Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

ΘΕΜΑ 2

Οι βαθμοί 10 φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής ήταν:

4,7,3,5,8,6,5,9,6,6

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών όλων των φοιτητών του δείγματος.

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων.

(Μονάδες 10)

γ) Ποιο είναι το ποσοστό των φοιτητών με βαθμό μεγαλύτερο του 8;

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

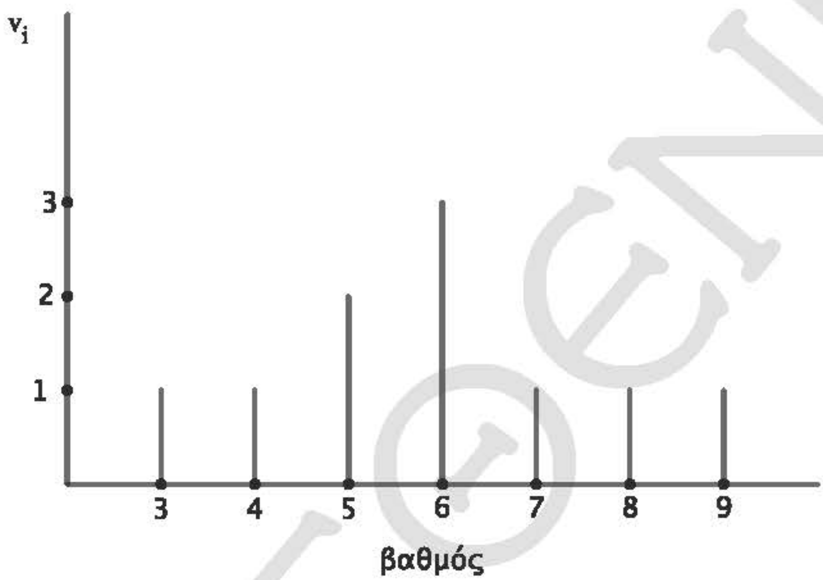
α) Οι βαθμοί των 10 φοιτητών σε αύξουσα σειρά είναι:

$$3,4,5,5,6,6,6,7,8,9$$

Η μέση τιμή των βαθμών όλων των φοιτητών του δείγματος είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_i}{10} = \frac{59}{10} = 5{,}9$$

β) Σύμφωνα με τα δεδομένα προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα συχνοτήτων:



γ) Το πλήθος των φοιτητών με βαθμό μεγαλύτερο του 8 ισούται με 1, οπότε το αντίστοιχο ποσοστό είναι:

$$\frac{1}{10} \cdot 100\% = 10\%$$

ΘΕΜΑ 2

Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg:

76, 74, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

α)Τι είδους μεταβλητή είναι η μεταβλητή 'Βάρος'; Ποιοτική, Ποσοτική Διακριτή ή Ποσοτική Συνεχής;

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε:

i. τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

(Μονάδες 10)

ii. τη διάμεσο δ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η μεταβλητή 'Βάρος' είναι Ποσοτική Συνεχής γιατί μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από ένα διάστημα πραγματικών αριθμών.

β)

i. Για τη μέση τιμή ισχύει

$$\bar{x}=\frac{\sum t_i}{\nu}=\frac{70+72+74+75+75+75+75+76+78+80}{10}=\frac{750}{10}=75$$

ii. Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά και έχουμε

70, 72, 74, 75, 75, 75, 75, 76, 78, 80

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο $\nu=10$, η διάμεσος δίνεται από το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Άρα $\delta=\frac{t_5+t_6}{2}=\frac{75+75}{2}=75$

ΘΕΜΑ 2

Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή ‘Βάρος’ και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg:

80, 70, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

α) Να κατασκευάσετε το σημειόγραμμα της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε:

i. τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής ‘Βάρος’ των δέκα μαθητών.

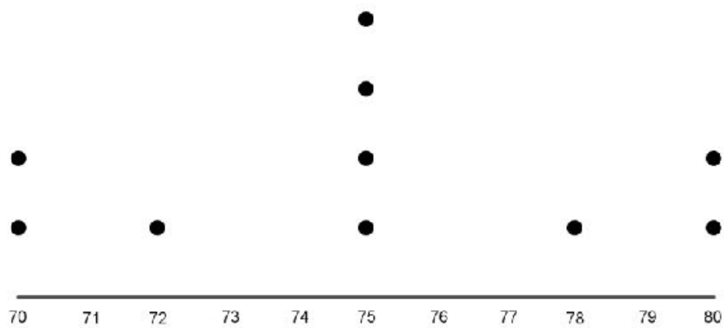
(Μονάδες 10)

ii. τη διάμεσο δ της μεταβλητής ‘Βάρος’ των δέκα μαθητών.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το αντίστοιχο σημειόγραμμα με βάση τη συχνότητα ν_i της αντίστοιχης τιμής x_i της μεταβλητής ‘Χ: Βάρος’ θα έχει τη μορφή:



β)

i. Για τη μέση τιμή ισχύει

$$\bar{x} = \frac{\sum t_i}{\nu} = \frac{70+70+72+75+75+75+75+78+80+80}{10} = \frac{750}{10} = 75$$

ii. Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά και έχουμε

70, 70, 72, 75, 75, 75, 75, 78, 80, 80

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο $\nu = 10$, η διάμεσος δίνεται από το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Άρα $\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{75+75}{2} = 75$

ΘΕΜΑ 2

Οι προφορικοί βαθμοί έξι μαθητών στα μαθηματικά είναι $10,13,11,15,9,14$.

α) Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\overline{x}$ του δείγματος των έξι μαθητών.

(Μονάδες 10)

β)

i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

t_i	$t_i-\overline{x}$	$\left(t_i-\overline{x}\right)^2$
9		
10		
11		
13		
14		
15		

(Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu}=\frac{9+10+11+13+14+15}{6}=\frac{72}{6}=12$.

β)

i.

t_i	$t_i-\bar{x}$	$\left(t_i-\bar{x}\right)^2$
9	-3	9
10	-2	4
11	-1	1
13	1	1
14	2	4
15	3	9

ii. Είναι $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}\left(t_i-\bar{x}\right)^2}{\nu}\overset{\beta)i}{=}\frac{9+4+1+1+4+9}{6}=\frac{28}{6}\simeq 4,67$.

ΘΕΜΑ 2

Οι ημέρες απουσίας 11 μαθητών το μήνα Σεπτέμβριο ήταν:

$$1, 4, 4, 7, 3, 6, 10, 3, 1, 2, 3$$

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.

(Μονάδες 9)

γ) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Οι ημέρες απουσίας των 11 μαθητών σε αύξουσα σειρά είναι:

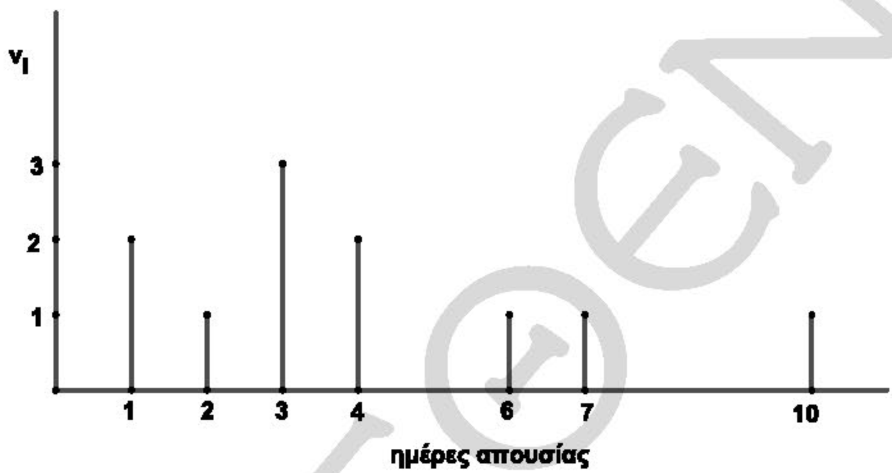
$$1, 1, 2, 3, 3, \mathbf{3}, 4, 4, 6, 7, 10$$

Η διάμεσος δ θα είναι η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή η 6η παρατήρηση που είναι ο αριθμός 3, άρα δ=3 .

β) Η μέση τιμή των ημερών απουσίας προκύπτει από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_{11}}{11} = \frac{1+1+2+3+3+3+4+4+6+7+10}{11} = \frac{44}{11} = 4\,.$$

γ) Σύμφωνα με τα δεδομένα προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα συχνοτήτων:



ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω πίνακα, αναγράφεται ανά ημέρα, το πλήθος των απόντων μαθητών ενός τμήματος της Γ’ Λυκείου.

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή
Πλήθος απόντων μαθητών	4	3	2	2	4

Για το δείγμα των απόντων μαθητών να υπολογίσετε:

α) το εύρος R.

(Μονάδες 8)

β) τη διάμεσο δ.

(Μονάδες 8)

γ) τη μέση τιμή $\overline{x}$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Το πλήθος των απόντων μαθητών ανά ημέρα σε αύξουσα σειρά είναι: 2, 2, 3, 4, 4 οπότε:

α) Το εύρος του δείγματος είναι: R $= x_{\max} - x_{\min}$ = 4 – 2 = 2.

β) Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 5, δηλαδή περιττός αριθμός, η διάμεσος δ θα είναι η μεσαία παρατήρηση (δηλαδή η τρίτη). Οπότε δ = x_3 = 3.

γ) Η μέση τιμή του δείγματος είναι:

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} t_i = \frac{1}{5}(2+2+3+4+4) = \frac{15}{5} = 3\,.$$

ΘΕΜΑ 2

Στη διάρκεια του χειμώνα, από το σύνολο των μαθητών μιας τάξης, οι δέκα σημείωσαν τις εξής ημέρες απουσίας από το σχολείο: 6, 7, 1, 2, 3, 5, 2, 4, 4, 6. Να βρείτε:

α) το εύρος των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν.

(Μονάδες 8)

β) τη διάμεσο των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν.

(Μονάδες 8)

γ) τη μέση τιμή των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός των ημερών απουσίας σε αύξουσα σειρά είναι:

1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, οπότε το εύρος είναι: R $= x_{max} - x_{min}$ = 7 – 1 = 6.

β) Εφόσον το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός, η διάμεσος θα είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Δηλαδή $\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{4+4}{2} = 4$.

γ) Επίσης η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i = \frac{1}{10}(1+2+2+3+4+4+5+6+6+7) = \frac{40}{10} = 4.$$

ΘΕΜΑ 2

Οι βαθμοί που έγραψε ένας μαθητής σε τέσσερα τεστ, στο μάθημα των Μαθηματικών το πρώτο τετράμηνο της τρέχουσας χρονιάς είναι: 19, 10, 13, 20.

α) Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμών αυτών.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σταθμικό μέσο της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ, αν τα παραπάνω τεστ είχαν αντίστοιχα συντελεστές βαρύτητας τους αριθμούς: 1, 4, 3, 2.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Οι βαθμοί που έγραψε ο μαθητής σε αύξουσα σειρά είναι: 10, 13, 19, 20.

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός η διάμεσος θα ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Δηλαδή της ημιάθροισμα του 2ου και 3ου βαθμού. Επομένως $\delta = \frac{t_2 + t_3}{2} = \frac{13+19}{2} = \frac{32}{2} = 16$.

β) Είναι: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{10+13+19+20}{4} = \frac{62}{4} = 15,5$ η ζητούμενη μέση τιμή της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ.

γ) Επίσης: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i} = \frac{1 \cdot 19 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 13 + 2 \cdot 20}{1+4+3+2} = \frac{19+40+39+40}{10} = \frac{138}{10} = 13,8$

είναι ο ζητούμενος σταθμικός μέσος της βαθμολογίας, που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ.

ΘΕΜΑ 2

Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg:

76, 74, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

α)Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

(Μονάδες 10)

β) Αν η τυπική απόκλιση s της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών κατά προσέγγιση είναι $s = 3$kg, να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV του δείγματος.

(Μονάδες 08)

γ) Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Για τη μέση τιμή $\bar{x}$ των βαρών ισχύει $\bar{x} = \frac{\sum t_i}{\nu}$, επομένως

$$\bar{x} = \frac{76+74+75+75+78+72+70+80+75+75}{10} = \frac{750}{10} = 75 \text{ kg.}$$

β) Ισχύει ότι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{3\,kg}{75\,kg} = 0{,}04 = 4\%$

γ) Το δείγμα είναι ομοιογενές γιατί ο συντελεστής μεταβλητότητάς του δεν ξεπερνάει το 10%

ΘΕΜΑ 2

Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά της διάρκεια του μήνα Απριλίου. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις αθροιστικές συχνότητες N_i των ωρών της υπερωριακής απασχόλησης, οι οποίες έχουν χωριστεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

Ώρες υπερωριακής απασχόλησης Κλάσεις [-)	**Συχνότητα ν_i**	**Αθροιστική Συχνότητα N_i**	**Κεντρική τιμή x_i**	**$x_i \cdot \nu_i$**
0-2		**5**	**1**	
2-4		**15**	**3**	
4-6		**20**	**5**	
6-8		**35**	**7**	
8-10		**40**	**9**	
ΣΥΝΟΛΟ				

α) να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος.

