

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

A. Σχέση μεταξύ τόξου (s) και επίκεντρης γωνίας (θ)

$$\theta = \frac{s}{R}$$

Η γωνία θ προκύπτει σε rad

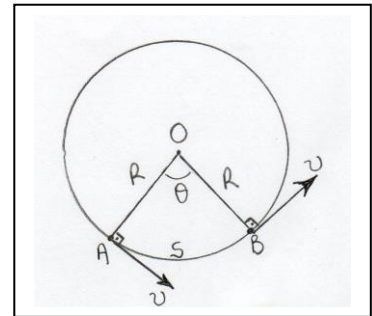
B. Γραμμική ταχύτητα (υ)

α. Μέτρο : $v = \frac{ds}{dt}$

β. Διεύθυνση εφαπτόμενη του κύκλου

γ. Φορά ίδια με τη φορά της κίνησης

δ. Μονάδα στο S.I το 1 m/sec



Στην ομαλή κυκλική κίνηση, η παραπάνω σχέση γράφεται : $v = \frac{s}{t}$

Σε χρόνο μιας περιόδου ($t=T$), το υλικό σημείο διαγράφει έναν πλήρη κύκλο ($s=2\pi R$).

Έτσι, η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi Rf$$

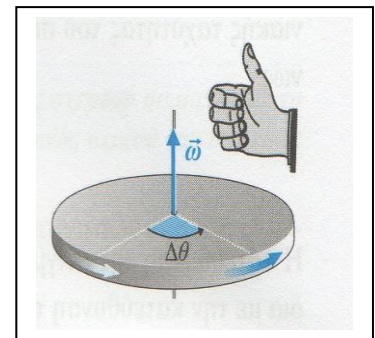
Γ. Γωνιακή ταχύτητα (ω)

α. Μέτρο : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

β. Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του κύκλου

γ. Φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού

δ. Μονάδα στο S.I το 1 rad/sec



Στην ομαλή κυκλική κίνηση, η παραπάνω σχέση γράφεται : $\omega = \frac{\theta}{t}$

Σε χρόνο μιας περιόδου ($t=T$), το υλικό σημείο διαγράφει έναν πλήρη κύκλο ($\theta=2\pi$).

Έτσι, η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Δ. Σχέση μεταξύ γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας

Από τις εξισώσεις $v = 2\pi Rf$ και $\omega = 2\pi f$ προκύπτει ότι : $v = \omega R$

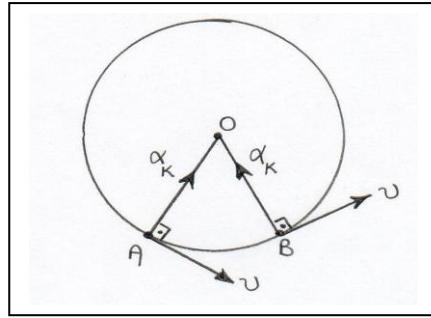
Ε. Κεντρομόλος επιτάχυνση (α_k)

α. Μέτρο : $\alpha_k = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

β. Διεύθυνση πάνω στην ακτίνα του κύκλου

γ. Φορά προς το κέντρο του κύκλου

δ. Μονάδα στο S.I το 1 m/sec^2



Η κεντρομόλος επιτάχυνση ευθύνεται για τη μεταβολή της διεύθυνσης της ταχύτητας

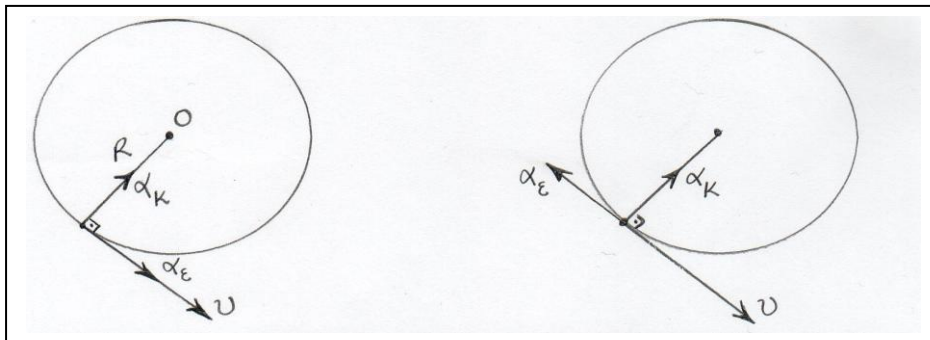
ΣΤ. Επιτρόχια (εφαπτομενική) επιτάχυνση (α_ϵ)

