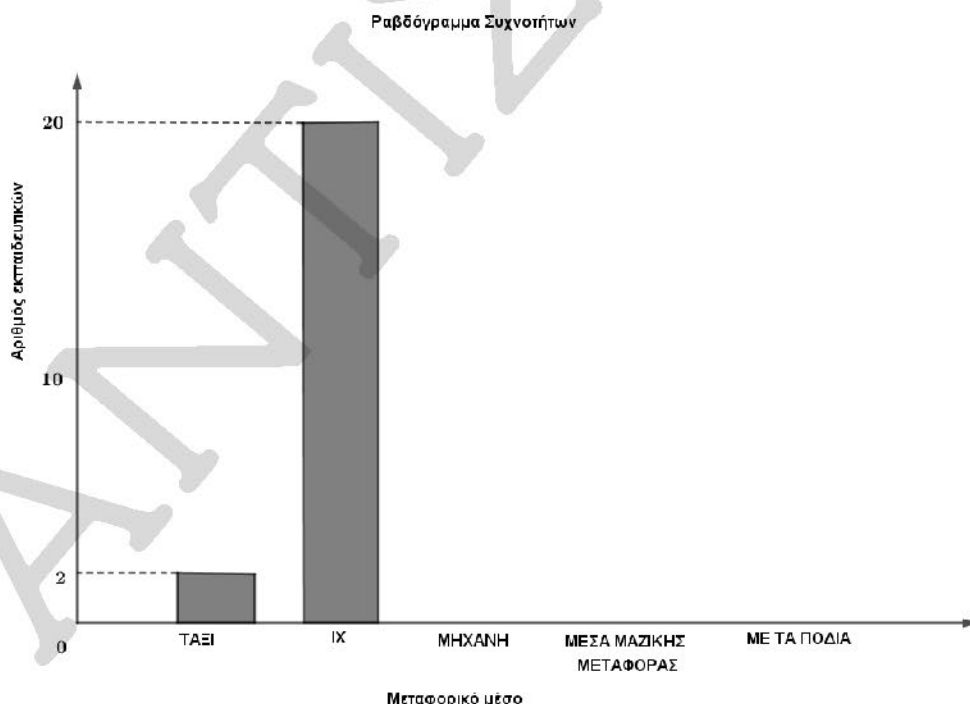
2 χρησιμοποιούν ΤΑΧΙ, 20 χρησιμοποιούν το ιδιωτικό τους ΙΧ, 10 πηγαίνουν με τη ΜΗΧΑΝΗ τους, 14 χρησιμοποιούν τα ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ και 4 που μένουν κοντά στο σχολείο, πηγαίνουν με τα ΠΟΔΙΑ.

α) Αν x_i είναι οι τιμές της μεταβλητής X : «μεταφορικό μέσο των καθηγητών» και v_i το πλήθος των καθηγητών που το χρησιμοποιεί, να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε για τα παραπάνω δεδομένα το διπλανό πίνακα.

Μεταφορικό Μέσο x_i	Αριθμός Εκπαιδευτικών v_i
ΣΥΝΟΛΟ	50

(Μονάδες 13)

β) Αφού μεταφέρετε το παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων στην κόλλα σας, να βάλετε τα αριθμητικά δεδομένα που σας χρειάζονται στον κατακόρυφο άξονα και να σχεδιάσετε τις ράβδους που λείπουν.

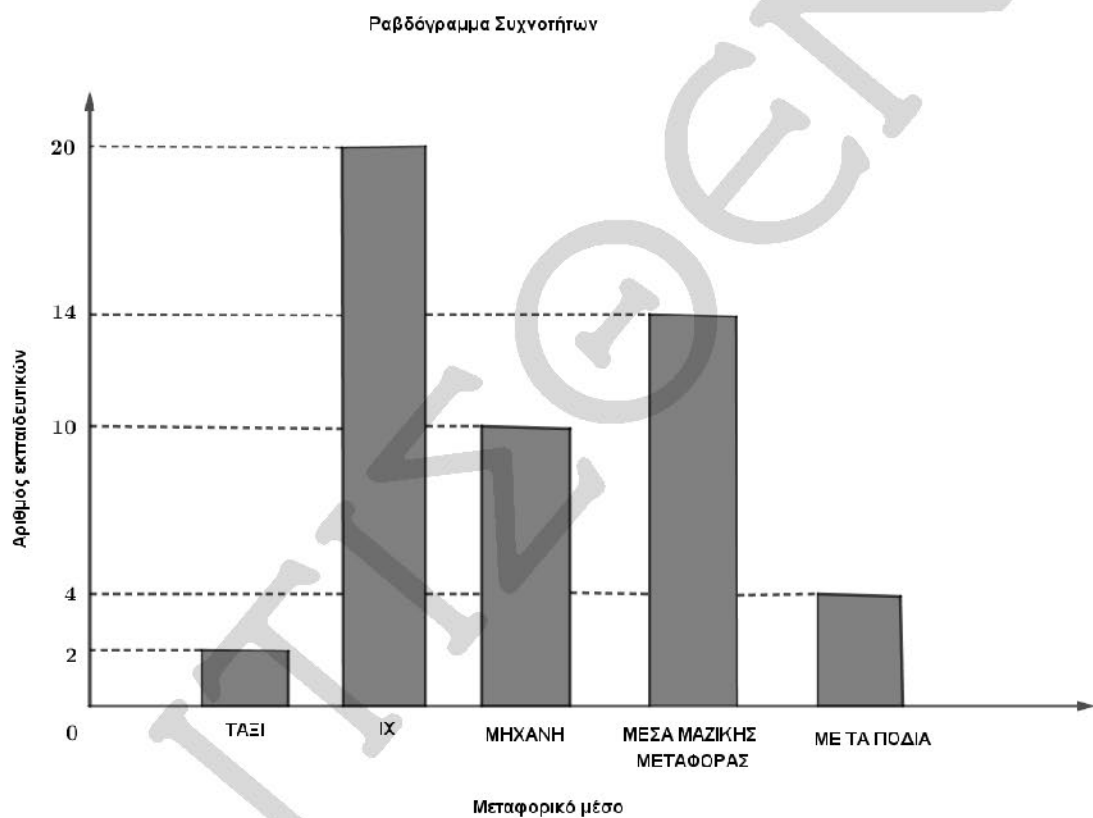


ΛΥΣΗ

α) Ο παρακάτω πίνακας είναι ο ζητούμενος.

Μεταφορικό Μέσο x_i	Αριθμός Εκπαιδευτικών v_i
ΤΑΧΙ	2
ΙΧ	20
ΜΗΧΑΝΗ	10
ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ	14
ΠΟΔΙΑ	4
ΣΥΝΟΛΟ	50

β) Το συμπληρωμένο ραβδόγραμμα είναι το παρακάτω.



ΘΕΜΑ 2

Στον επόμενο πίνακα σχετικών συχνοτήτων, φαίνεται η κλιμάκωση των γραπτών βαθμών του συνόλου των μαθητών της Γ' Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών το προηγούμενο σχολικό έτος.

Κλάσεις [-)	Σχετική Συχνότητα f%
0-4	10
4-8	10
8-12	
12-16	35
16-20	15

α) Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 8 και μικρότερο του 12.

(Μονάδες 9)

β) Αν οι μαθητές που έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 είναι 42400 να υπολογίσετε το πλήθος του συνόλου των μαθητών.