(Μονάδες 8)

β) να συμπληρωθεί ο παραπάνω πίνακας.

(Μονάδες 8)

γ) να βρεθεί η μέση τιμή των ωρών της υπερωριακής απασχόλησης.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η τελευταία αθροιστική συχνότητα είναι N_5=40 άρα το μέγεθος του δείγματος είναι ν=40.

β)

N_1=5 άρα και ν_1=5

N_2=15 και επειδή $N_2=N_1+\nu_2 \Leftrightarrow 15=5+\nu_2 \Leftrightarrow \nu_2=10$

N_3=20 και επειδή $N_3=N_2+\nu_3 \Leftrightarrow 20=15+\nu_3 \Leftrightarrow \nu_3=5$

N_4=35 και επειδή $N_4=N_3+\nu_4 \Leftrightarrow 35=20+\nu_2 \Leftrightarrow \nu_4=15$

N_5=40 και επειδή $N_5=N_4+\nu_5 \Leftrightarrow 40=35+\nu_5 \Leftrightarrow \nu_5=5$

Άρα ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

Κλάσεις [-)	**Συχνότητα ν_i**	**Αθροιστική Συχνότητα N_i**	**Κεντρική τιμή x_i**	**$x_i \cdot \nu_i$**
0-2	**5**	**5**	**1**	**5**
2-4	**10**	**15**	**3**	**30**
4-6	**5**	**20**	**5**	**25**
6-8	**15**	**35**	**7**	**105**
8-10	**5**	**40**	**9**	**45**
ΣΥΝΟΛΟ				**210**

γ) Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή ισούται με:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot \nu_1 + x_2 \cdot \nu_2 + x_3 \cdot \nu_3 + x_4 \cdot \nu_4 + x_5 \cdot \nu_5}{40} = \frac{210}{40} = 5{,}25$$

ΘΕΜΑ 2

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i, i=1, 2, 3, 4 μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητες τους v_i, i=1, 2, 3, 4.

x_i	v_i
1	1
2	2
3	1
4	4

Να αποδείξετε ότι:

α) Η μέση τιμή $\overline{x}$ ισούται με 3.

(Μονάδες 13)

β) Η διάμεσος δ ισούται με 3,5.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι: $\overline{x} = \frac{x_1 \cdot \nu_1 + x_2 \cdot \nu_2 + x_3 \cdot \nu_3 + x_4 \cdot \nu_4}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4}{1+2+1+4} = \frac{1+4+3+16}{8} = \frac{24}{8} = 3$

β) Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο δ, θα πρέπει να βάλουμε τις τιμές σε αύξουσα σειρά: 1, 2, 2, **3,** **4,** 4, 4, 4. Επειδή είναι στο σύνολό τους 8 οι τιμές που έχουμε, η διάμεσος θα ισούται:

$$\delta = \frac{4\eta \ \pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta + 5\eta \ \pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\eta}\rho\eta\sigma\eta}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

ΘΕΜΑ 2

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα στις εξετάσεις ήταν:

$$8, 18, 12, 14, 13$$

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των βαθμών του μαθητή.

(Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών του μαθητή.

(Μονάδες 07)

γ) Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης $2, 1, 3, 3$ και 1 αντίστοιχα, ποια θα ήταν η μέση τιμή των βαθμών του μαθητή;

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) Οι βαθμοί του μαθητή στα $\nu = 5$ μαθήματα σε αύξουσα σειρά είναι:

$$8, 12, 13, 14, 18$$

Αφού το πλήθος ν των παρατηρήσεων είναι περιττός, η διάμεσος δ θα είναι η μεσαία παρατήρηση (3ος βαθμός στη σειρά), δηλαδή:

$$\delta = 13$$

β) Η μέση τιμή $\bar{x}$ των βαθμών του μαθητή είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

γ) Η μέση τιμή των βαθμών του μαθητή λαμβάνοντας υπόψη τους συντελεστές στάθμισης των πέντε μαθημάτων υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 + x_4 w_4 + x_5 w_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5}$$

όπου $x_1 = 8, x_2 = 18, x_3 = 12, x_4 = 14, x_5 = 13$ και $w_1 = 2, w_2 = 1, w_3 = 3, w_4 = 3, w_5 = 1$. Επομένως:

$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 2 + 18 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 14 \cdot 3 + 13 \cdot 1}{2 + 1 + 3 + 3 + 1} = \frac{16 + 18 + 36 + 42 + 13}{10} = \frac{125}{10} = 12{,}5$$

ΘΕΜΑ 2

Οι πόντοι που πέτυχε ένας καλαθοσφαιριστής στους τελευταίους πέντε (5) αγώνες της ομάδας του ήταν:

$$20, 17, 21, 19, 23$$

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των πόντων του καλαθοσφαιριστή.

(Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος. Δίνεται ότι $\sum_{i=1}^{5}(t_i - \bar{x})^2 = 20$, όπου t_i, $i = 1,2,\dots,5$, είναι οι πόντοι του καλαθοσφαιριστή στους 5 αγώνες.

(Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) Οι πόντοι που πέτυχε ο καλαθοσφαιριστής στους τελευταίους πέντε ($\nu = 5$) αγώνες της ομάδας του σε αύξουσα σειρά είναι:

$$17, 19, 20, 21, 23$$

Η μέση τιμή των πόντων του καλαθοσφαιριστή (πόντοι ανά αγώνα) είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

β) Η διακύμανση του δείγματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5}(t_i - \bar{x})^2 \ = \frac{1}{5} \cdot 20 = 4$$

γ) Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$$

όπου $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$. Επομένως:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{20} = 0{,}10 = 10\%$$

Αφού ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%, συμπεραίνουμε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω διάγραμμα συχνοτήτων παρουσιάζονται οι βαθμολογίες 50 μαθητών σε μια γραπτή δοκιμασία.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

Βαθμολογία x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
12			
13			
14			
Σύνολο			

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την μέση τιμή $\bar{x}$ της κατανομής της βαθμολογίας των μαθητών.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Σύμφωνα με το διάγραμμα συχνοτήτων συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων, γνωρίζοντας ότι $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ και $f_i\% = 100 f_i$. Είναι $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 10 + 25 + 15 = 50$.

Βαθμολογία x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
12	10	0,2	20
13	25	0,5	50
14	15	0,3	30
Σύνολο	50	1	100

β) Έχουμε $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{12 \cdot 10 + 13 \cdot 25 + 14 \cdot 15}{50} = \frac{655}{50} = 13,1$

ΘΕΜΑ 2

Βιοτεχνία θέλει να προμηθευτεί κουτιά συσκευασίας για τα 100 προϊόντα που παρήγαγε σε μια εβδομάδα, τα οποία μοίρασε σε τέσσερεις κλάσεις ανάλογα με τον όγκο της συσκευασίας σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Όγκος $\left(cm^3\right)$ [-)	ν_i	f_i	$f_i\%$
50-60	20		
60-70	10		
70-80	40		
80-90	30		
Σύνολο	100		

α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα κατανομής σχετικών συχνοτήτων.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων ν_i και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής.

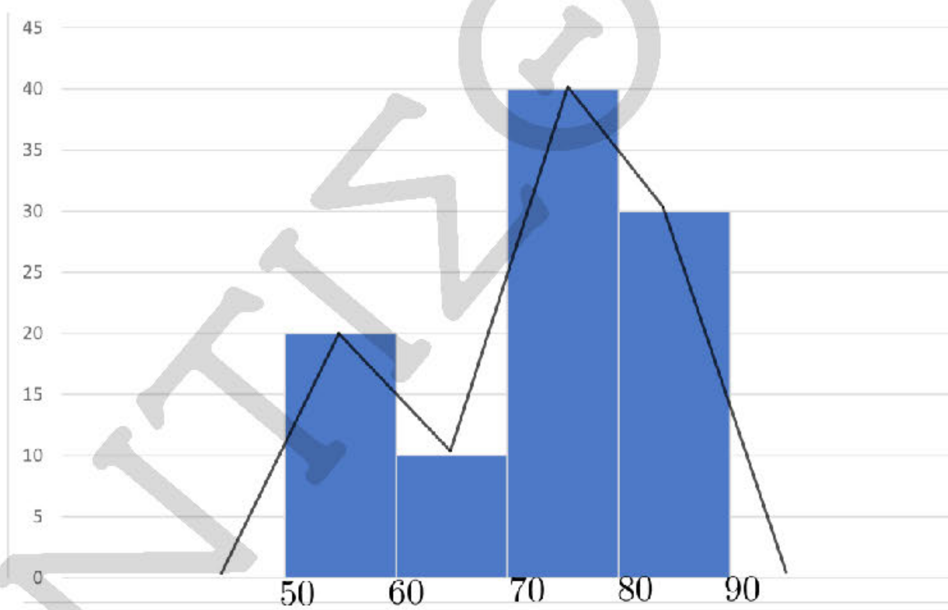
(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ και $f_i\% = 100 f_i$. Επομένως συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα.

Όγκος [-)	ν_i	f_i	$f_i\%$
50-60	20	0,2	20
60-70	10	0,1	10
70-80	40	0,4	40
80-90	30	0,3	30
Σύνολο	100	1,0	100

β) Το ιστόγραμμα αποτελείται από ορθογώνια με πλάτος ίσο με το πλάτος κάθε κλάσης (αφού έχουμε κλάσεις ίσου πλάτους) και ύψος ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα. Σύμφωνα με τον πίνακα του α) ερωτήματος σχεδιάζουμε το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων.



όγκος σε cm^3

ΘΕΜΑ 2

Κατάστημα υποδημάτων κατέγραψε στον παρακάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων τις πωλήσεις σε ένα μήνα ενός σχεδίου γυναικείου παπουτσιού ανάλογα με το νούμερό του. Για την κατανομή αυτή:

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

Νούμερο x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
36	8		
37	12		
38	20		
39	10		
Σύνολο			

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων ν_i.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ότι $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ και $f_i\% = 100 f_i$.

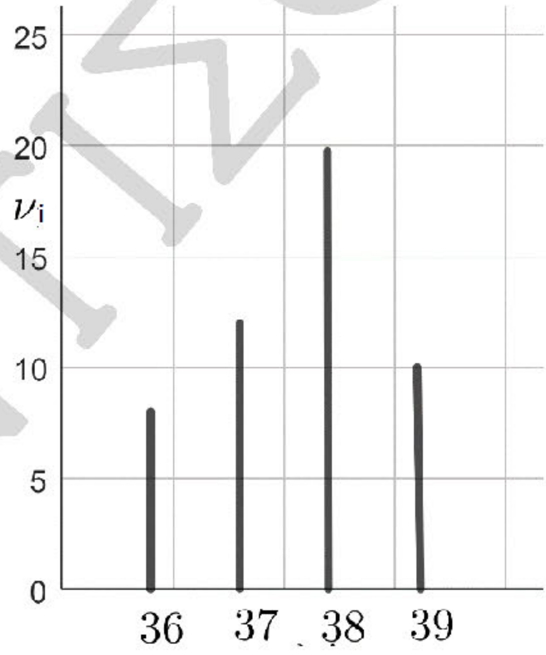
Ακόμα είναι $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 8 + 12 + 20 + 10 = 50$.

Οπότε $f_1 = \frac{8}{50} = 0,16$ και $f_1\% = 100 \cdot 0,16 = 16$. Όμοια τα υπόλοιπα.

Τελικά συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

x_i	ν_i	f_i	f_i %
36	8	0,16	16
37	12	0,24	24
38	20	0,40	40
39	10	0,20	20
Σύνολο	50	1,00	100

β) Από τα δεδομένα του πίνακα του α) ερωτήματος, σχεδιάζουμε



ΘΕΜΑ 2

Οι εισπράξεις σε χιλιάδες ευρώ ενός δείγματος δέκα καταστημάτων σε ένα εμπορικό κέντρο κατά το μήνα Απρίλιο του 2023 ήταν:

50, 15, 15, 20, 15, 30, 15, 20, 50, 50.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των εισπράξεων.

(Μονάδες 9)

β) Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

Εισπράξεις (σε χιλ. ευρώ) x_i	**Συχνότητα ν_i**	**x_i-$\bar{x}$**	**$(x_i$-$\bar{x})^2$**	**$(x_i$-$\bar{x})^2 \cdot \nu_i$**
15				
20				
30				
50				
Σύνολο				

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος:

$$S^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\kappa} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i$$

Να υπολογίσετε τη διακύμανση S^2 των εισπράξεων.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α)

$$\bar{x} = \frac{50+15+15+20+15+30+15+20+50+50}{10} = \frac{280}{10} = 28$$

β)

$\nu_1=4$, $\nu_2=2$, $\nu_3=1$, $\nu_4=3$ και $\nu=10$.