α. Μέτρο : $\alpha_\epsilon = \frac{dv}{dt}$

β. Διεύθυνση εφαπτόμενη του κύκλου

γ. Φορά ίδια με την ταχύτητα αν η κίνηση είναι επιταχυνόμενη και αντίθετη αν είναι επιβραδυνόμενη

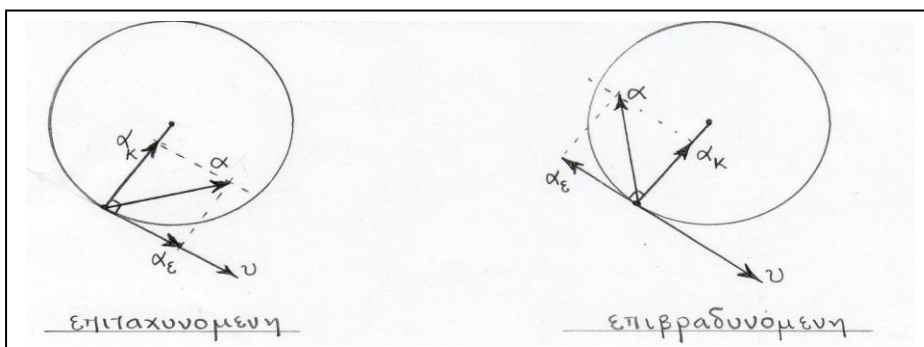
δ. Μονάδα στο S.I το 1 m/sec^2



Η επιτρόχια επιτάχυνση ευθύνεται για τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας.

Προφανώς, στην ομαλή κυκλική κίνηση : $a_\epsilon = 0$

Σημείωση : Το διανυσματικό άθροισμα της κεντρομόλου και της επιτρόχιας επιτάχυνσης, μας δίνει τη συνολική επιτάχυνση a .



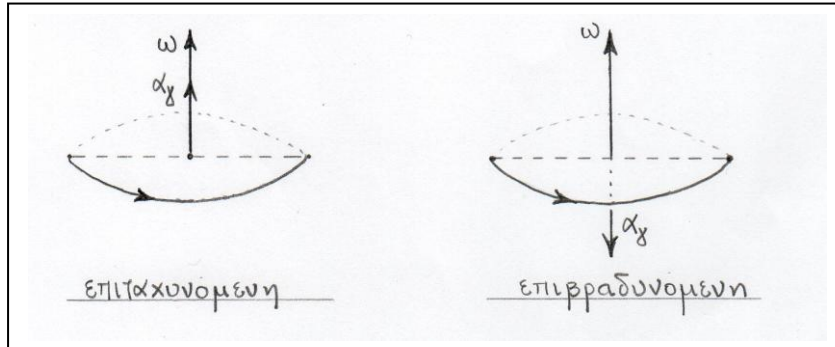
Ζ. Γωνιακή επιτάχυνση (α_γ)

α. Μέτρο : $\alpha_\gamma = \frac{d\omega}{dt}$

β. Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του κύκλου

γ. Φορά ίδια με τη γωνιακή ταχύτητα αν η κίνηση είναι επιταχυνόμενη και αντίθετη αν είναι επιβραδυνόμενη