(Μονάδες 9)

γ) Πόσοι μαθητές έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16;

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ψάχνουμε το $f_3\%$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει: $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100$ ή

$$10 + 10 + f_3\% + 35 + 15 = 100 \text{ ή}$$

$$70 + f_3\% = 100 \text{ ή } f_3\% = 100 - 70 = 30. \text{ Άρα } f_3\% = 30$$

Κλάσεις [-)	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
0-4	10
4-8	10
8-12	30
12-16	35
16-20	15

β) Το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 είναι:

$35\% + 15\% = 50\%$, είναι δηλαδή το 50% του συνόλου και επειδή είναι 42400 μαθητές άρα το σύνολο των μαθητών (το 100%) θα είναι: $42400 \cdot 2 = 84800$ μαθητές.

γ) Το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16 είναι:

15%. Το σύνολο των μαθητών είναι 84800 από ερώτημα β), συνεπώς το πλήθος των μαθητών που αναζητούμε είναι το 15% του συνόλου, δηλαδή $15\% \cdot 84800 = 12720$ μαθητές.

ΘΕΜΑ 2

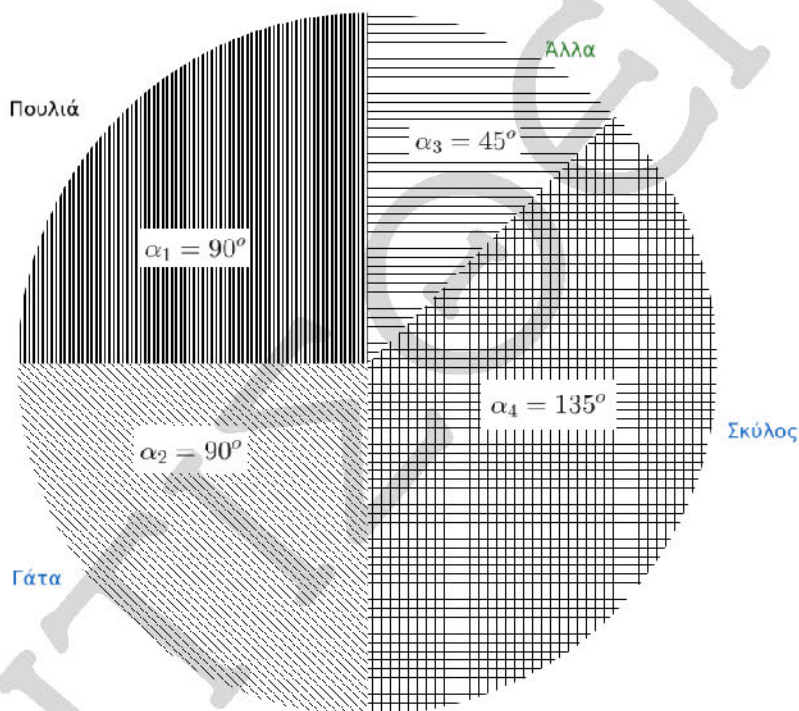
Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα φαίνονται σε μοίρες τα μέτρα των γωνιών $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ τα οποία αντιστοιχούν στους τέσσερις κυκλικούς τομείς, σχετικά με το αγαπημένο κατοικίδιο των μαθητών της Γ' λυκείου ενός ΕΠΑΛ.

α) Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_3 , αυτών που προτιμούν πουλιά ή άλλα κατοικίδια αντίστοιχα.

(Μονάδες 12)

β) Αν το σύνολο των μαθητών που ρωτήθηκαν ήταν $n = 120$, να βρείτε πόσοι μαθητές της τάξης αυτής προτιμούν τα πουλιά για κατοικίδιο.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Για καθέναν από τους κυκλικούς τομείς του διαγράμματος ισχύει ότι το αντίστοιχο τόξο a_i και η σχετική συχνότητα f_i συνδέονται από τον τύπο:

$$f = \frac{a_i}{360^\circ}, i = 1,2,3,4.$$

Οπότε για καθεμία από τις ζητούμενες σχετικές συχνότητες θα έχουμε:

$$\text{Πουλιά: } f_1 = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\text{Άλλα: } f_3 = \frac{45}{360} = \frac{1}{8} = 0,125$$

β) Αν v_i είναι η συχνότητα των απαντήσεων για καθένα από τα κατοικίδια, τότε ισχύει ότι $f = \frac{v_i}{v}$.

Οπότε, αν v_1 είναι το πλήθος των μαθητών της τάξης αυτής που προτιμούν τα πουλιά για κατοικίδιο, τότε:

$$v_1 = f_1 \cdot v = 0,25 \cdot 120 = 30 \text{ μαθητές.}$$

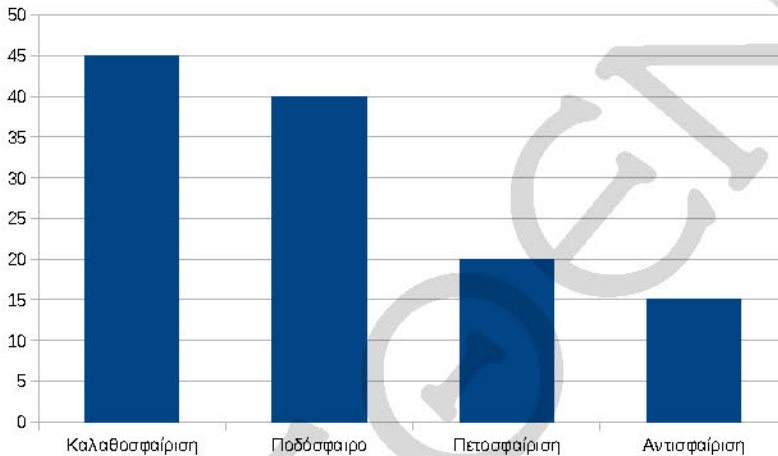
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων φαίνεται πόσοι μαθητές της Γ' Λυκείου ενός ΕΠΑΛ επέλεξαν καθένα από τέσσερα αθλήματα για να διαγωνιστούν στο σχολικό πρωτάθλημα. Αξίζει να σημειωθεί ότι καθένας από τους μαθητές επέλεξε ένα μόνο από τα αθλήματα.

α) Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών της Γ' λυκείου αυτού του ΕΠΑΛ.
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3, f_4 , καθενός από τα αθλήματα που επέλεξαν οι μαθητές.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Από το ραβδόγραμμα παρατηρούμε ότι οι μαθητές επέλεξαν τα αθλήματα με τις παρακάτω συχνότητες:

Καλαθοσφαίριση: $v_1=45$, Ποδόσφαιρο: $v_2=40$, Πετοσφαίριση: $v_3=20$ και Αντισφαίριση: $v_4=15$.

Οπότε το σύνολο των μαθητών της Γ' λυκείου του συγκεκριμένου σχολείου ήταν:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 45 + 40 + 20 + 15 = 120 \text{ μαθητές.}$$

β) Για καθένα από τα αθλήματα η συχνότητα v_i και η σχετική συχνότητα f_i συνδέονται από τον τύπο:

$$f_i = \frac{v_i}{v}.$$

Οπότε για καθεμία από τις ζητούμενες σχετικές συχνότητες θα έχουμε:

Καλαθοσφαίριση: $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8} = 0,375$

Ποδόσφαιρο: $f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3} = 0,33\dots$

Πετοσφαίριση: $f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} = 0,16\dots$

Αντισφαίριση: $f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8} = 0,125$

ΘΕΜΑ 2

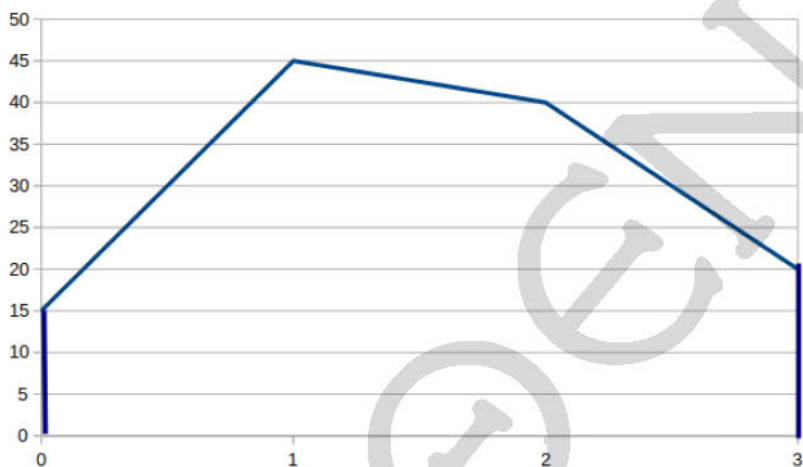
Στο παρακάτω πολύγωνο συχνοτήτων φαίνεται πόσοι μαθητές ενός δείγματος της Γ' Λυκείου ενός ΕΠΑΛ βαθμολογήθηκαν με άριστα σε 0, 1, 2 ή 3 μαθήματα από τα τέσσερα των πανελλαδικών εξετάσεων.

α) Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος αυτού.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3, f_4 , του πλήθους των μαθητών, οι οποίοι βαθμολογήθηκαν με άριστα σε 0, 1, 2 ή 3 μαθήματα αντίστοιχα.

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Από το πολύγωνο συχνοτήτων παρατηρούμε ότι οι μαθητές που βαθμολογήθηκαν με άριστα είναι:

Σε κανένα μάθημα: $v_1=15$, Σε ένα μάθημα: $v_2=45$,

Σε δύο μαθήματα: $v_3=40$ και σε τρία μαθήματα: $v_4=20$.

Οπότε το σύνολο των μαθητών του συγκεκριμένου δείγματος είναι :

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 45 + 40 + 20 = 120 \text{ μαθητές.}$$

β) Για καθεμία ομάδα μαθητών του δείγματος, η συχνότητα v_i και η σχετική συχνότητα f_i συνδέονται από τον τύπο:

$$f_i = \frac{v_i}{v}.$$

Οπότε για καθεμία από τις σχετικές συχνότητες θα έχουμε:

Άριστα σε κανένα μάθημα: $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8} = 0,125$

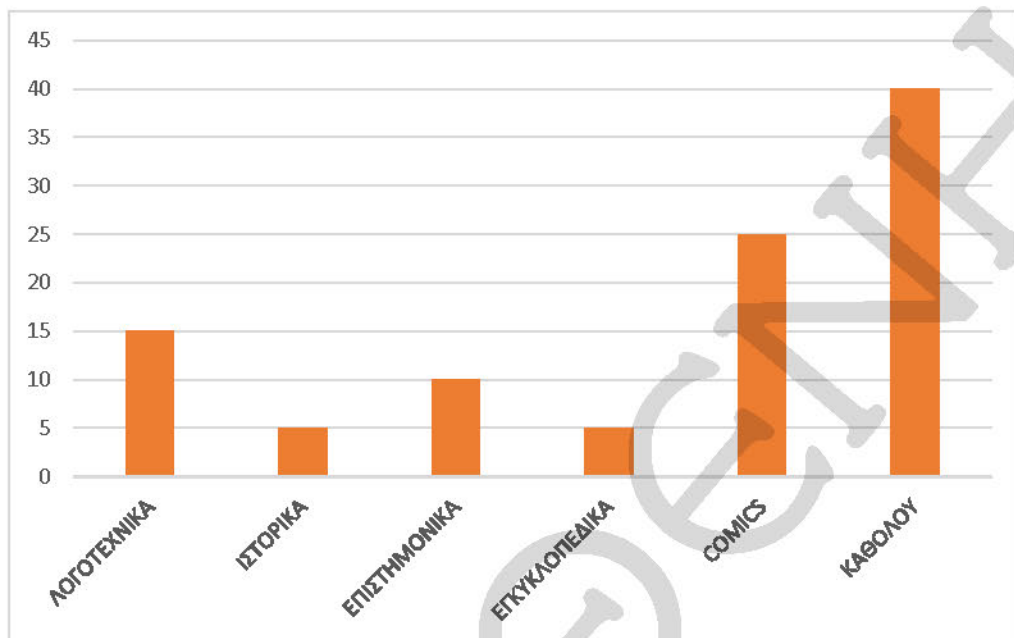
Άριστα σε ένα μάθημα: $f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8} = 0,375$

Άριστα σε δύο μαθήματα: $f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3} = 0,33\dots$

Άριστα σε τρία μαθήματα: $f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} = 0,16\dots$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων για το διάβασμα βιβλίων μαθητών γυμνασίου. Κάθε μαθητής απάντησε για ένα μόνο είδος βιβλίου ή «ΚΑΘΟΛΟΥ» αν δεν διαβάζει κανένα βιβλίο. Ο κατακόρυφος άξονας περιέχει τον αριθμό των μαθητών και ο οριζόντιος άξονας τα είδη των βιβλίων.



α) Ποιο είναι το μέγεθος του δείγματος των μαθητών γυμνασίου που συμμετέχουν στην έρευνα, όπως φαίνεται από το ραβδόγραμμα;

(Μονάδες 7)

β) Πόσοι μαθητές διαβάζουν λογοτεχνικά βιβλία και πόσοι επιστημονικά;

(Μονάδες 4)

γ)

i) Πόσοι μαθητές διαβάζουν βιβλία;

(Μονάδες 6)

ii) Τι ποσοστό μαθητών δεν διαβάζει καθόλου βιβλία;

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε το μέγεθος του δείγματος των μαθητών που συμμετέχουν στο ραβδόγραμμα αρκεί να αθροίσουμε τις συχνότητες των μαθητών που διαβάζουν τα διάφορα είδη βιβλίων δηλαδή τα ύψη των ράβδων.

Επομένως, $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 15 + 5 + 10 + 5 + 25 + 40 = 100$. Άρα το μέγεθος του δείγματος είναι $v = 100$.

β) Οι μαθητές που διαβάζουν λογοτεχνικά είναι 15 και επιστημονικά είναι 10 διότι οι αντίστοιχες συχνότητες των μαθητών είναι 15 και 10.

γ)

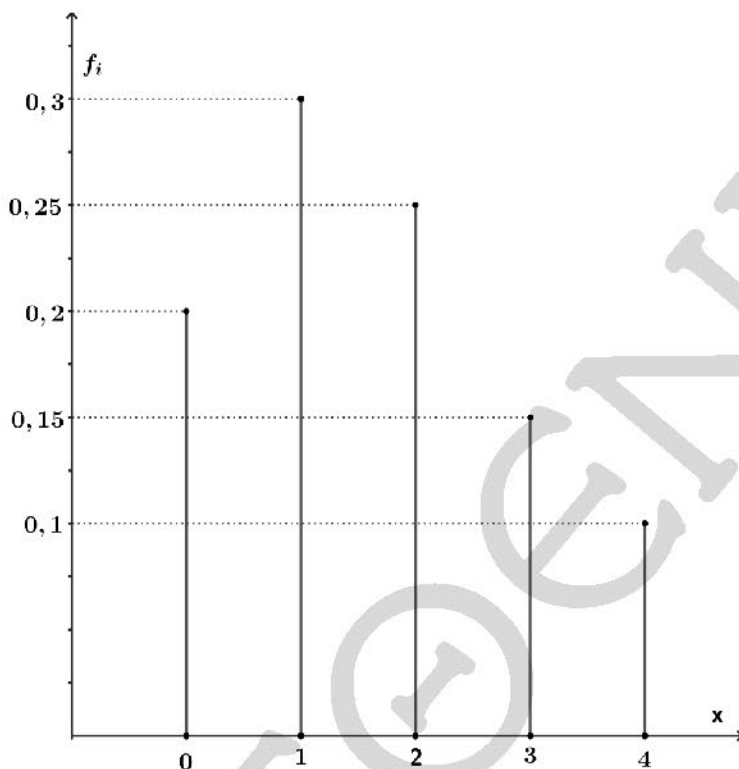
i) Για να βρούμε πόσοι μαθητές διαβάζουν βιβλία αρκεί από το μέγεθος του δείγματος $v = 100$ να αφαιρέσουμε τους μαθητές που δεν διαβάζουν κανένα βιβλίο και οι οποίοι όπως φαίνεται από το ραβδόγραμμα είναι 40, αφού η συχνότητα της αντίστοιχης ράβδου είναι ίση με 40.