Εισπράξεις (σε χιλ. ευρώ)	Συχνότητα ν_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 \cdot \nu_i$
15	4	15-28=-13	$(-13)^2=169$	676
20	2	20-28=-8	$(-8)^2=64$	128
30	1	30-28=2	$2^2=4$	4
50	3	50-28=22	$22^2=484$	1452
Σύνολο	ν=10			2260

γ) Με εφαρμογή του τύπου:

$$S^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\kappa} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i$$

έχουμε: $S^2 = \frac{1}{10} \cdot 2260 = 226$

ΘΕΜΑ 2

Η μέση τιμή του βάρους έξι μαθητών της Γ' Λυκείου είναι 72 κιλά.

α) Να δείξετε ότι το άθροισμα του βάρους των έξι μαθητών είναι 432 κιλά.

(Μονάδες 8)

β) Στην ομάδα των έξι μαθητών προστίθενται άλλοι δύο, με βάρος 77 και 83 κιλά αντίστοιχα. Να βρείτε:

i. το άθροισμα των βαρών των οκτώ μαθητών.

(Μονάδες 8)

ii. τη μέση τιμή του βάρους των οκτώ μαθητών.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον η μέση τιμή του βάρους έξι μαθητών είναι 72 κιλά, το άθροισμα του βάρους των έξι μαθητών είναι $\sum_{i=1}^{6} t_i = 6 \cdot \overline{x} = 6 \cdot 72 = 432$ κιλά.

β)

i. Λόγω του ερωτήματος (α), για να βρούμε το άθροισμα των βαρών των οκτώ μαθητών, θα προσθέσουμε στο συνολικό βάρος των έξι μαθητών, τα βάρη των δύο μαθητών που προστέθηκαν.
Οπότε αυτό είναι: $432 + 77 + 83 = 592$ κιλά.

ii. Η μέση τιμή του βάρους των οκτώ μαθητών είναι:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} t_i}{8} = \frac{592}{8} = 74 \text{ κιλά.}$$

ΘΕΜΑ 2

Σε μία έρευνα, για ένα δείγμα 20 οικογενειών που επιλέχτηκαν, καταγράφηκε ο αριθμός των παιδιών της κάθε οικογένειας, όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών ν_i
0	1
1	5
2	9
3	3
4	2
ΣΥΝΟΛΟ	20

α) Να βρείτε τη διάμεσο του αριθμού των παιδιών.

(Μονάδες 8)

β) Να συμπληρώσετε την τρίτη στήλη του παρακάτω πίνακα.

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
0	1	
1	5	
2	9	
3	3	
4	2	
ΣΥΝΟΛΟ	20	

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών για το δείγμα που επιλέχτηκε.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Οι παρατηρήσεις για τον αριθμό των παιδιών των 20 οικογενειών σε αύξουσα σειρά είναι: 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2 ,2, ..., 4 οπότε η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, που είναι η 10η και 11η.

Δηλαδή $\delta = \frac{t_{10} + t_{11}}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$ παιδιά.

β) Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
0	1	0
1	5	5
2	9	18
3	3	9
4	2	8
ΣΥΝΟΛΟ	20	40

γ) Η ζητούμενη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών για το δείγμα που επιλέχτηκε

είναι: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{40}{20} = 2$ παιδιά.

ΘΕΜΑ 2

Ένα ξενοδοχείο του Ναυπλίου διαθέτει 15 δωμάτια. Στο διπλανό πίνακα, καταγράφηκε ο αριθμός των κρεβατιών ανά δωμάτιο, καθώς και ο αριθμός των δωματίων που τα έχουν. Να βρείτε:

Αριθμός κρεβατιών x_i	Αριθμός δωματίων ν_i
1	1
2	2
3	8
4	4
ΣΥΝΟΛΟ	15

α) τη διάμεσο του αριθμού των κρεβατιών ανά δωμάτιο.

(Μονάδες 8)

β) το συνολικό αριθμό των κρεβατιών του ξενοδοχείου.

(Μονάδες 8)

γ) τη μέση τιμή του αριθμού των κρεβατιών ανά δωμάτιο.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός των κρεβατιών για τα 15 δωμάτια σε αύξουσα σειρά είναι:

1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, ..., 4 οπότε η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση που είναι η $8^η$.

Δηλαδή $\delta = t_8 = 3$ κρεβάτια.

β) Είναι:

Αριθμός κρεβατιών x_i	Αριθμός δωματίων ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
1	1	1
2	2	4
3	8	24
4	4	16
ΣΥΝΟΛΟ	15	45

Οπότε συνολικά τα κρεβάτια του ξενοδοχείου είναι 45.

γ) Η ζητούμενη μέση τιμή του αριθμού των κρεβατιών ανά δωμάτιο είναι:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{45}{15} = 3 \text{ κρεβάτια.}$$

ΘΕΜΑ 2

Η κατανομή των ηλικιών των νέων κατασκηνωτών ενός κάμπινγκ της Αμοργού, είναι περίπου κανονική με μέση τιμή $\bar{x} = 25$ έτη και συντελεστή μεταβολής $CV = 0,08$.

α) Να βρεθεί η τυπική απόκλιση της κατανομής.

(Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί το εύρος των ηλικιών της κατανομής.

(Μονάδες 8)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι 200 είναι όλοι οι κατασκηνωτές του κάμπινγκ, να βρείτε πόσοι από αυτούς έχουν ηλικία μικρότερη από τα 25 έτη.

(Μονάδες 9)

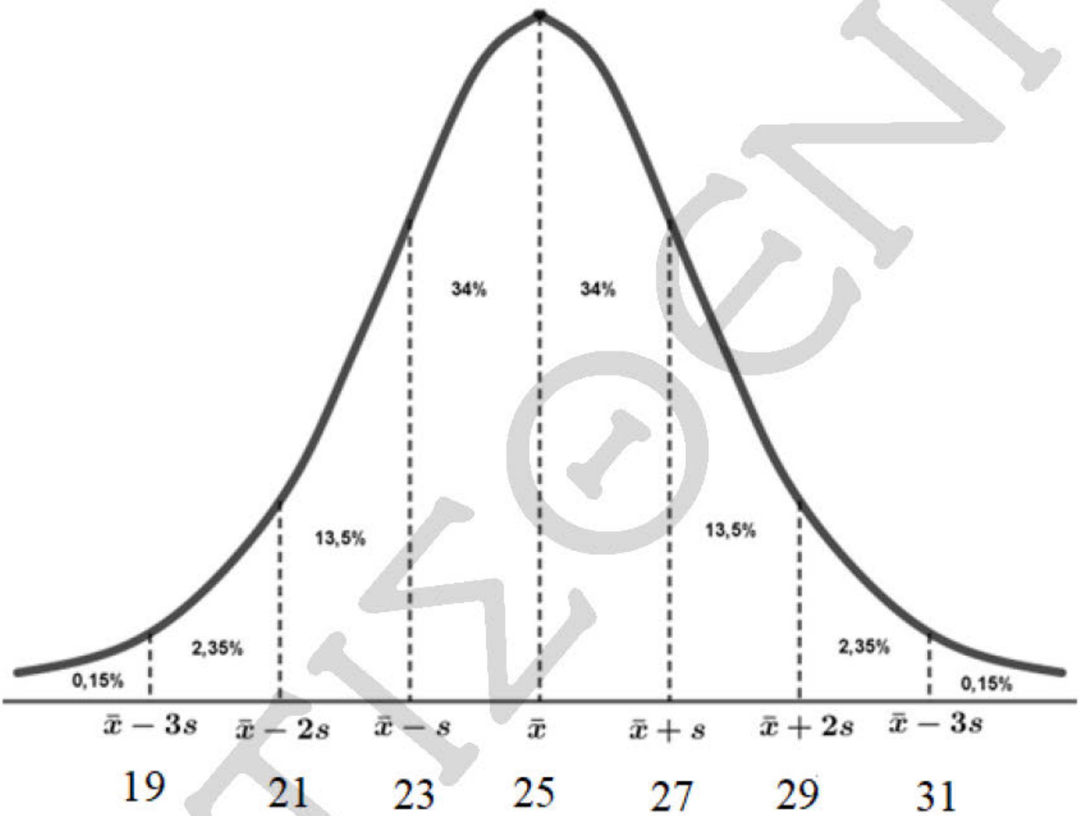
ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε: $\overline{x} = 25$ και $CV = 0,08$.

Ισχύει: $CV = \dfrac{s}{\overline{x}} \Leftrightarrow s = \overline{x} \cdot CV = 25 \cdot 0,08 = 2$ έτη.

β) Γνωρίζουμε ότι στην κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις. Επομένως R $\simeq 6 \cdot s = 6 \cdot 2 = 12$.

γ) Από τα δεδομένα η κατανομή είναι περίπου κανονική οπότε έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Ηλικία κάτω των 25 ετών έχει το 50%, δηλαδή οι μισοί.

Επομένως 100 είναι οι κατασκηνωτές με ηλικία μικρότερη από τα 25 έτη.

ΘΕΜΑ 2

Οι βαθμοί που έγραψε στα πέντε τεστ του 1ου τετραμήνου, για το μάθημα των Μαθηματικών, ένας μαθητής της Γ' Λυκείου είναι: 12, 14, 8, 20, 16.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της βαθμολογίας του μαθητή, για τα πέντε τεστ.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.

Βαθμός x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
12		
14		
8		
20		
16		
ΣΥΝΟΛΟ		

(Μονάδες 8)

ii. Αξιοποιώντας τον συμπληρωμένο πίνακα του ερωτήματος (β, i), να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση, της βαθμολογίας του μαθητή για τα πέντε τεστ.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η ζητούμενη μέση τιμή της βαθμολογίας του μαθητή, για τα πέντε τεστ είναι:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i}{\nu}=\frac{12+14+8+20+16}{5}=\frac{70}{5}=14.$$

β)

i. Λόγω του ερωτήματος (α) είναι $\overline{x}=14$, οπότε ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Βαθμός x_i	$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$
12	-2	4
14	0	0
8	-6	36
20	6	36
16	2	4
ΣΥΝΟΛΟ		80

ii. Λόγω του ερωτήματος (β, i) είναι:

$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{\nu}=\frac{80}{5}=16$ η διακύμανση της βαθμολογίας και

$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{16}=4$ η τυπική απόκλιση.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πέντε αριθμοί 6, 5, 28, 3, 8.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω πέντε αριθμών.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τη διάμεσο των παραπάνω πέντε αριθμών.

(Μονάδες 8)

γ) Στους παραπάνω πέντε αριθμούς, δίνεται ως έκτος, ο αριθμός 16. Να βρείτε τη διάμεσο των έξι αριθμών.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η μέση τιμή των πέντε αριθμών είναι: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \dfrac{6+5+28+3+8}{5} = \dfrac{50}{5} = 10$.

β) Οι πέντε αριθμοί σε αύξουσα σειρά είναι: 3, 5, 6, 8, 28.

Επειδή το πλήθος τους είναι περιττός αριθμός, διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή η τρίτη. Άρα $\delta = x_3 = 6$.

γ) Οι έξι αριθμοί σε αύξουσα σειρά είναι:

3, 5, 6, 8, 16, 28. Επειδή το πλήθος τους είναι άρτιος αριθμός, διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Της τρίτης και τέταρτης, οπότε: $\delta = \dfrac{x_3 + x_4}{2} = \dfrac{6+8}{2} = 7$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: 2, 3, 4, 6, 10.

α) Να βρεθεί η μέση τιμή τους.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι η διασπορά τους είναι $s^2 = 8$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την τυπική απόκλιση, του παραπάνω δείγματος των πέντε αριθμών.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η ζητούμενη μέση τιμή του δείγματος των πέντε αριθμών που δόθηκαν είναι:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i}{\nu}=\frac{2+3+4+6+10}{5}=\frac{25}{5}=5\,.$$

β) Λόγω και του ερωτήματος (α) είναι: $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-5\right)^2=$

$$\frac{1}{5}\left[(2-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(10-5)^2\right]=\frac{1}{5}\left[(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+1^2+5^2\right]=$$

$$\frac{1}{5}(9+4+1+1+25)=\frac{40}{5}=8\,.$$

γ) Λόγω του ερωτήματος (β) είναι: $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{8}$ η ζητούμενη τυπική απόκλιση.

ΘΕΜΑ 2

Οι υπάλληλοι μιας μεγάλης εταιρείας πετρελαιοειδών, χρησιμοποιούν το καφέ και το εστιατόριο της εταιρείας καθημερινά. Αν τα χρήματα που ξοδεύουν ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή $\overline{x}=10$ ευρώ και συντελεστή μεταβολής $CV=0,2$ τότε:

α) να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση της κατανομής των χρημάτων που ξοδεύουν οι υπάλληλοι της εταιρείας καθημερινά, είναι $s=2$ ευρώ.