δ. Μονάδα στο S.I το 1 rad/sec^2

**Η. Σχέση μεταξύ επιτροχίας και γωνιακής επιτάχυνσης**

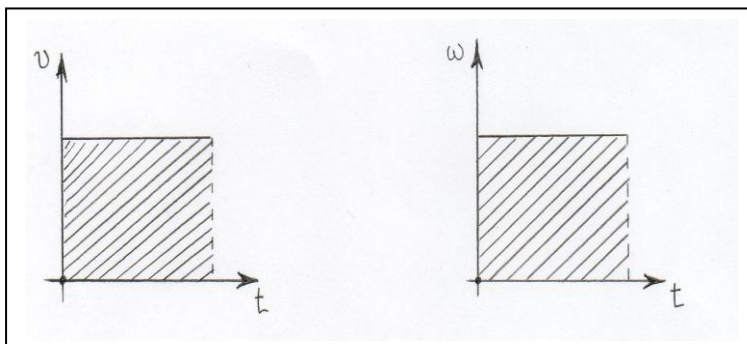
$$v = \omega R \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} \Rightarrow \alpha_\epsilon = R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_\epsilon = \alpha_\gamma R$$

Θ. Εξισώσεις κίνησης

α. Ομαλή κυκλική κίνηση

• $v = \frac{s}{t}$

$\omega = \frac{\theta}{t}$

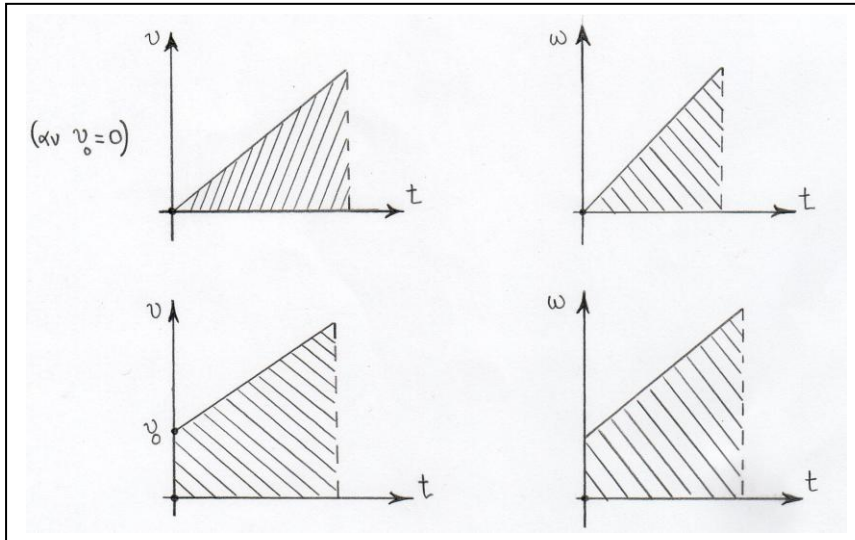


Το γραμμοσκιασμένο εμβαδό στο πρώτο διάγραμμα είναι ίσο αριθμητικά με το τόξο που διέγραψε το υλικό σημείο, ενώ στο δεύτερο διάγραμμα είναι ίσο με τη γωνία που διέγραψε η επιβατική ακτίνα (η ακτίνα που ενώνει το κέντρο του κύκλου με το υλικό σημείο)

β. Ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση

- $v = v_o + \alpha_\epsilon t$

$$\omega = \omega_o + \alpha_\gamma t$$

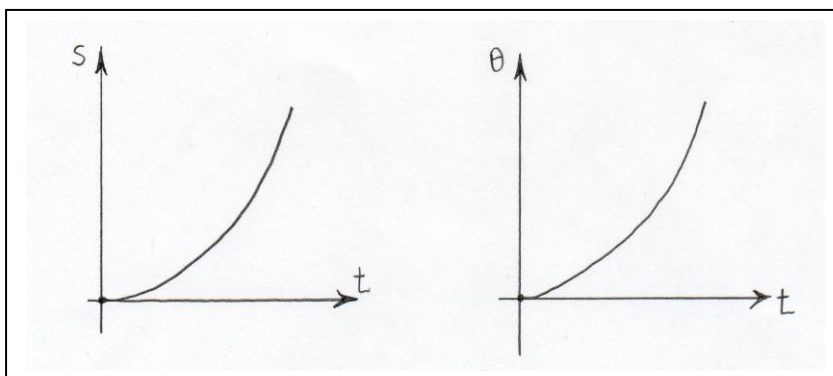


Το γραμμοσκιασμένο εμβαδό στο πρώτο διάγραμμα είναι ίσο αριθμητικά με το τόξο που διέγραψε το υλικό σημείο, ενώ στο δεύτερο διάγραμμα είναι ίσο με τη γωνία που διέγραψε η επιβατική ακτίνα