Επομένως, $100 - 40 = 60$ μαθητές διαβάζουν βιβλία.

ii) Για να βρούμε το ποσοστό των μαθητών που δεν διαβάζουν βιβλία αρκεί να βρούμε την σχετική συχνότητα επί τοις εκατό, δηλαδή $f_6 = \frac{40}{100} = 0.40$. Άρα $f_6\% = 40$.

ΘΕΜΑ 2

Ο αριθμός των ετήσιων επισκέψεων (άξονας των x) ενός δείγματος 160 μαθητών ενός σχολείου στα διάφορα μουσεία της χώρας δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



Για το παραπάνω δείγμα βρείτε:

α) το ποσοστό των μαθητών που έκανε ακριβώς δύο επισκέψεις ετησίως.

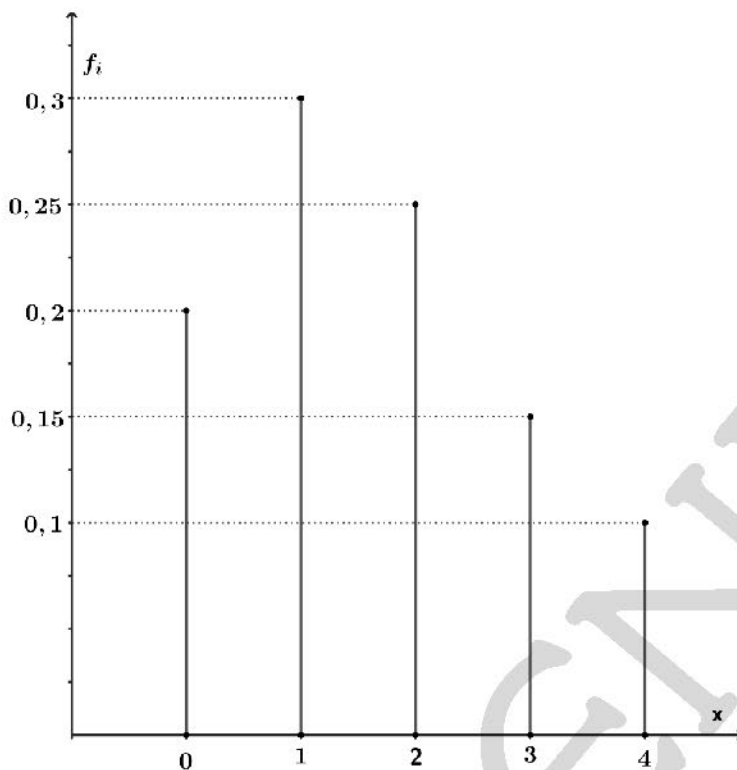
(Μονάδες 8)

β) πόσοι μαθητές πραγματοποίησαν ακριβώς μία επίσκεψη ετησίως.

(Μονάδες 8)

γ) το ποσοστό των μαθητών που έκανε δύο τουλάχιστον επισκέψεις ετησίως.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ

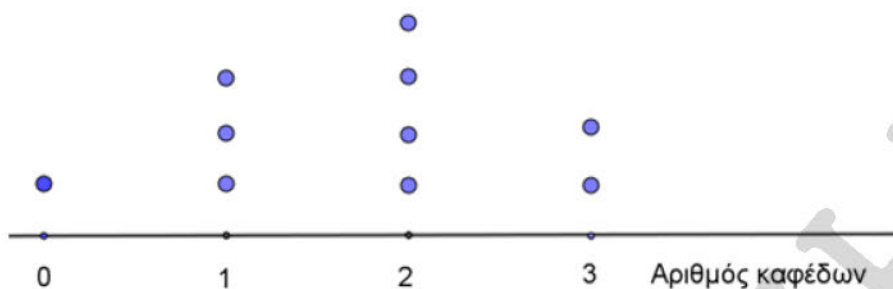
α) Από το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων παρατηρούμε ότι το 0,25 του συνόλου των μαθητών έκανε ακριβώς 2 επισκέψεις ετησίως στα μουσεία της χώρας. Άρα το 25% των μαθητών ανήκουν σε αυτή την κατηγορία.

β) Από το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων παρατηρούμε ότι το 0,3 του συνόλου των μαθητών πραγματοποίησε ακριβώς μία επίσκεψη ετησίως στα μουσεία της χώρας, άρα οι μαθητές αυτοί θα είναι $0,3 \cdot 160 = 48$.

γ) Δύο τουλάχιστον επισκέψεις σημαίνει δύο ή τρεις ή τέσσερις επισκέψεις, άρα το ποσοστό των μαθητών που έκανε τουλάχιστον 2 επισκέψεις ετησίως σε μουσεία της χώρας θα είναι: $0,25 + 0,15 + 0,1 = 0,5$. Το 50% των μαθητών έκανε δύο τουλάχιστον επισκέψεις ετησίως στα μουσεία της χώρας.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σημειόγραμμα, βλέπουμε τον αριθμό των καφέδων που πίνουν οι 10 υπάλληλοι μιας ιδιωτικής εταιρείας κάθε ημέρα στην εργασία τους.



α) Μελετώντας το σημειόγραμμα να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός καφέδων x_i	Αριθμός υπαλλήλων n_i	Σχετική συχνότητα f_i
0		
1		
2		
3		
ΣΥΝΟΛΟ	10	1

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων της εταιρείας, που πίνουν κάθε ημέρα στην εργασία τους το πολύ 2 καφέδες.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας, που πίνουν κάθε ημέρα στην εργασία τους 3 καφέδες.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Από τη μελέτη του σημειογράμματος, συμπληρώνουμε τη στήλη των συχνοτήτων

v_i . Επίσης από τον τύπο υπολογισμού της σχετικής συχνότητας $f_i = \frac{v_i}{v}$, προκύπτει η

συμπλήρωση της στήλης των σχετικών συχνοτήτων f_i . Οπότε ο πίνακας είναι:

Αριθμός καφέδων x_i	Αριθμός υπαλλήλων v_i	Σχετική συχνότητα f_i
0	1	0,1
1	3	0,3
2	4	0,4
3	2	0,2
ΣΥΝΟΛΟ	10	1

β) Ο ζητούμενος αριθμός των υπαλλήλων που κάθε ημέρα στην εργασία του πίνει το πολύ 2 καφέδες είναι: $v_1 + v_2 + v_3 = 1 + 3 + 4 = 8$.

γ) Λόγω του ερωτήματος (α), η σχετική συχνότητα των υπαλλήλων της εταιρείας, που πίνουν κάθε ημέρα στην εργασία τους 3 καφέδες είναι $f_4 = 0,2$.

Οπότε $f_4 \% = 100 \cdot f_4 = 20\%$ είναι το ζητούμενο ποσοστό.