(Μονάδες 9)

β)

i. να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά το πολύ 10 ευρώ.

(Μονάδες 8)

ii. να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά περισσότερα από 14 ευρώ.

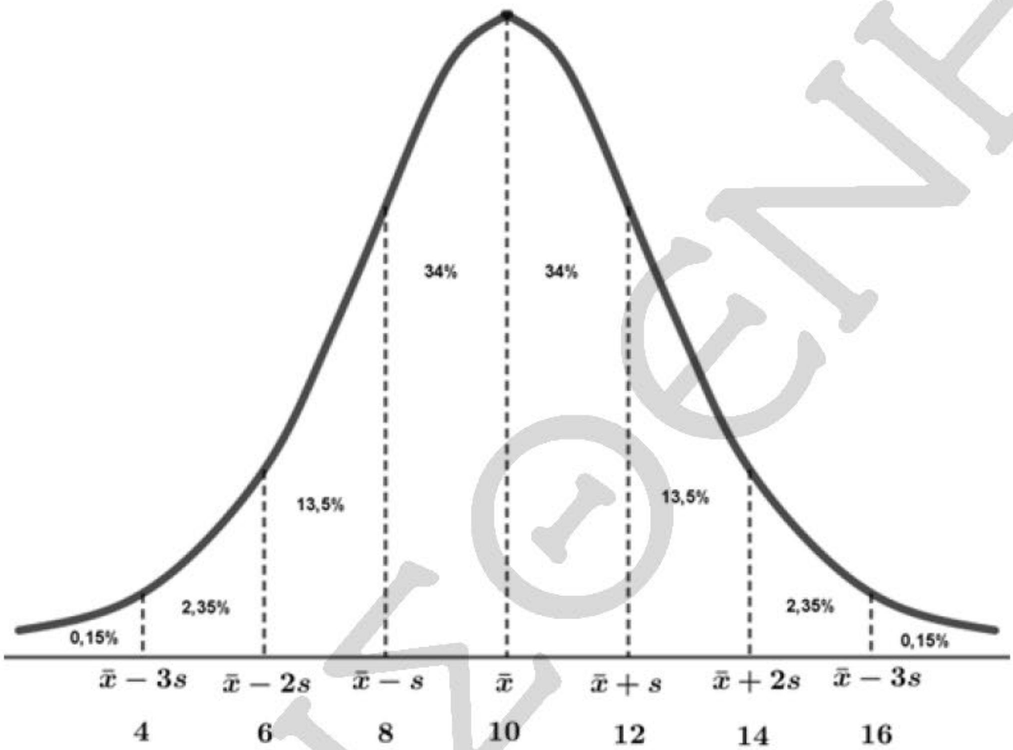
(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε: $CV = 0,2$ και $\overline{x} = 10$.

Ισχύει: $CV = \frac{s}{\overline{x}} \Leftrightarrow s = \overline{x} \cdot CV = 10 \cdot 0,2 = 2$ ευρώ, είναι η ζητούμενη τυπική απόκλιση της κατανομής των χρημάτων που ξοδεύουν οι υπάλληλοι της εταιρείας καθημερινά.

β) Δίνεται ότι η κατανομή των χρημάτων που ξοδεύουν οι υπάλληλοι είναι κανονική. Οπότε:



Επομένως:

i. το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά το πολύ 10 ευρώ, είναι το 50%.

ii. το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά περισσότερα από 14 ευρώ, είναι το 2,5%.

ΘΕΜΑ 2

Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών ενός μαθητή είναι 14,18,20,14,12,12, και αποτελούν τις τιμές ενός δείγματος. Η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι s=3.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του παραπάνω δείγματος βαθμών.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τη διάμεσο δ και το εύρος R του δείγματος.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\bar{x}=15$, να υπολογίσετε την τιμή του συντελεστή μεταβολής CV.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε πως

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_v}{v}=\frac{2\cdot 14+18+20+2\cdot 12}{6}\Leftrightarrow \bar{x}=\frac{90}{6}\Leftrightarrow \bar{x}=15.$$

β) Για να βρούμε τη διάμεσο του δείγματος τοποθετούμε όλες τις τιμές στη σειρά κατά αύξουσα σειρά. Δηλαδή, 12 12 14 14 18 20.

Επειδή το δείγμα μας έχει άρτιο πλήθος παρατηρήσεων τη διάμεσο δ την υπολογίζουμε με το ημιάθροισμα των μεσαίων βαθμών, δηλαδή, $\delta=\frac{14+14}{2}=\frac{28}{2}=14.$

Άρα, δ=14.

Το εύρος R= Μεγαλύτερος βαθμός-Μικρότερος βαθμός=20-12=8.

Άρα το εύρος του δείγματος είναι 8.

γ)Ο συντελεστής μεταβολής δίνεται από τον τύπο $CV=\frac{s}{\bar{x}}$.

Μετά από την απλή αντικατάσταση των τιμών που γνωρίζουμε έχουμε:

$$CV=\frac{s}{\bar{x}}\Leftrightarrow CV=\frac{3}{15}\Leftrightarrow CV=0{,}20\Leftrightarrow CV=20\%.$$

ΘΕΜΑ 2

Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών ενός μαθητή για το Α΄ τετράμηνο είναι 16,18,18,12,16,10, και αποτελούν τις τιμές ενός δείγματος. Αν η μέση τιμή των βαθμών είναι $\bar{x}=15$ και η τιμή της διασποράς $s^2=9$.

α) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s και τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος των βαθμών.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τη διάμεσο δ του δείγματος.

(Μονάδες 5)

γ) Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών του μαθητή για το Β΄ τετράμηνο αυξήθηκαν όλοι κατά δύο μονάδες. Να υπολογίσετε την νέα μέση τιμή των βαθμών του Β΄ τετράμηνου.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Την τυπική απόκλιση s του δείγματος των βαθμών θα την υπολογίσουμε από την τετραγωνική ρίζα της διασποράς. Άρα $s^2 = 9 \Leftrightarrow s = \sqrt{9} = 3$.

Ο συντελεστής μεταβολής δίνεται από τον τύπο

$CV = \frac{s}{\bar{x}}$.

Μετά από την αντικατάσταση των τιμών που γνωρίζουμε έχουμε:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow CV = \frac{3}{15} \Leftrightarrow \overline{CV} = 0{,}20 \Leftrightarrow CV = 20\%.$$

β) Για να βρούμε τη διάμεσο του δείγματος τοποθετούμε όλες τις τιμές κατά αύξουσα σειρά. Δηλαδή, 10,12,16,16,18,18.

Επειδή το δείγμα μας έχει άρτιο πλήθος παρατηρήσεων, τη διάμεσο δ την υπολογίζουμε με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων βαθμών, δηλαδή, $\delta = \frac{16+16}{2} = \frac{32}{2} = 16$.

Άρα, δ=16.

γ) Επειδή όλοι οι βαθμοί των γραπτών αυξήθηκαν κατά δύο μονάδες η νέα μέση τιμή προκύπτει από την αύξηση της αρχικής μέσης τιμής κατά δύο μονάδες, δηλαδή

$$\bar{x}' = \bar{x} + 2 = 15 + 2 = 17.$$

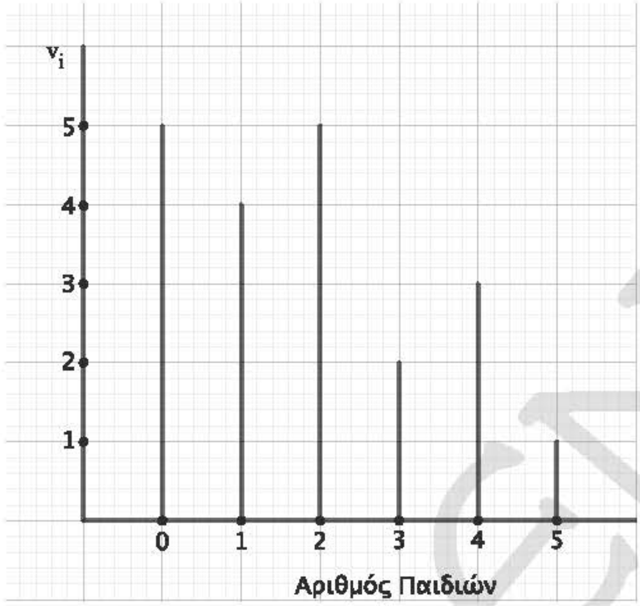
Άρα, η νέα μέση τιμή των βαθμών του Β΄ τετράμηνου είναι $\bar{x}' = 17$.

Εναλλακτικά, το νέο δείγμα με τους βαθμούς του Β΄ τετράμηνου είναι 12 14 18 18 20 20, που έχουν μέση τιμή

$$\bar{x}' = \frac{12 + 14 + 18 + 18 + 20 + 20}{6} = \frac{102}{6} = 17$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω διάγραμμα συχνοτήτων φαίνεται ο αριθμός των παιδιών (οριζόντιος άξονας) είκοσι (20) οικογενειών.



α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Αριθμός Παιδιών x_i	Αριθμός Οικογενειών v_i	$x_i \cdot v_i$
0		
1		
2		
3	2	6
4		
5		
Σύνολο	$v = 20$	

(Μονάδες 11)

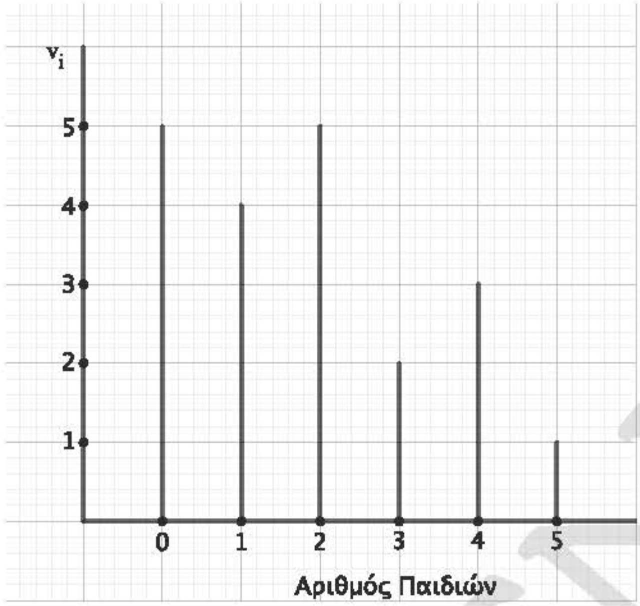
β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών των 20 οικογενειών.

(Μονάδες 08)

γ) Ποιο είναι το πλήθος των οικογενειών με τουλάχιστον 3 παιδιά;

(Μονάδες 06)

ΛΥΣΗ



α) Από το διάγραμμα συχνοτήτων προκύπτουν τα ακόλουθα:

Αριθμός Παιδιών x_i	Αριθμός Οικογενειών v_i	$x_i \cdot v_i$
0	5	0
1	4	4
2	5	10
3	2	6
4	3	12
5	1	5
	$v = 20$	37

β) Η μέση τιμή του αριθμού των παιδιών των οικογενειών είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot v_i}{v} = \frac{37}{20} = 1{,}85$$

γ) Το πλήθος των οικογενειών με τουλάχιστον 3 παιδιά είναι $2 + 3 + 1 = 6$.

ΘΕΜΑ 4

Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι (σε λεπτά), που χρειάζονται οι μαθητές ενός σχολείου για να πάνε το πρωί από το σπίτι τους στο σχολείο, ακολουθούν κανονική κατανομή. Δίνεται ότι ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος των χρόνων είναι $CV = 20\%$ και η διακύμανσή του $s^2 = 4$.