Η κλίση της ευθείας στο πρώτο διάγραμμα είναι ίση αριθμητικά με την επιτρίχια επιτάχυνση (α_ϵ), ενώ στο δεύτερο διάγραμμα είναι ίση με τη γωνιακή επιτάχυνση (α_γ)

- $s = v_o t + \frac{1}{2} \alpha_\epsilon t^2$

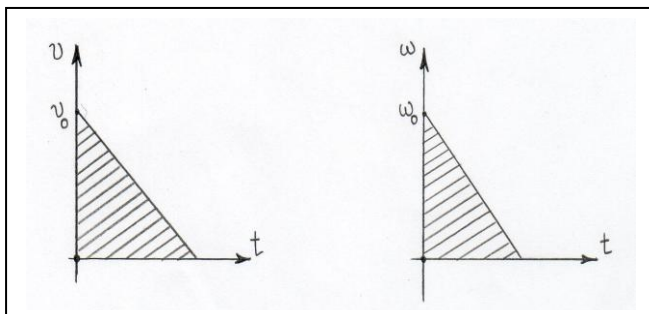
$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha_\gamma t^2$$



γ. Ομαλά επιβραδυνόμενη κυκλική κίνηση

- $v = v_o - \alpha_\epsilon t$

$$\omega = \omega_o - \alpha_\gamma t$$

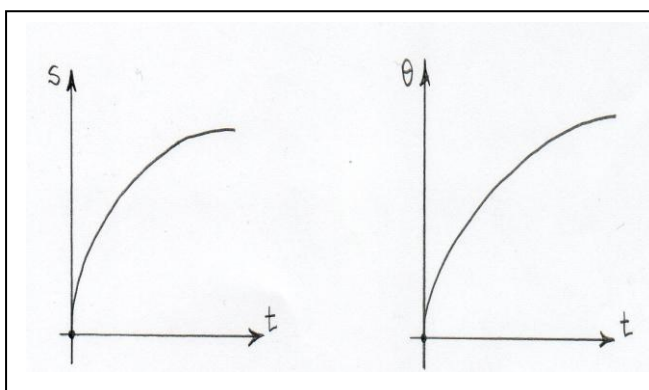


Το γραμμοσκιασμένο εμβαδό στο πρώτο διάγραμμα είναι ίσο αριθμητικά με το τόξο που διέγραψε το σώμα, ενώ στο δεύτερο διάγραμμα είναι ίσο με τη γωνία που διέγραψε η επιβατική ακτίνα

Η κλίση της ευθείας στο πρώτο διάγραμμα είναι ίση αριθμητικά με την επιτροχια επιτάχυνση (α_ϵ), ενώ στο δεύτερο διάγραμμα είναι ίση με τη γωνιακή επιτάχυνση (α_γ)

- $s = v_o t - \frac{1}{2} \alpha_\epsilon t^2$

$$\theta = \omega_o t - \frac{1}{2} \alpha_\gamma t^2$$



2. ΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Μέχρι τώρα μιλούσαμε μόνο για υλικά σημεία. Υλικό σημείο ονομάζεται ένα σώμα που έχει όλες τις ιδιότητες της ύλης, εκτός από διαστάσεις. Πρακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα σώμα είναι υλικό σημείο, όταν οι διαστάσεις του είναι ασήμαντες σε σχέση με τις διαστάσεις του περιβάλλοντος χώρου. **Ένα υλικό σημείο μπορεί να εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση.**

Όταν δεν μπορούμε να αγνοήσουμε τις διαστάσεις ενός σώματος, το ονομάζουμε στερεό σώμα. Τα στερεά σώματα, εκτός από μεταφορική, μπορούν να εκτελούν και στροφική (περιστροφική) κίνηση, που σημαίνει ότι αλλάζουν προσανατολισμό στο χώρο.