ΘΕΜΑ 3

Οι 50 εκπαιδευτικοί ενός σχολείου μιας μεγάλης πόλης, για να μεταβούν στη δουλειά τους (στο σχολείο), χρησιμοποιούν τα εξής μέσα:

2 χρησιμοποιούν TAXI, 20 χρησιμοποιούν το ιδιωτικό τους ΙΧ, 10 πηγαίνουν με τη ΜΗΧΑΝΗ τους, 14 χρησιμοποιούν τα ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ και 4 που μένουν κοντά στο σχολείο, πηγαίνουν με τα ΠΟΔΙΑ.

α) Αν x_i είναι οι τιμές της μεταβλητής X : «μεταφορικό μέσο των καθηγητών» και v_i το πλήθος των καθηγητών που το χρησιμοποιεί, να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε για τα παραπάνω δεδομένα το διπλανό πίνακα.

Μεταφορικό Μέσο x_i	Αριθμός Εκπαιδευτικών v_i
ΣΥΝΟΛΟ	50

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχετική συχνότητα για το κάθε μέσο μεταφοράς και να γράψετε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που χρησιμοποιεί το κάθε μέσο.

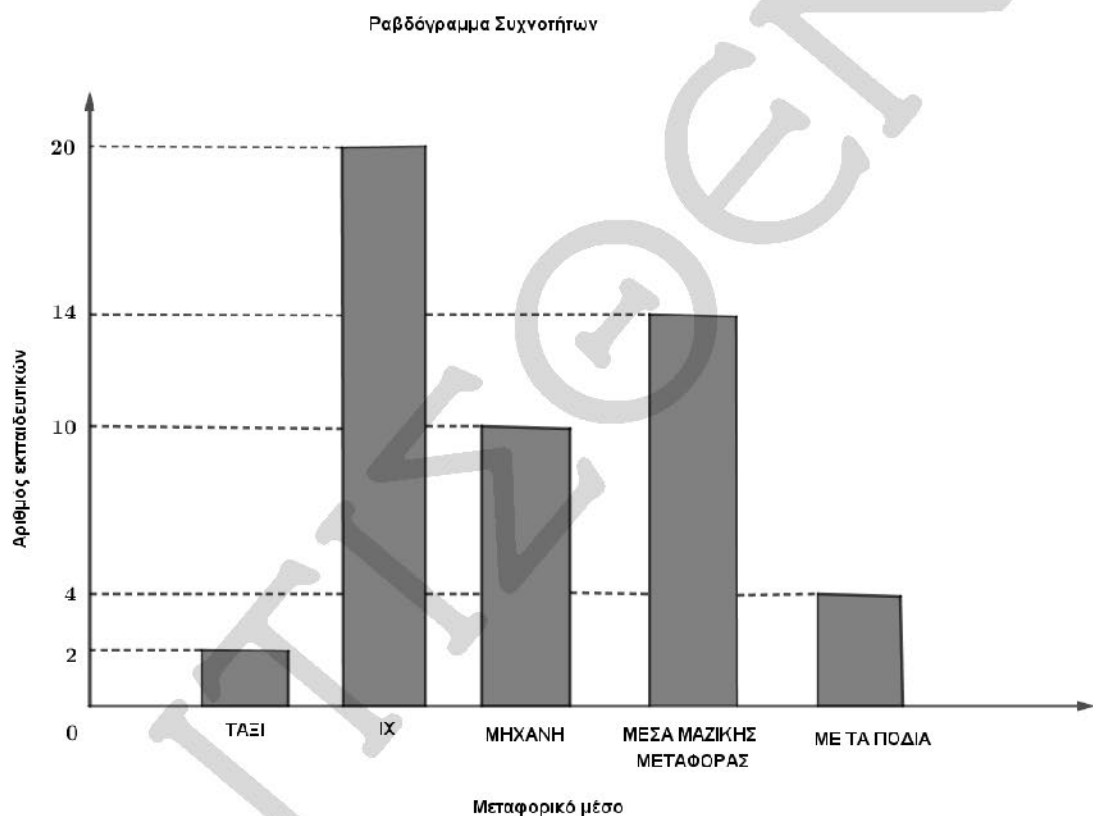
(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Ο παρακάτω πίνακας είναι ο ζητούμενος.

Μεταφορικό Μέσο x_i	Αριθμός Εκπαιδευτικών v_i
ΤΑΧΙ	2
ΙΧ	20
ΜΗΧΑΝΗ	10
ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ	14
ΠΟΔΙΑ	4
ΣΥΝΟΛΟ	50

β) Το ζητούμενο ραβδόγραμμα είναι το παρακάτω.



γ) Είναι: $f_i = \frac{v_i}{v}$ και $f_i\% = 100f_i$ οπότε:

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{2}{50} = 0,04 \text{ οπότε } f_1\% = 4, \text{ άρα το } 4\% \text{ των εκπαιδευτικών χρησιμοποιεί}$$

ΤΑΧΙ.

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{20}{50} = 0,4 \text{ οπότε } f_2\% = 40, \text{ άρα το } 40\% \text{ των εκπαιδευτικών χρησιμοποιεί το}$$

ιδιωτικό ΙΧ.

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{10}{50} = 0,2 \text{ οπότε } f_3\% = 20, \text{ άρα το } 20\% \text{ των εκπαιδευτικών χρησιμοποιεί τη}$$

ΜΗΧΑΝΗ του.

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{14}{50} = 0,28 \text{ οπότε } f_4\% = 28, \text{ άρα το } 28\% \text{ των εκπαιδευτικών χρησιμοποιεί}$$

τα ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ.

$$f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{4}{50} = 0,08 \text{ οπότε } f_5\% = 8, \text{ άρα το } 8\% \text{ των εκπαιδευτικών πηγαίνει στο}$$

σχολείο με τα ΠΟΔΙΑ.

ΘΕΜΑ 4

Οι 20 μαθητές της ΣΤ' Δημοτικού, ενός σχολείου, που πήραν μέρος σε ένα ετήσιο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, πήραν τους παρακάτω βαθμούς (κλίμακα 0-10).

4 10 8 8 5 6 9 7 8 9 10 9 5 6 6 7 8 8 7 6

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Βαθμός				
x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Σύνολο				

(Μονάδες 9)

β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα των συχνοτήτων ν_i , καθώς και το διάγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν η διεύθυνση του σχολείου θελήσει να βραβεύσει τους μαθητές που πέτυχαν επίδοση μεγαλύτερη ή ίση του 8, πόσους μαθητές θα βραβεύσει;

(Μονάδες 5)

δ) Αν η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, βραβεύσει το 25% των μαθητών που πήραν μέρος στο διαγωνισμό, τι επίδοση πρέπει να έχει κάποιος μαθητής για να βραβευτεί;