α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{x}$ = 10.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε (προσεγγιστικά), το εύρος του δείγματος των χρόνων.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών, που χρειάζονται για να πάνε από το σπίτι τους στο σχολείο:

i. το πολύ 10 λεπτά
ii. πάνω από 14 λεπτά
iii. από 6 έως 12 λεπτά

(Μονάδες 12)

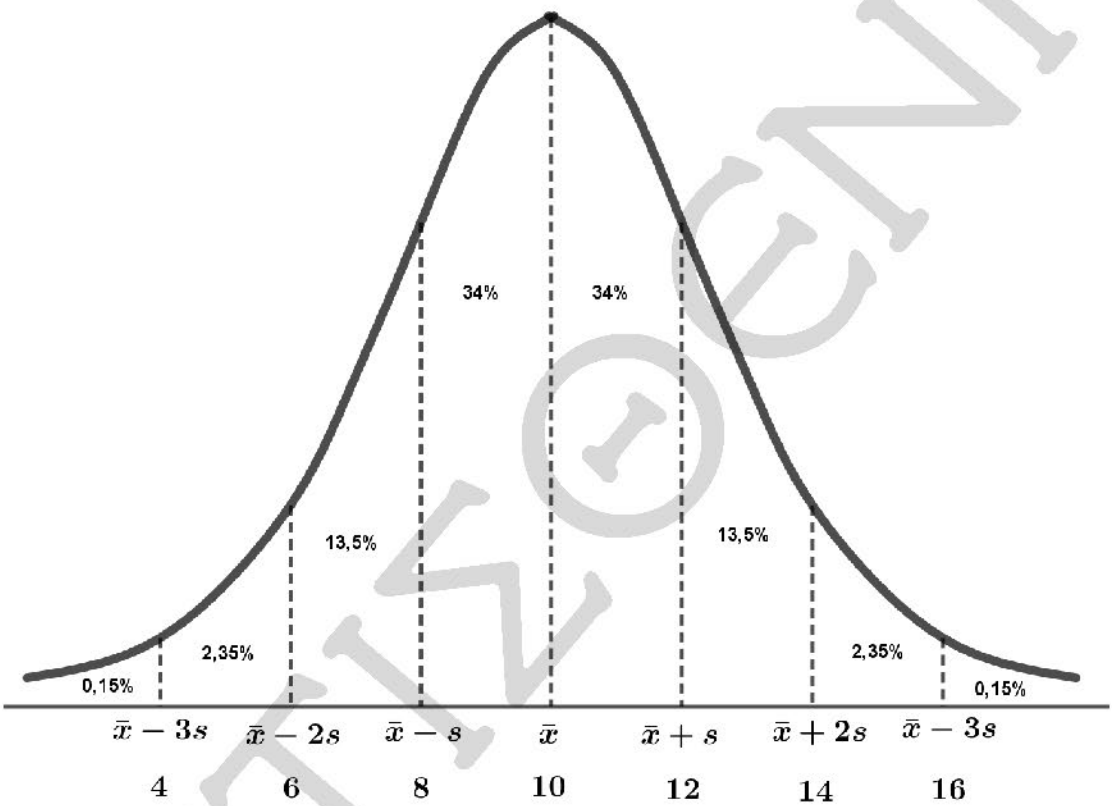
ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε: $s^2 = 4 \Leftrightarrow s = 2$ είναι η τυπική απόκλιση του δείγματος.

Επίσης δίνεται $CV = 20\% = 0,2$ και ισχύει $CV = \dfrac{s}{\overline{x}} \Leftrightarrow \overline{x} = \dfrac{s}{CV} = \dfrac{2}{0,2} = 10$.

β) Γνωρίζουμε ότι στην κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις. Επομένως R $\simeq 6 \cdot s = 6 \cdot 2 = 12$.

γ) Έχουμε κανονική κατανομή με $\overline{x}$ = 10 και $s = 2$. Από το παρακάτω σχήμα συμπεραίνουμε:



i. το πολύ 10 λεπτά χρειάζεται το 50% των μαθητών.

ii. πάνω από 14 λεπτά χρειάζεται το 2,35% + 0,15% = 2,5%.

iii. από 6 έως 12 λεπτά χρειάζεται το 13,5% + 34% + 34% = 81,5%.

ΘΕΜΑ 4

Στις τέσσερις κλάσεις του παρακάτω πίνακα, παρουσιάζονται τα χρόνια εργασίας του συνόλου των εκπαιδευτικών ενός Λυκείου της Αθήνας.

Χρόνια Υπηρεσίας	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
[0, 10)		10	
[10, 20)		15	
[20, 30)		κ	
[30, 40)		5	
Σύνολο			

α) Αφού μεταφέρετε στην κόλλα σας τον πίνακα, να συμπληρώσετε τα κενά του, συναρτήσει του κ, όπου αυτό είναι αναγκαίο.

(Μονάδες 5)

β) Αν ο μέσος χρόνος εργασίας των παραπάνω εκπαιδευτικών είναι τα 19 χρόνια, να δείξετε ότι το $\kappa = 20$. Πόσοι ήταν συνολικά οι εκπαιδευτικοί του σχολείου;

(Μονάδες 6)

Για $\kappa = 20$,

γ) να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Χρόνια Υπηρεσίας	ν_i	f_i	N_i	F_i	$F_i\%$
[0, 10)	10				
[10, 20)	15				
[20, 30)	20				
[30, 40)	5				
Σύνολο					

(Μονάδες 8)

δ) να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, και να βρείτε τη διάμεσο του χρόνου εργασίας.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι ο παρακάτω:

Χρόνια Υπηρεσίας	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
[0, 10)	5	10	50
[10, 20)	15	15	225
[20, 30)	25	κ	25κ
[30, 40)	35	5	175
Σύνολο		$30+\kappa$	$450+25\kappa$

β) Η μέση τιμή ενός δείγματος ταξινομημένου σε κλάσεις δίνεται από τον τύπο:

$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i}{\sum_{i=1}^{4} \nu_i}$. Η τελευταία ισότητα λόγω του (α) ερωτήματος και δεδομένου ότι

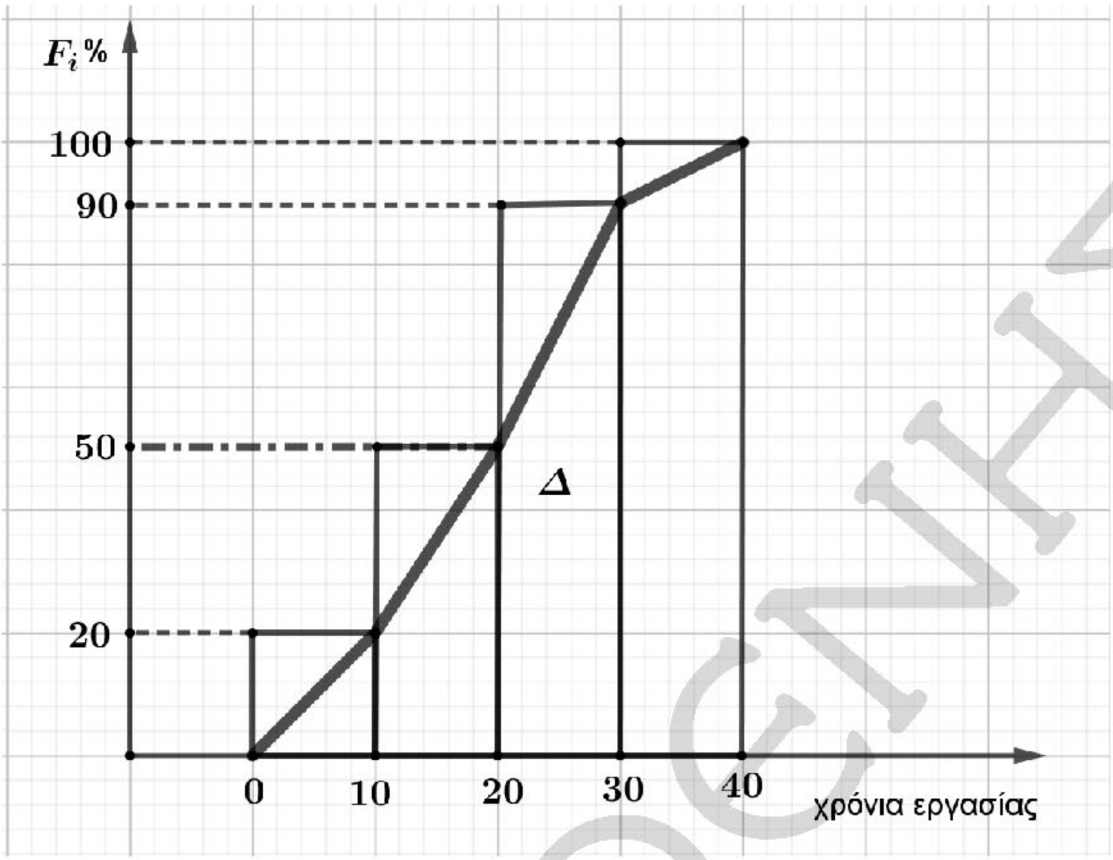
$\overline{x} = 19$ δίνει: $19 = \dfrac{450+25\kappa}{30+\kappa} \Leftrightarrow 19(30+\kappa) = 450+25\kappa \Leftrightarrow 570+19\kappa = 450+25\kappa \Leftrightarrow$

$6\kappa = 120 \Leftrightarrow \kappa = 20$. Επομένως οι εκπαιδευτικοί του σχολείου είναι 50.

γ) Για $\kappa = 20$, ο πίνακας συμπληρωμένος είναι ο παρακάτω:

Χρόνια Υπηρεσίας	ν_i	f_i	N_i	F_i	$F_i\%$
[0, 10)	10	0,2	10	0,2	20
[10, 20)	15	0,3	25	0,5	50
[20, 30)	20	0,4	45	0,9	90
[30, 40)	5	0,1	50	1	100
Σύνολο	50	1			

δ) Παίρνοντας υπόψιν τον πίνακα του ερωτήματος (γ), κατασκευάζουμε αρχικά το παρακάτω ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$. Κατόπιν ενώνουμε τα δεξιά άκρα των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα, ξεκινώντας από το αριστερό κάτω άκρο του πρώτου ορθογωνίου, κατασκευάζουμε το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων $F_i\%$. Επίσης η διάμεσος θα έχει αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\% = 50$, οπότε όπως φαίνεται και στο σχήμα είναι η τετμημένη του Δ. Επομένως δ = 20.



F_i%
100
90
50
20
Δ
0
10
20
30
40
χρόνια εργασίας

ΘΕΜΑ 4

Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα στη Στατιστική ήταν:

10, 10, 18, 8, 20, 7, 9, 17, 11, 10.

α) Να βρείτε το εύρος και τη διάμεσο της βαθμολογίας.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι η μέση τιμή της βαθμολογίας είναι $\bar{x}=12$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι η διασπορά της βαθμολογίας είναι $s^2=18,8$ και να δείξετε ότι το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι: $\sqrt{18,8}\simeq 4,3$.

(Μονάδες 8)

δ) Ένας μαθητής της τάξης ισχυριζόμενος ότι το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές, διατύπωσε την άποψη ότι αν σε κάθε βαθμό προσθέσουμε τον αριθμό 33, θα προκύψει ένα δείγμα αριθμών (όχι βαθμών) που θα είναι ομοιογενές. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η βαθμολογία των δέκα μαθητών σε αύξουσα σειρά είναι:

7, 8, 9, 10, 10, 10, 11, 17, 18, 20

Οπότε το εύρος της βαθμολογίας είναι: $R = x_{\max} - x_{\min} =$ 20 – 7 = 13.

Εφόσον το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 10, δηλαδή άρτιος αριθμός, η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Δηλαδή $\delta = \dfrac{x_5 + x_6}{2} = \dfrac{10+10}{2} = 10$.

β) Για τη μέση τιμή της βαθμολογίας έχουμε:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{7+8+9+10+10+10+11+17+18+20}{10} = \frac{120}{10} = 12.$$

γ) Η διακύμανση της βαθμολογίας δίνεται από τον τύπο: $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$, από τον οποίο με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$s^2 = \frac{1}{10}[(7-12)^2 + (8-12)^2 + (9-12)^2 + (10-12)^2 + (10-12)^2 + (10-12)^2 + (11-12)^2 +$$

$$(17-12)^2 + (18-12)^2 + (20-12)^2] =$$

$$\frac{1}{10}(25+16+9+4+4+4+1+25+36+64) = \frac{1}{10}\cdot 188 = 18,8.$$

Εφόσον η διακύμανση $s^2 = 18,8$ η τυπική απόκλιση $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{18,8} \simeq 4,3$.

Επομένως ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος θα είναι:

$CV = \dfrac{s}{\overline{x}} = \dfrac{4,3}{12} \simeq 0,36 = 36\% > 10\%$, οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

δ) Γνωρίζουμε ότι αν σε κάθε βαθμό προσθέσουμε τον αριθμό 33, το νέο δείγμα αριθμών που θα προκύψει θα έχει μέση τιμή: $\overline{Y} = \overline{x} + 33 = 12 + 33 = 45$ και τυπική απόκλιση $S_Y = s = 4,3$. Επομένως ο συντελεστής μεταβολής του θα είναι:

$CV_Y = \dfrac{S_Y}{\overline{Y}} = \dfrac{4,3}{45} \simeq 0,095 = 9,5\% < 10\%$, οπότε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψει θα είναι ομοιογενές. Άρα ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

ΘΕΜΑ 4

Δύο διαφορετικά δείγματα μίας μεταβλητής Χ ενός πληθυσμού έχουν τις παρακάτω τιμές:

Δείγμα 1: 8, 9, 10, 11, 12 και

Δείγμα 2: 8, 10, 10, 10, 12

α) Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και τη διάμεσο δ.