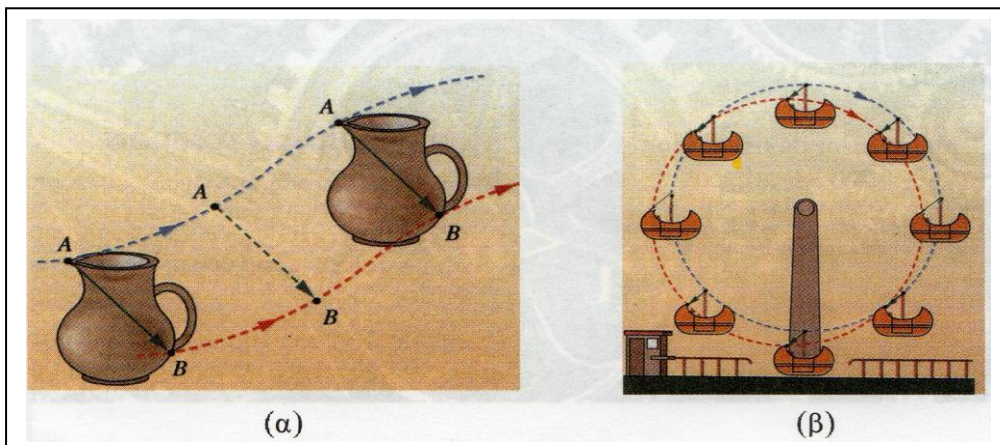
Όταν σε ένα στερεό σώμα ασκούνται δυνάμεις, αυτό μπορεί να παραμορφώνεται (μόνιμα ή προσωρινά). Αν δεν παραμορφώνεται, ονομάζεται μηχανικό στερεό.

A. Μεταφορική κίνηση

Ένα σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση, όταν κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα. Όταν ένα σώμα εκτελεί μεταφορική κίνηση, τότε :

- i) το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του σώματος μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του.
- ii) διατηρεί συνεχώς τον ίδιο προσανατολισμό στο χώρο.
- iii) οι τροχιές όλων των σημείων του σώματος είναι παράλληλες.

Μεταφορική κίνηση δεν είναι υποχρεωτικά μόνο η ευθύγραμμη κίνηση. Μπορεί να είναι και μία καμπυλόγραμμη, όπως βλέπουμε στα δύο παρακάτω σχήματα.



Στο σχήμα (α) βλέπουμε μία κανάτα που διαγράφει καμπύλη τροχιά. Το ευθ.τμήμα AB που ενώνει δύο σημεία της κανάτας μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του και, άρα, η κανάτα εκτελεί μεταφορική κίνηση.

Στο σχήμα (β) βλέπουμε ένα τροχό λούνα-παρκ. Ο τροχός ο ίδιος εκτελεί στροφική κίνηση. Αντίθετα, κάθε θαλαμίσκος του εκτελεί μεταφορική κίνηση καθώς διατηρεί σταθερό προσανατολισμό στο χώρο.

B. Στροφική κίνηση

Ένα σώμα εκτελεί στροφική κίνηση, όταν υπάρχει μία ευθεία (που ονομάζεται άξονας περιστροφής), της οποίας όλα τα σημεία παραμένουν ακίνητα ενώ τα υπόλοιπα σημεία του σώματος εκτελούν κυκλική κίνηση με διαφορετική ακτίνα. Τα κέντρα των κυκλικών αυτών τροχιών βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής και τα επίπεδά τους είναι κάθετα σε αυτόν.

Όλα τα σημεία του σώματος που εκτελούν κυκλικές κινήσεις έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα, αλλά διαφορετικές γραμμικές ταχύτητες, των οποίων τα μέτρα υπολογίζονται από τη σχέση $v = \omega R$, όπου R είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα περιστροφής.

Αν η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που περιστρέφεται είναι σταθερή, τότε λέμε ότι το σώμα εκτελεί **ομαλή στροφική κίνηση**.