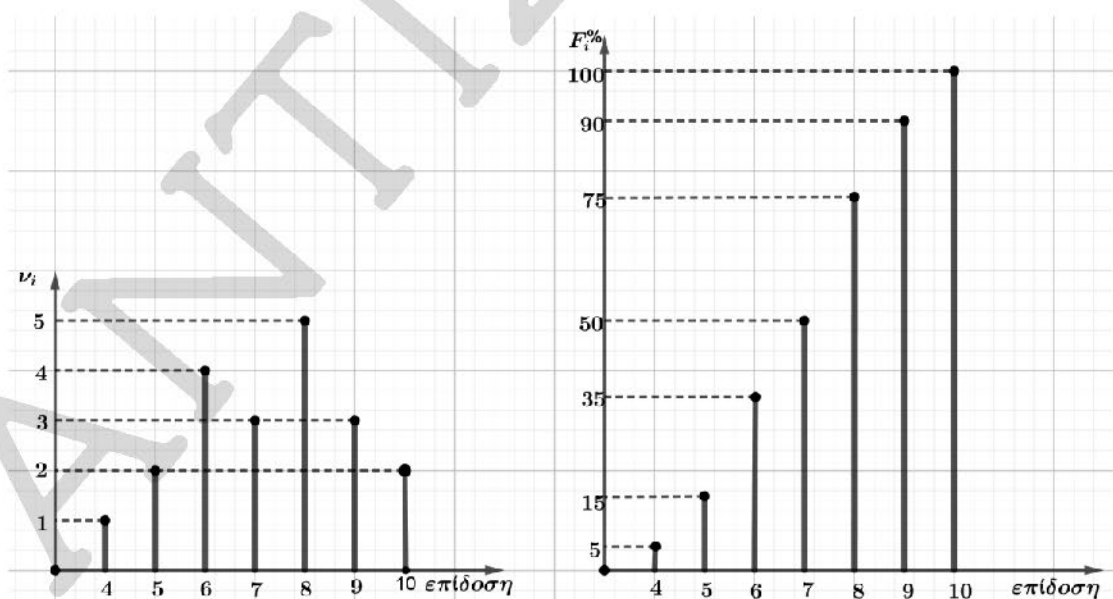
(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Κάνοντας διαλογή στους βαθμούς, συμπληρώνουμε στον πίνακα που δόθηκε τη στήλη των v_i . Γνωρίζουμε ότι $N_1 = v_1$ και $v_x = N_x - N_{x-1}$, οπότε συμπληρώνουμε και τη στήλη των N_i . Επίσης είναι $f_i = \frac{v_i}{v}$ και $f_i\% = 100 \cdot f_i$, οπότε συμπληρώνουμε τη στήλη των $f_i\%$. Τέλος $F_1\% = f_1\%$ και $F_x\% = F_{x-1}\% + f_x\%$, οπότε ο πίνακας συμπληρωμένος είναι ο παρακάτω.

Βαθμός				
x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
4	1	1	5	5
5	2	3	10	15
6	4	7	20	35
7	3	10	15	50
8	5	15	25	75
9	3	18	15	90
10	2	20	10	100
Σύνολο	20		100	

β) Λόγω του ερωτήματος (α), τα ζητούμενα διαγράμματα συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων είναι τα παρακάτω:



γ) Λόγω του ερωτήματος (α), βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 8 πέτυχαν $5 + 3 + 2 = 10$ μαθητές. Αυτούς θα βραβεύσει η διεύθυνση του σχολείου. 26

δ) Λόγω του ερωτήματος (α), είναι $f_9\% + f_{10}\% = 15 + 10 = 25\%$. Επομένως η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, θα βραβεύσει τους μαθητές που πέτυχαν επίδοση 9 ή 10.

ΘΕΜΑ 4

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των παγωτών που κατανάλωσαν οι μαθητές της Γ' τάξης ενός σχολείου στη διάρκεια της πενθήμερης εκδρομής τους.

Αριθμός Παγωτών x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0					
1					70
2	10				90
3			10		100
Σύνολο			100		

Δίνεται το $f_4\% = 10$ και ότι το 40% των μαθητών δεν έφαγε παγωτό.

α) Να δείξετε ότι η αθροιστική σχετική συχνότητα $F_1\% = 40$ και η σχετική συχνότητα $f_3 = 0,2$.

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι το πλήθος των μαθητών που συμμετείχαν στην εκδρομή, είναι $n = 50$.

(Μονάδες 6)

γ) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

(Μονάδες 7)

δ) Πόσοι μαθητές έφαγαν τουλάχιστον ένα παγωτό;

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Δίνεται ότι το 40% των μαθητών δεν έφαγε παγωτό. Άρα $f_1\% = 40$. Όμως $F_1\% = f_1\%$, επομένως $F_1\% = 40$.

Γνωρίζουμε ότι $F_i\% = 100F_i \Leftrightarrow F_i = \frac{F_i\%}{100}$, οπότε συμπεραίνουμε ότι: $F_2 = 0,7$ και

$F_3 = 0,9$. Επίσης γνωρίζουμε ότι: $f_x = F_x - F_{x-1}$ οπότε $f_3 = F_3 - F_2 = 0,9 - 0,7 = 0,2$.

β) Είναι: $f_3 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow v = \frac{v_3}{f_3} = \frac{10}{0,2} = 50$, είναι το πλήθος των μαθητών που συμμετείχαν

στην εκδρομή.

γ) Είναι $f_x = F_x - F_{x-1}$, $f_i\% = 100f_i$, $v_i = v \cdot f_i$, $v_1 = N_1$ και $v_x = N_x - N_{x-1}$

($x = 2, 3, 4$) οπότε ο πίνακας που δόθηκε συμπληρωμένος είναι ο παρακάτω.

Αριθμός Παγωτών x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	20	0,4	40	10	40
1	15	0,3	30	35	70
2	10	0,2	20	45	90
3	5	0,1	10	50	100
Σύνολο	50	1	100		

δ) Λόγω του ερωτήματος (γ) οι μαθητές που έφαγαν ένα τουλάχιστον παγωτό είναι:

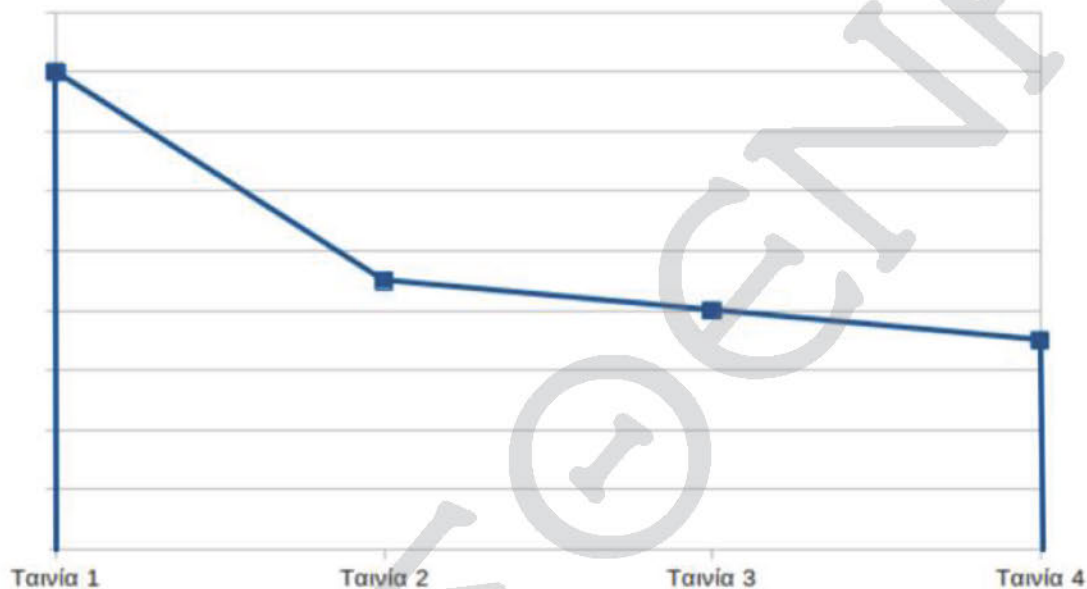
$$15 + 10 + 5 = 30.$$

ΘΕΜΑ 4

Σε έναν κινηματογράφο τα εισιτήρια που έκοψαν τέσσερις ταινίες τον μήνα Νοέμβριο φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Ταινία 1	150
Ταινία 2	130
Ταινία 3	70
Ταινία 4	50

α) Ένας μαθητής κατασκεύασε το επόμενο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων % για τους θεατές που παρακολούθησαν τον μήνα Νοέμβριο τις παραπάνω ταινίες:



Να αιτιολογήσετε αν το πολύγωνο αυτό είναι σωστό ή λανθασμένο.