(Μονάδες 6)

β) Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 και την τυπική απόκλιση s.

(Μονάδες 6)

γ) Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV.

(Μονάδες 6)

δ) Ένας μαθητής διατύπωσε την άποψη:

«Αν δύο διαφορετικά δείγματα έχουν ίδια μέση τιμή και διάμεσο, τότε εμφανίζουν και την ίδια ομοιογένεια.»

Συμφωνείτε με αυτήν την άποψη; Χρησιμοποιώντας τα δείγματα που δόθηκαν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Η μέση τιμή ενός δείγματος δίνεται από τον τύπο $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu}$.

Για το δείγμα 1 έχουμε: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{8+9+10+11+12}{5} = \frac{50}{5} = 10$.

Για το δείγμα 2 έχουμε: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{8+10+10+10+12}{5} = \frac{50}{5} = 10$.

Η διάμεσος ενός δείγματος με περιττό πλήθος παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, είναι ίση με τη μεσαία παρατήρηση. Εφόσον, για το δείγμα 1 έχουμε πέντε παρατηρήσεις, τότε η τρίτη παρατήρηση είναι η διάμεσος, άρα $\delta = 10$.

Ομοίως, για το δείγμα 2 είναι $\delta = 10$.

β) Για τον υπολογισμό της διασποράς έχουμε:

Για το δείγμα 1 :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \overline{x})^2}{\nu} = \frac{(8-10)^2 + (9-10)^2 + (10-10)^2 + (11-10)^2 + (12-10)^2}{5}$$
$$= \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

Για το δείγμα 2 :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \overline{x})^2}{\nu} = \frac{(8-10)^2 + (10-10)^2 + (10-10)^2 + (10-10)^2 + (12-10)^2}{5}$$
$$= \frac{4+0+0+0+4}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6.$$

Συνεπώς, η τυπική απόκλιση για τα δύο δείγματα είναι:

Για το δείγμα 1: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2}$.

Για το δείγμα 2: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1{,}6}$.

γ) Ο συντελεστής μεταβολής δίνεται από τον τύπο $CV = \frac{s}{\overline{x}}$, οπότε :

Για το δειγμα 1: $CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

Για το δειγμα 2: $CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{\sqrt{1{,}6}}{10}$.

δ) Η άποψη του μαθητή δεν είναι σωστή. Τα δύο δείγματα που δόθηκαν έχουν την ίδια μέση τιμή και την ίδια διάμεσο, όμως ο συντελεστής μεταβολής του πρώτου δείγματος είναι μεγαλύτερος από το συντελεστή μεταβολής του δεύτερου δείγματος γιατί $\frac{\sqrt{2}}{10} > \frac{\sqrt{1{,}6}}{10}$. Επομένως τα δείγματα διαφέρουν ως προς την ομοιογένεια.

ΘΕΜΑ 4

Ένας καθηγητής Μαθηματικών που διδάσκει στο ΕΠΑΛ μιας πόλης, κατέγραψε τη βαθμολογία που πέτυχαν οι 20 μαθητές του, στις Πανελλαδικές Εξετάσεις, στην κλίμακα 0 – 20. Στη συνέχεια κατασκεύασε το διπλανό πίνακα, όπου σημείωσε τους βαθμούς που πέτυχαν οι μαθητές του (η στήλη των x_i) και το πλήθος-συχνότητα των μαθητών που τους πέτυχε (η στήλη των ν_i). N_i είναι η αθροιστική συχνότητα.

Βαθμός x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \cdot \nu_i$	N_i
6	3		
8	2		
10	4		
11	1		
14	5		
15	1		
18	3		
20	1		
ΣΥΝΟΛΟ	20		

α) Να συμπληρώσετε τις δύο στήλες του πίνακα που δεν έχουν συμπληρωθεί.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας, που πέτυχαν οι μαθητές του ΕΠΑΛ αυτού.

(Μονάδες 7)

γ) Όταν ο σύλλογος των διδασκόντων του ΕΠΑΛ αυτού, συζήτησε τα αποτελέσματα που πέτυχαν οι μαθητές τους, ο καθηγητής των Μαθηματικών υποστήριξε ότι:

i. το πανελλαδικό ποσοστό, όσων μαθητών έγραψε κάτω από τη βάση (κάτω από 10) ξεπερνάει το 52% και είναι υπερδιπλάσιο από το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών του σχολείου.

ii. το πανελλαδικό ποσοστό, όσων μαθητών έγραψε άριστα (από 18 έως 20) είναι μόλις το 5%, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών του σχολείου είναι τετραπλάσιο αυτού.

Συμφωνείτε με τις απόψεις που διατύπωσε ο Μαθηματικός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Βαθμός x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \cdot \nu_i$	N_i
6	3	18	3
8	2	16	5
10	4	40	9
11	1	11	10
14	5	70	15
15	1	15	16
18	3	54	19
20	1	20	20
ΣΥΝΟΛΟ	20	244	

β) Λόγω του ερωτήματος (α) είναι: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \dfrac{244}{20} = 12,2$ η ζητούμενη μέση τιμή της βαθμολογίας όλων.

γ)

i. Οι μαθητές του σχολείου που έγραψαν κάτω από τη βάση είναι $N_2 = 5$ (3 που έγραψαν 6 και 2 που έγραψαν 8) και το ποσοστό τους: $\dfrac{5}{20} = 0,25 = 25\%$

Εφόσον το αντίστοιχο πανελλαδικό ποσοστό είναι 52%, είναι υπερδιπλάσιο από το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών του σχολείου. Άρα ο Μαθηματικός έχει δίκιο.

ii. Οι μαθητές του σχολείου που έγραψαν άριστα είναι 4 (3 που έγραψαν 18 και 1 που έγραψε 20) και το ποσοστό τους: $\dfrac{4}{20} = 0,2 = 20\%$.

Και είναι τετραπλάσιο από το αντίστοιχο πανελλαδικό ποσοστό που είναι 5%. Άρα ο Μαθηματικός και εδώ έχει δίκιο.

ΘΕΜΑ 4

Μελετήσαμε ένα δείγμα Ι.Χ. αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στο κέντρο της Αθήνας ως προς τον αριθμό των επιβατών συμπεριλαμβανομένου και του οδηγού. Μερικά από τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός επιβατών x_i	**Αριθμός αυτοκινήτων ν_i**	**f_i**	**$f_i\%$**	**N_i**	**F_i**	**$F_i\%$**
1	**50**	**0,125**				
2	**110**	**0,275**				
3		**0,3**				
4	**30**	**0,075**				
5	**90**					
ΣΥΝΟΛΑ	**ν=400**					

α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος.

(Μονάδες 7)

γ) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι το δείγμα είναι ομοιογενές. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Γιάννη; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(Μονάδες 11)

(Δίνεται ότι: $\sqrt{7} = 2,65$)

ΛΥΣΗ

α)

$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} \Leftrightarrow 0{,}3 = \frac{\nu_3}{400} \Leftrightarrow \nu_3 = 400 \cdot 0{,}3 \Leftrightarrow \nu_3 = 120.$

$f_5 = \frac{\nu_5}{\nu} \Leftrightarrow f_5 = \frac{90}{400} \Leftrightarrow f_5 = 0{,}225.$

$f_1 = 0{,}125$ άρα $f_1\% = 12{,}5.$

$f_2 = 0{,}275$ άρα $f_2\% = 27{,}5.$

$f_3 = 0{,}3$ άρα $f_3\% = 30.$

$f_4 = 0{,}075$ άρα $f_4\% = 7{,}5.$

$f_5 = 0{,}225$ άρα $f_5\% = 22{,}5.$

$N_1 = \nu_1 = 50.$

$N_2 = N_1 + \nu_2 = 50+110=160.$

$N_3 = N_2 + \nu_3 = 160+120=280.$

$N_4 = N_3 + \nu_4 = 280+30=310.$

$N_5 = N_4 + \nu_5 = 310+90=400$ ή $N_5 = \nu = 400.$

$F_1 = f_1 = 0{,}125.$

$F_2 = F_1 + f_2 = 0{,}125 + 0{,}275 = 0{,}4.$

$F_3 = F_2 + f_3 = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$

$F_4 = F_3 + f_4 = 0{,}7 + 0{,}075 = 0{,}775.$

$F_5 = F_4 + f_5 = 0{,}775 + 0{,}225 = 1.$

$F_1 = 0{,}125$ άρα $F_1\% = 12{,}5$

$F_2 = 0{,}4$ άρα $F_2\% = 40$

$F_3 = 0{,}7$ άρα $F_3\% = 70$

$F_4 = 0{,}775$ άρα $F_4\% = 77{,}5$

$F_5 = 1$ άρα $F_5\% = 100$

Αριθμός επιβατών x_i	Αριθμός αυτοκινήτων v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
1	50	0,125	12,5	50	0,125	12,5
2	110	0,275	27,5	160	0,4	40
3	120	0,3	30	280	0,7	70
4	30	0,075	7,5	310	0,775	77,5
5	90	0,225	22,5	400	1	100
ΣΥΝΟΛΑ	ν=400	1	100			

β)

Αριθμός επιβατών x_i	Αριθμός αυτοκινήτων	$x_i\, v_i$	$(x_i-\bar{x})^2\, v_i$
1	50	50	200
2	110	220	110
3	120	360	0
4	30	120	30
5	90	450	360
ΣΥΝΟΛΑ	ν=400	1200	700

Η μέση τιμή είναι: $\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 + x_4 \cdot v_4 + x_5 \cdot v_5}{400} = \frac{50+220+360+120+450}{400} = \frac{1200}{400} = 3$

Αφού οι παρατηρήσεις του δείγματος είναι ν=400 (άρτιος), η διάμεσος θα ίση με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, αν αυτές έχουν διαταχθεί κατά αύξουσα σειρά. Δηλαδή: $\delta = \frac{x_{200}+x_{201}}{2} = \frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

γ) Για να ελέγξουμε την ομοιογένεια του δείγματος θα πρέπει να υπολογίσουμε το συντελεστή μεταβλητότητας CV και συνεπώς την τυπική απόκλιση. Γνωρίζουμε ότι ο τύπος που μας δίνει τη διακύμανση είναι: $s^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot \nu_i$, άρα:

$$s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 \cdot v_1 + (x_2-\bar{x})^2 \cdot v_2 + (x_3-\bar{x})^2 \cdot v_3 + (x_4-\bar{x})^2 \cdot v_4 + (x_5-\bar{x})^2 \cdot v_5}{400} = \frac{200+110+0+30+360}{400} = \frac{700}{400} =$$

$\frac{7}{4}$. Οπότε η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{2,65}{2}$=1,32.

Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι: $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{3} = \frac{1,32}{6}$=0,44>$\frac{1}{10}$.

Αφού CV>10% το δείγμα σημαίνει ότι δεν είναι ομοιογενές, συνεπώς ο ισχυρισμός του Γιάννη είναι λανθασμένος.

ΘΕΜΑ 4

Ο κυβισμός των κινητήρων Χ, σε κυβικά εκατοστά ενός δείγματος 10000 αυτοκινήτων, ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Στο παραπάνω δείγμα βρέθηκαν 5000 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 1800 κυβικά εκατοστά.

α) Να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή $\bar{x}$ του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος, είναι 1800 κυβικά εκατοστά.

(Μονάδες 8)

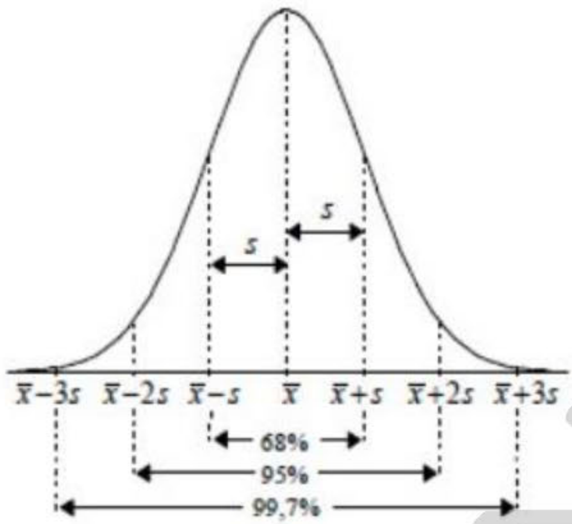
β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι στο παραπάνω δείγμα υπάρχουν 3400 αυτοκίνητα που ο κυβισμός τους είναι από 1800 κυβικά εκατοστά έως 2000 κυβικά εκατοστά, να βρείτε την τυπική απόκλιση s του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

(Μονάδες 10)

γ) Να εκτιμήσετε το εύρος R του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ



(εικόνα 1)

α) Γνωρίζουμε ότι σε μια κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων ενός δείγματος είναι μικρότερες της μέσης τιμής $\bar{x}$ και επειδή στο δείγμα μας που αποτελείται από 10000 αυτοκίνητα, τα 5000 που αντιστοιχούν στο 50% έχουν κυβισμό μικρότερο από 1800 κυβικά εκατοστά θα έχουμε ότι $\bar{x} = 1800$.

β) Τα 3400 αυτοκίνητα αντιστοιχούν στο 34% του δείγματος. Παρατηρώντας τα ποσοστά της εικόνας 1 που αντιστοιχούν σε μια κανονική κατανομή, βλέπουμε ότι το 34% αντιστοιχεί στο διάστημα $(\bar{x}, \bar{x} + s)$.

Έχουμε από το α) ότι $\bar{x} = 1800$ και επιπλέον τα 3400 αυτοκίνητα έχουν κυβισμό από 1800 έως 2000 κυβικά εκατοστά, συνεπώς θα βρισκόμαστε στο διάστημα $(\bar{x}, \bar{x} + s)$ και άρα $\bar{x} + s = 2000$ και αφού $\bar{x} = 1800$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι s=200.

γ) το εύρος γνωρίζουμε ότι ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$ και από β) θα έχουμε $R \approx 6 \cdot 200 = 1200$.

ΘΕΜΑ 4

Στις 10 το πρωί, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων Α και Β, το πρώτο δεκαήμερο του Μαΐου ήταν:

Πόλη Α:	20	17	18	20	17	16	17	16	18	10
Πόλη Β:	18	22	20	17	16	16	15	17	12	16

α) Να βρείτε τη μέση και τη διάμεσο θερμοκρασία των πόλεων Α και Β, για το πρώτο δεκαήμερο του Μαΐου.

(Μονάδες 9)

β) Ο Γιάννης υπολόγισε την τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (σε βαθμούς Κελσίου) των πόλεων Α και Β και βρήκε ότι είναι: $S_A = 2{,}66$ και $S_B = 2{,}59$ αντίστοιχα. Να δικαιολογήσετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

(Μονάδες 6)

γ) Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς. Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α, να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας (Δίνεται ότι: $\frac{2{,}59}{16{,}9} = 0{,}153$ και $\frac{2{,}66}{11{,}9} = 0{,}223$).

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α)

Οι θερμοκρασίες της πόλης Α είναι οι παρακάτω:

Πόλη Α:	20	17	18	20	17	16	17	16	18	10

Θα υπολογίσουμε αρχικά τη μέση τιμή:

$$\overline{x} = \frac{20+17+18+20+17+16+17+16+18+10}{10} = \frac{169}{10} = 16{,}9$$

Για τον υπολογισμό της διαμέσου θα πρέπει να τοποθετήσουμε τις θερμοκρασίες σε αύξουσα σειρά: 10 16 16 17 **17** **17** 18 18 20 20

και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη διάμεσο ως:

$$\delta = \frac{5\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta} + 6\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta}}{2} = \frac{17+17}{2} = 17$$

Οι θερμοκρασίες της πόλης Β είναι οι παρακάτω:

Πόλη Β:	18	22	20	17	16	16	15	17	12	16

Θα υπολογίσουμε αρχικά τη μέση τιμή:

$$\overline{x}_B = \frac{18+22+20+17+16+16+15+17+12+16}{10} = \frac{169}{10} = 16{,}9$$

Για τον υπολογισμό της διαμέσου θα πρέπει να τοποθετήσουμε τις θερμοκρασίες σε αύξουσα σειρά: 12 15 16 16 **16** **17** 17 18 20 22

και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη διάμεσο ως:

$$\delta = \frac{5\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta} + 6\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta}}{2} = \frac{16+17}{2} = 16{,}5$$

β) Υπολογίζουμε τη διασπορά των θερμοκρασιών της πόλης Α και έχουμε:

$$S_A{}^2 = 2{,}66^2 = 7{,}0756$$

Υπολογίζουμε τη διασπορά των θερμοκρασιών της πόλης Β και έχουμε:

$$S_B{}^2 = 2{,}59^2 = 6{,}7081$$

Αν συγκρίνουμε τις δύο διασπορές: $S_A{}^2 = 2{,}66^2 = 7{,}0756 > 6{,}7081 = 2{,}59^2 = S_B{}^2$ διαπιστώνουμε ότι οι θερμοκρασίες της πόλης Α έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

γ) Οι σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α θα είναι ελαττωμένες κατά 5 βαθμούς και είναι οι παρακάτω:

Πόλη Α:	15	12	13	15	12	11	12	11	13	5

Η διορθωμένη μέση τιμή των θερμοκρασιών θα είναι ελαττωμένη κατά 5 μονάδες δηλαδή:

$$\overline{x}_A = \frac{15+12+13+15+12+11+12+11+13+5}{10} = \frac{119}{10} = 11{,}9$$

ενώ η τυπική απόκλιση θα παραμείνει ίδια.

Άρα $S_A = 2{,}66$. Ο Συντελεστής Μεταβολής για την πόλη Α θα είναι:

$CV_A = \frac{S_A}{\overline{x}_A} = \frac{2{,}66}{11{,}9} = 0{,}223$ δηλαδή 22,3% η ομοιογένεια των θερμοκρασιών της πόλης Α.

Για την πόλη Β έχουμε από το α) $\overline{x}_B = 16{,}9$ και από το β) $S_B = 2{,}59$, άρα:

$CV_B = \frac{S_B}{\overline{x}_B} = \frac{2{,}59}{16{,}9} = 0{,}153$ δηλαδή 15,3% η ομοιογένεια των θερμοκρασιών της πόλης Β.

Επειδή $CV_A = 0{,}223 > 0{,}153 = CV_B$ οι τιμές της θερμοκρασίας της πόλης Β παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια.

(Στην περίπτωση δύο δειγμάτων μεγαλύτερη ομοιογένεια παρουσιάζει αυτό που έχει τον μικρότερο συντελεστή μεταβολής).

ΘΕΜΑ 4

Έστω α ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Δίνεται η παρακάτω κατανομή συχνοτήτων:

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	ν_i	$x_i\nu_i$
30-40		α	
40-50		2α	
50-60		3α	
60-70		4α	
Σύνολο		10α	

α)

i. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας.

(Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι $\overline{x} = 55$.

(Μονάδες 4)

β)

i. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας.

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμή x_i	ν_i	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \nu_i$
30-40		α			
40-50		2α			
50-60		3α			
60-70		4α			
Σύνολο		10α			

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε την διακύμανση s^2 της κατανομής.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την μέση τιμή και την διακύμανση της κατανομής συχνοτήτων του παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις [-)	ν_i
30-40	10
40-50	20
50-60	30
60-70	40
Σύνολο	100

(Μονάδες 8)

Λύση

α)

i. Η κεντρική τιμή μιας κλάσης είναι το ημιάθροισμα των άκρων της, οπότε προκύπτει ο πίνακας:

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	ν_i	$\nu_i x_i$
30-40	35	α	35α
40-50	45	2α	90α
50-60	55	3α	165α
60-70	65	4α	260α
Σύνολο		10α	550α

ii. Η μέση τιμή είναι $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i \nu_i}{\nu} = \dfrac{550\alpha}{10\alpha} = 55$.

β)

i. Με την βοήθεια του α) ερωτήματος συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	ν_i	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - x\right)^2$	$\left(x_i - x\right)^2 \nu_i$
30-40	35	α	-20	400	400α
40-50	45	2α	-10	100	200α
50-60	55	3α	0	0	0
60-70	65	4α	10	100	400α
Σύνολο		10α			1000α

ii. Έχουμε $s^2 = \dfrac{1}{\nu} \sum_{1}^{4} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \nu_i = \dfrac{1}{10\alpha} 1000\alpha = 100$

γ) Παρατηρούμε ότι η καινούργια κατανομή προκύπτει από την κατανομή του ερωτήματος α) αν θέσουμε $\alpha = 10$.

Οπότε από τα προηγούμενα ερωτήματα και για την νέα κατανομή έχουμε μέση τιμή $\overline{x} = 55$ και διακύμανση $s^2 = 100$.

ΘΕΜΑ 4

Μια εταιρεία απασχολεί 7 υπαλλήλους, οι 4 από αυτούς εργάζονται στο τμήμα Α και οι υπόλοιποι 3 στο τμήμα Β. Οι μισθοί (σε ευρώ) των 4 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι: 990, 910, 960, 940.

Ενώ των 3 εργαζομένων στο τμήμα Β είναι: 990, 980, 1000.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα Α της εταιρείας.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το ποσοστό των εργαζομένων στο τμήμα Α της εταιρείας, που έχουν μισθό μικρότερο από το μέσο μισθό των εργαζομένων στο τμήμα Β.

(Μονάδες 9)

γ) Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των μισθών των 4 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι 950 ευρώ ενώ η μέση τιμή των μισθών των 3 εργαζομένων στο τμήμα Β είναι 990 ευρώ. Η εταιρεία θέλει να προσλάβει έναν υπάλληλο στο τμήμα Β ώστε η νέα μέση τιμή των μισθών των εργαζομένων του τμήματος Β να είναι ίση με αυτή του τμήματος Α, ποιος πρέπει να είναι ο μισθός του υπαλλήλου που θα προσληφθεί;

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α)

Οι μισθοί των 4 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι:

990, 910, 960, 940.

Θα υπολογίσουμε αρχικά τη μέση τιμή:

$$\bar{x}_A = \frac{990 + 910 + 960 + 940}{4} = \frac{3800}{4} = 950$$

Για τον υπολογισμό της διαμέσου θα πρέπει να τοποθετήσουμε τους μισθούς σε αύξουσα σειρά: 910 **940** **960** 990

και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη διάμεσο ως:

$$\delta = \frac{2η\ τιμή + 3η\ τιμή}{2} = \frac{940 + 960}{2} = 950$$

β) Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή των μισθών στο τμήμα Β:

$$\bar{x}_B = \frac{990 + 980 + 1000}{3} = \frac{2970}{3} = 990$$

Θα εξετάσουμε πόσοι εργαζόμενοι στο τμήμα Α έχουν μισθό μικρότερο από το μέσο μισθό των εργαζομένων στο τμήμα Β που είναι 990 ευρώ. Παρατηρούμε ότι:

$910 < \bar{x}_B = 990$,

$960 < \bar{x}_B = 990$,

$940 < \bar{x}_B = 990$.

Άρα 3 εργαζόμενοι από τους 4 στο τμήμα Α της εταιρείας έχουν μισθό μικρότερο από το μέσο μισθό των εργαζομένων στο τμήμα Β, δηλαδή $\frac{3}{4} = 0{,}75$ την εργαζομένων ή το 75%.

γ) Αφού και τα δύο τμήματα μετά την πρόσληψη του νέου υπαλλήλου στο τμήμα Β θα έχουν τον ίδιο αριθμό εργαζομένων, 4 άτομα κάθε τμήμα, για να έχουν την ίδια μέση τιμή μισθών θα πρέπει το άθροισμα των μισθών να είναι το ίδιο και στα δύο τμήματα.

Γνωρίζουμε ότι:

$$\bar{x}_A = 950$$

και ότι οι εργαζόμενοι στο τμήμα Α είναι 4, άρα το άθροισμα των μισθών τους θα είναι: $950 \cdot 4 = 3800$ ευρώ.

Επίσης πριν την πρόσληψη έχουμε: $\bar{x}_B = 990$ και οι εργαζόμενοι στο τμήμα Β είναι 3, άρα το άθροισμα των μισθών τους θα είναι: $990 \cdot 3 = 2970$ ευρώ

Ο νέος υπάλληλος που θα προσληφθεί θα πρέπει να έχει μισθό 3800-2970=830 ώστε ο μέσος μισθός και στα δύο τμήματα να είναι ο ίδιος.

ΘΕΜΑ 4

Ο χρόνος αναμονής των πολιτών μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια δημόσια υπηρεσία ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή 5 λεπτά και τυπική απόκλιση 1 λεπτό.

α) Να βρείτε πόσο είναι περίπου το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο:

i. Από 4 έως 6 λεπτά.

ii. Από 3 έως 6 λεπτά.

(Μονάδες 8)

β) Αν το πλήθος των πολιτών που εξυπηρετήθηκαν το μήνα Μάιο σε αυτή την υπηρεσία ήταν 5000 πόσοι περίπου πολίτες περίμεναν από 5 έως 6 λεπτά μέχρι να εξυπηρετηθούν;

(Μονάδες 6)

γ) Να εκτιμήσετε το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πολιτών.