(Μονάδες 8)

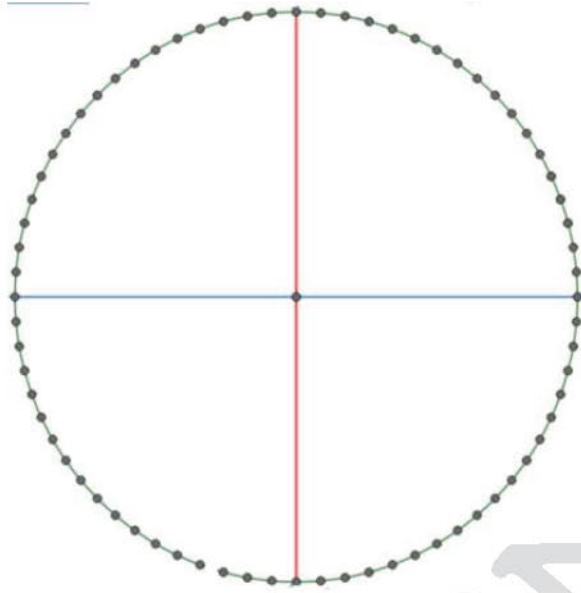
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ταινία	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα f_i
Ταινία 1	150	
Ταινία 2	130	
Ταινία 3	70	
Ταινία 4	50	
Σύνολο		

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες τη γωνία που θα αντιστοιχεί σε ένα κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για καθεμία από τις παραπάνω ταινίες. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε ένα κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, χρησιμοποιώντας τον παρακάτω κυκλικό δίσκο, ο οποίος είναι χωρισμένος σε τόξα 5° .

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Το διάγραμμα που κατασκεύασε ο μαθητής είναι λανθασμένο, καθώς η 1η ταινία φαίνεται να έχει σχεδόν διπλάσιο ποσοστό από τη 2η ταινία, όταν το πλήθος των εισιτηρίων που έκοψε καθεμία από αυτές είναι πολύ πιο κοντά αναλογικά.

β) Το σύνολο των εισιτηρίων των τεσσάρων ταινιών ήταν: $n=150+130+70+50=400$

Υπολογίζουμε τις σχετικές συχνότητες των τεσσάρων ταινιών και έχουμε:

$$f_1 = \frac{150}{400} = 0,375 \quad f_2 = \frac{130}{400} = 0,325$$
$$f_3 = \frac{70}{400} = 0,175 \quad f_4 = \frac{50}{400} = 0,125$$

Οπότε ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

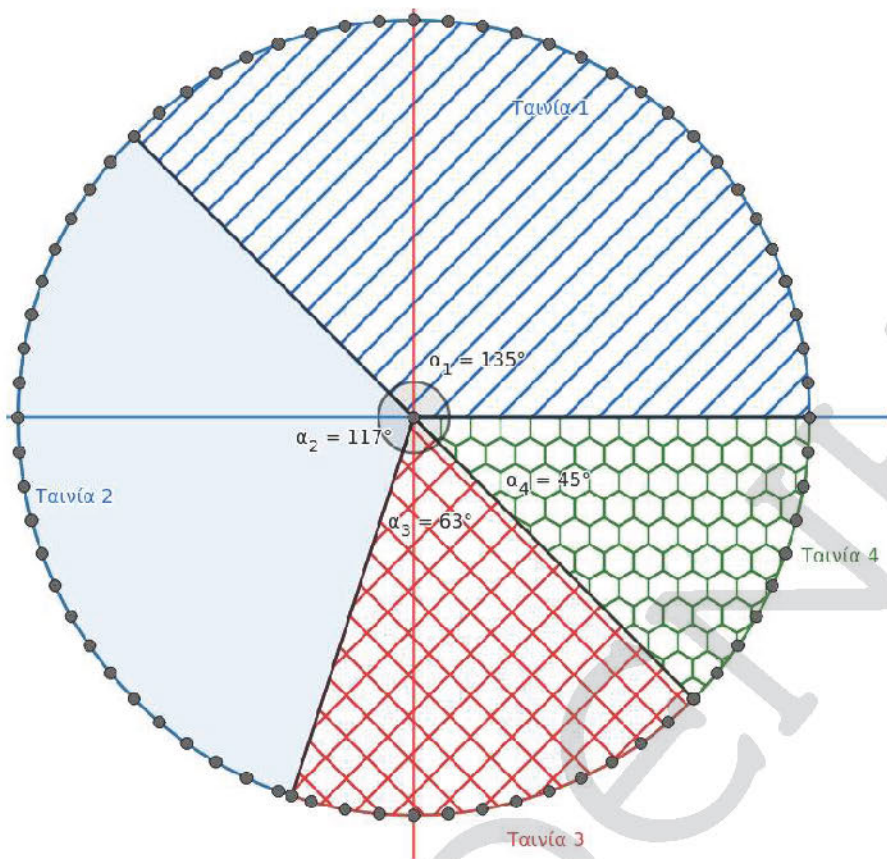
Ταινία	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα f_i
Ταινία 1	150	0,375
Ταινία 2	130	0,325
Ταινία 3	70	0,175
Ταινία 4	50	0,125
Σύνολο	400	1

γ) Για να κατασκευάσουμε το κυκλικό διάγραμμα θα πρέπει να χωρίσουμε τον κύκλο σε τόξα ανάλογα με τη σχετική συχνότητα καθεμιάς από τις ταινίες, εφόσον $a_i = 360^\circ \cdot f_i$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε πόσες μοίρες είναι το τόξο του κάθε τομέα για κάθε ένα από τα κυκλικά τμήματα που θα χωρίσουμε τον κυκλικό δίσκο:

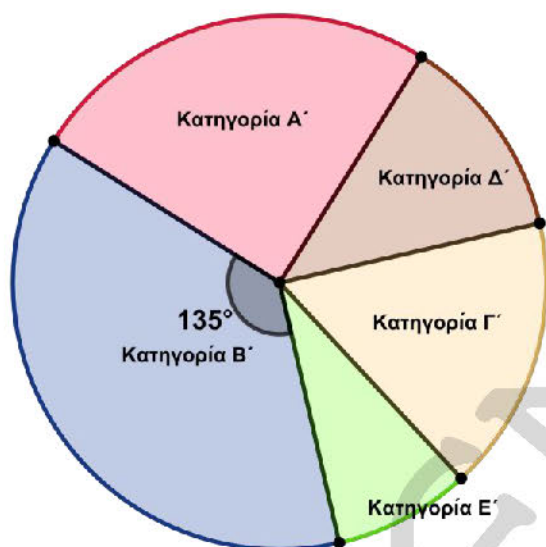
$$a_1 = 360^\circ \cdot f_1 = \frac{360 \cdot 37,5}{100} = 135^\circ \quad a_2 = 360^\circ \cdot f_2 = \frac{360 \cdot 32,5}{100} = 117^\circ$$
$$a_3 = 360^\circ \cdot f_3 = \frac{360 \cdot 17,5}{100} = 63^\circ \quad a_4 = 360^\circ \cdot f_4 = \frac{360 \cdot 12,5}{100} = 45^\circ.$$

Οπότε το κυκλικό διάγραμμα θα είναι:



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 1200 εργαζομένων μιας επιχείρησης χωρισμένο σε πέντε κατηγορίες.



Α' Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου

Β' Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου

Γ' Κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανώτατης Εκπαίδευσης

Δ' Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου

Ε' Κατηγορία: Κάτοχοι Διδακτορικού Τίτλου

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνο από τις κατηγορίες αυτές.