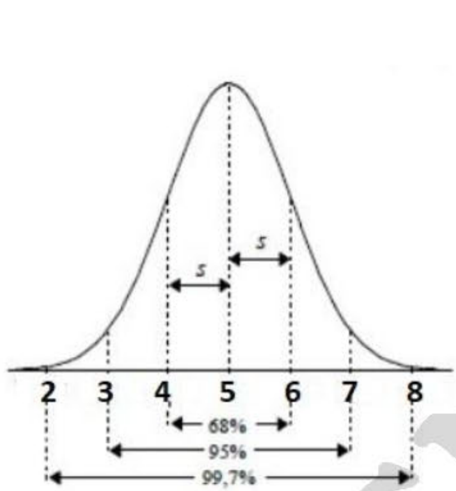
(Μονάδες 6)

δ) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι: $\bar{x} = 5$ και $s = 1$. Άρα η εικόνα 1 μας δίνει την καμπύλη της κανονικής κατανομής του προβλήματος μας.



(εικόνα 1)

i. Από 4 έως 6 λεπτά εξυπηρετούνται περίπου το 68% των πολιτών.

ii. Από 3 έως 6 λεπτά εξυπηρετούνται το: $68 + \frac{95-68}{2} = 68 + \frac{27}{2} = 68 + 13{,}5 = 81{,}5$

Άρα το 81,5% των πολιτών εξυπηρετείται από 3 έως 6 λεπτά.

β) από 5 έως 6 λεπτά εξυπηρετούνται το 34% των πολιτών συνεπώς το μήνα Μάιο, εφόσον οι πολίτες που εξυπηρετήθηκαν ήταν 5000 το 34% αυτών είναι:

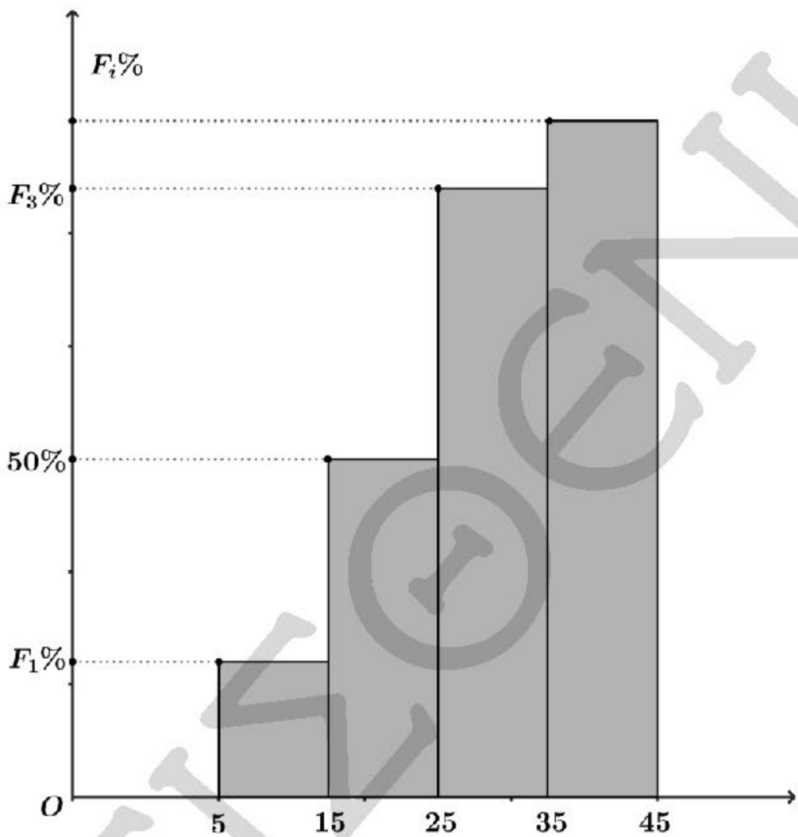
$\frac{34}{100} \cdot 5000 = 34 \cdot 50 = 1700$ πολίτες.

γ) το εύρος γνωρίζουμε ότι ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$ και από υπόθεση θα έχουμε $R \approx 6 \cdot 1 = 6$.

δ) Γνωρίζουμε ότι ο Συντελεστής Μεταβολής υπολογίζεται από τον τύπο: $CV = \frac{s}{\bar{x}}$ και επιπλέον έχουμε ότι: $\bar{x} = 5$ και $s = 1$, άρα: $CV = \frac{1}{5} = 0{,}2$ δηλαδή 20%.

ΘΕΜΑ 4

Οι χρόνοι σε λεπτά, που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα [5,45) και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



α) Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Μονάδες 10)

β)

i. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι α=8

(Μονάδες 7)

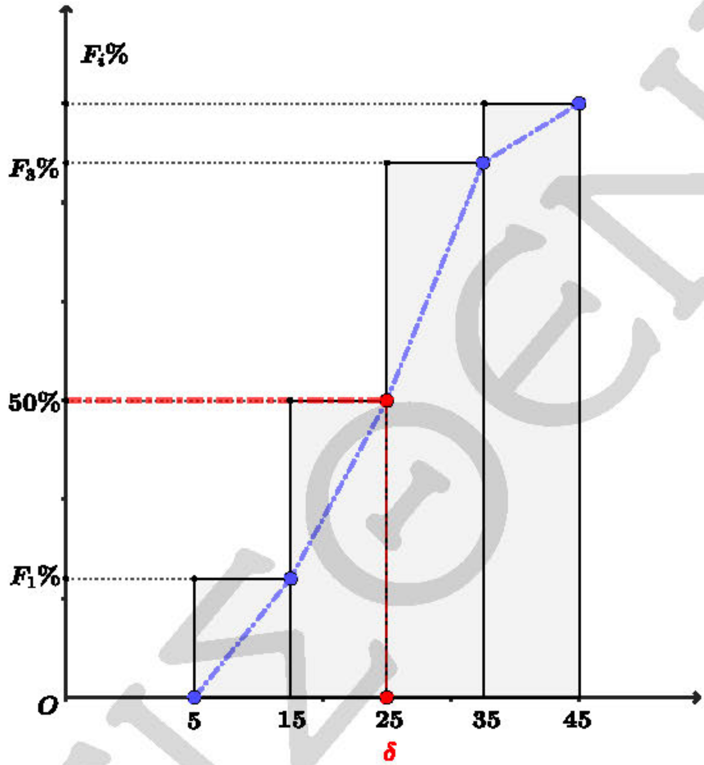
ii. και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας.

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)		α+4			
[15,25)		3α-6			
[25,35)		2α+8			
[35,45)		α-2			
Σύνολο					

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε τη διάμεσο δ θα αξιοποιήσουμε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό. Εντοπίζουμε στον κατακόρυφο άξονα το 50% και στη συνέχεια φέρνουμε παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα μέχρι να συναντήσουμε την πολυγωνική γραμμή, όταν συμβεί αυτό φέρνουμε παράλληλη προς τον κατακόρυφο άξονα και στο σημείο που συναντήσουμε τον οριζόντιο άξονα βρίσκεται η διάμεσος, έτσι λοιπόν βρίσκουμε ότι δ=25.



β)

i. Από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό βλέπουμε ότι στις 2 πρώτες κλάσεις υπάρχει το 50% των παρατηρήσεων, συνεπώς στις 2 τελευταίες θα υπάρχει το υπόλοιπο 50% των παρατηρήσεων, δηλαδή το άθροισμα των συχνοτήτων στις 2 πρώτες κλάσεις θα πρέπει να ισούται με το άθροισμα των συχνοτήτων στις 2 τελευταίες άρα:

$\alpha+4+3\alpha-6=2\alpha+8+\alpha-2 \Leftrightarrow 4\alpha-2=3\alpha+6 \Leftrightarrow 4\alpha-3\alpha=6+2 \Leftrightarrow \alpha=8$.

ii.

η $1^η$ κλάση [5,15) έχει κεντρική τιμή $x_1=10$

η $2^η$ κλάση [15,25) έχει κεντρική τιμή $x_2=20$

η $3^η$ κλάση [25,35) έχει κεντρική τιμή $x_3=30$

η 4^{η} κλάση [35,45) έχει κεντρική τιμή $x_4 = 40$

Από το βi) βρήκαμε ότι α=8, άρα έχουμε:

$\nu_1 = \alpha+4=8+4=12$ $\nu_2 = 3\alpha-6=24-6=18$

$\nu_3 = 2\alpha+8=16+8=24$ $\nu_4 = \alpha-2=8-2=6$

Επίσης: $N_1 = \nu_1 = 12$, $N_2 = N_1 + \nu_2 = 12+18=30$, $N_3 = N_2 + \nu_3 = 30+24=54$ και $N_4 = N_3 + \nu_4 = 54+6=60$.

$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{12}{60} = 0{,}2$ άρα $f_1\% = 20\%$ και $F_1\% = 20\%$

$f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{18}{60} = 0{,}3$ άρα $f_2\% = 30\%$ και

$F_2\% = F_1\% + f_2\% = 30\% + 20\% = 50\%$

$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{24}{60} = 0{,}4$ άρα $f_3\% = 40\%$ και

$F_3\% = F_2\% + f_3\% = 50\% + 40\% = 90\%$

$f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{6}{60} = 0{,}1$ άρα $f_4\% = 10\%$ και

$F_4\% = F_3\% + f_4\% = 90\% + 10\% = 100\%$

Ο συμπληρωμένος πίνακας φαίνεται παρακάτω:

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		ν=60	100		

ΘΕΜΑ 4

Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές x_1=α, x_2=α+5, x_3=α+10 και x_4=α+35, όπου α πραγματικός αριθμός. Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες των τιμών δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x_i	F_i
α	$\frac{4}{\lambda}$
α+5	$\frac{11}{\lambda}$
α+10	$\frac{18}{\lambda}$
α+35	$\frac{25}{\lambda}$

όπου λ θετικός ακέραιος.

α) Να αποδείξετε ότι λ=25.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_1, F_2, F_3 και F_4 αλλά και τις σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3 και f_4.

(Μονάδες 8)

γ) Αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 19$, να βρείτε την τιμή του α.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Θα πρέπει να ισχύει: $F_4 = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 25$.

β) Έχουμε: $F_1 = \frac{4}{25} = f_1$.

$F_2 = \frac{11}{25}$, αλλά $F_2 = F_1 + f_2 \Leftrightarrow \frac{11}{25} = \frac{4}{25} + f_2 \Leftrightarrow f_2 = \frac{7}{25}$.

$F_3 = \frac{18}{25}$, αλλά $F_3 = F_2 + f_3 \Leftrightarrow \frac{18}{25} = \frac{11}{25} + f_3 \Leftrightarrow f_3 = \frac{7}{25}$.

$F_4 = F_3 + f_4 \Leftrightarrow 1 = \frac{18}{25} + f_4 \Leftrightarrow f_4 = \frac{7}{25}$.

γ) για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 =$$

$$= \alpha \cdot \frac{4}{25} + (\alpha + 5) \cdot \frac{7}{25} + (\alpha + 10) \cdot \frac{7}{25} + (\alpha + 35) \cdot \frac{7}{25} =$$

$$\frac{4\alpha}{25} + \frac{7\alpha + 35}{25} + \frac{7\alpha + 70}{25} + \frac{7\alpha + 245}{25} = \frac{25\alpha + 350}{25} = \frac{25 \cdot (\alpha + 14)}{25} = \alpha + 14$$

Αφού $\bar{x} = 19 \Leftrightarrow \alpha + 14 = 19 \Leftrightarrow \alpha = 5$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=20\cdot s\cdot x^2-2\cdot \bar{x}\cdot x+3$, $x\in R$, όπου $\bar{x}$, s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

α) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f.

(Μονάδες 04)

Αν ισχύει ότι $f'(1)=0$, τότε:

β) Να δείξετε ότι το δείγμα των ν παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

(Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $s=1$, τότε να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

(Μονάδες 04)

δ) Για $s=1$ και $\bar{x}=20$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για $x \in R$ με

$f'(x) = (20 \cdot s \cdot x^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot x + 3)' = 40 \cdot s \cdot x - 2 \cdot \bar{x}$.

β) Ισχύει ότι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 40 \cdot s \cdot 1 - 2 \cdot \bar{x} = 0 \Leftrightarrow 40 \cdot s = 2 \cdot \bar{x} \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{40} = 0{,}05$

Επομένως $CV = \frac{s}{\bar{x}} = 0{,}05 = 5\% < 10\%$. Άρα το δείγμα των ν παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $\frac{s}{\bar{x}} = 0{,}05$. Επομένως για $s = 1$ έχουμε

$\frac{1}{\bar{x}} = 0{,}05 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{0{,}05} = 20$.

δ) Για $s = 1$ και $\bar{x} = 20$ η συνάρτηση f έχει τη μορφή $f(x) = 20x^2 - 40x + 3$, $x \in R$ και είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (20x^2 - 40x + 3)' = 40x - 40$. Έχουμε

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 40x - 40 = 0 \Leftrightarrow 40x = 40 \Leftrightarrow x = 1$ και

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 40x - 40 > 0 \Leftrightarrow 40x > 40 \Leftrightarrow x > 1$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘		↗

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = -17$.