Στις κατηγορίες Α' και Δ' ανήκει το 25% και το 12,5% των εργαζομένων αντίστοιχα.

Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Β' κατηγορίας είναι 135°.

Τέλος οι εργαζόμενοι της Γ' κατηγορίας είναι διπλάσιοι από τους εργαζόμενους της Ε' κατηγορίας.

α) Να αποδειχθεί ότι οι εργαζόμενοι στην κατηγορία Β' είναι 450.

(Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων σε κάθε κατηγορία.

(Μονάδες 8)

γ)

ι. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

(Μονάδες 9)

- ii. Εάν συνταξιοδοτηθούν όλοι οι εργαζόμενοι της κατηγορίας Γ' τι ποσοστό των εργαζομένων της εταιρείας θα αντιπροσωπεύουν πλέον οι εργαζόμενοι της κατηγορίας Ε';

(Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζομένους της κατηγορίας Β' γνωρίζουμε ότι είναι 135° . Το κυκλικό διάγραμμα αντιστοιχεί σε 360° , συνεπώς η κατηγορία Β' θα είναι το $\frac{135}{360} = 0,375$ του συνόλου ή από τον τύπο $a_i = v_i \cdot \frac{360^\circ}{v}$ =

$360^\circ \cdot f_i$ για την κατηγορία Β' έχουμε: $135^\circ = 360^\circ \cdot f_B \Leftrightarrow f_B = \frac{135^\circ}{360^\circ} = 0,375$.

Συνεπώς οι εργαζόμενοι που ανήκουν στην κατηγορία Β' θα είναι το 37,5% του συνόλου δηλαδή $0,375 \cdot 1200 = 450$ εργαζόμενοι.

β) Οι εργαζόμενοι που ανήκουν στην κατηγορία Α' αντιστοιχούν στο 25% του συνόλου δηλαδή $0,25 \cdot 1200 = 300$ εργαζόμενοι.

Οι εργαζόμενοι που ανήκουν στην κατηγορία Δ' αντιστοιχούν στο 12,5% του συνόλου δηλαδή οι μισοί της κατηγορίας Α', άρα 150 εργαζόμενοι.

Όλοι μαζί είναι 1200 και μέχρι τώρα έχουμε βρει:

Κατηγορία Α' = 300

Κατηγορία Β' = 450

Κατηγορία Γ' =

Κατηγορία Δ' = 150

Κατηγορία Ε' =

Γνωρίζουμε όμως ότι οι εργαζόμενοι της κατηγορίας Γ' (έστω $2x$) είναι διπλάσιοι από αυτούς της κατηγορίας Ε' (έστω x) συνεπώς θα έχουμε:

$$300 + 450 + 2x + 150 + x = 1200 \Leftrightarrow 900 + 3x = 1200 \Leftrightarrow 3x = 1200 - 900 \Leftrightarrow 3x = 300 \Leftrightarrow x = 100,$$

άρα:

Κατηγορία Γ' = 200

Κατηγορία Ε' = 100

γ)

ι. Από το β) έχουμε για το πλήθος των εργαζομένων σε κάθε κατηγορία τα εξής:

Κατηγορία Α' 300 εργαζόμενοι, άρα $v_1 = 300$.

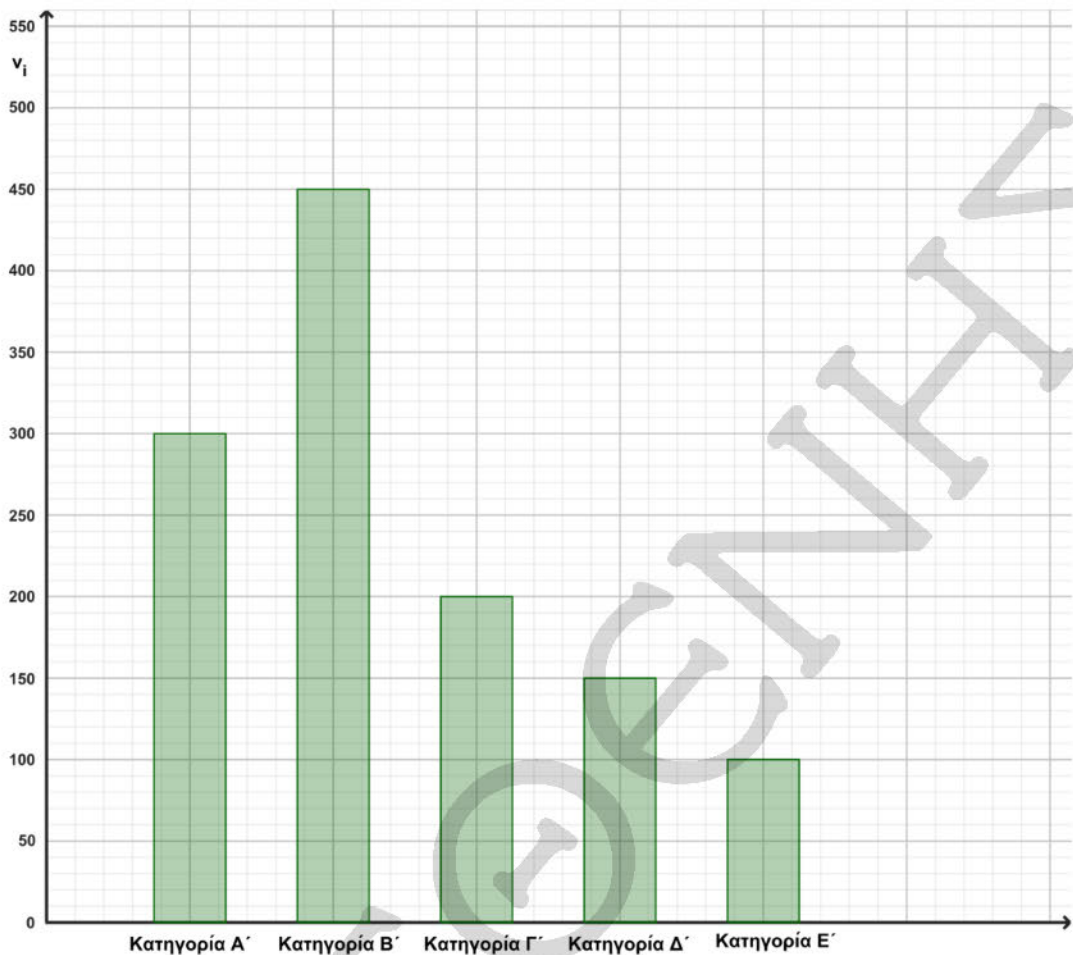
Κατηγορία Β' 450 εργαζόμενοι, άρα $v_2 = 450$.

Κατηγορία Γ' 200 εργαζόμενοι, άρα $v_3 = 200$.

Κατηγορία Δ' 150 εργαζόμενοι, άρα $v_4 = 150$.

Κατηγορία Ε' 100 εργαζόμενοι, άρα $v_5 = 100$.

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει το ραβδόγραμμα συχνοτήτων v_i .



- ii. Όταν συνταξιοδοτηθούν οι εργαζόμενοι της κατηγορίας Γ' που στο σύνολό τους είναι 200, τότε στην εταιρεία θα απασχολούνται $1200 - 200 = 1000$ εργαζόμενοι. Οι εργαζόμενοι της κατηγορίας Ε' γνωρίζουμε από το β) ότι είναι 100 συνεπώς αντιπροσωπεύουν το $\frac{100}{1000} = 0,1$ του συνόλου των εργαζομένων, δηλαδή το 10%