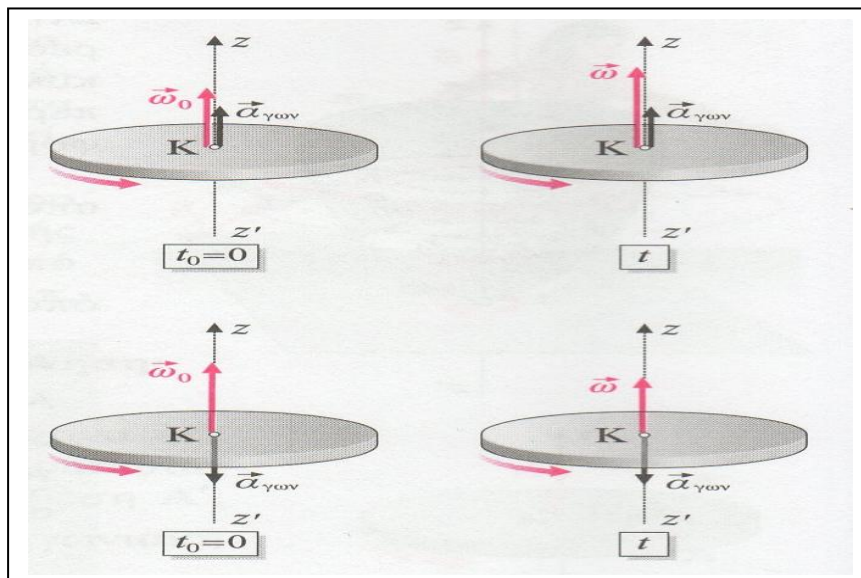
Αν, όμως, η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται, τότε το ρυθμό μεταβολής της ($d\omega/dt$) τον ονομάζουμε γωνιακή επιτάχυνση ($\alpha_{γων}$)

Δηλαδή :

$$\vec{\alpha}_{γων} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{γων}$ έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $d\vec{\omega}$ σε κάθε περίπτωση. Αν, τώρα, ο άξονας περιστροφής είναι σταθερός τότε :

- Αν η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}$ είναι ομόρροπη της γωνιακής ταχύτητας ω
- Αν η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη, η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}$ είναι αντίρροπη της γωνιακής ταχύτητας ω



Γ. Κέντρο μάζας

Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος, ονομάζεται το σημείο εκείνο που κινείται όπως θα κινούνταν ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος, αν σε αυτό ασκούσαν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Το κέντρο μάζας συμμετρικών και ομογενών σωμάτων συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους. Για παράδειγμα, το κέντρο μάζας ενός κύβου συμπίπτει με το σημείο τομής των διαγωνίων του.

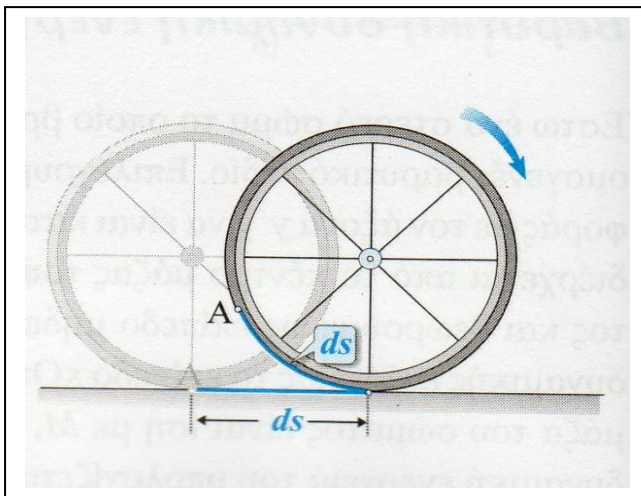
Το κέντρο μάζας ενός σώματος μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα. Για παράδειγμα, το κέντρο μάζας ενός ισοπαχούς ομογενούς δακτυλίου βρίσκεται στο κέντρο του.

Το κέντρο μάζας ενός σώματος συμπίπτει με το κέντρο βάρους του, όταν το σώμα βρίσκεται μέσα σε **ομογενές βαρυτικό πεδίο**.

Δ. Σύνθετη κίνηση

Ένα σώμα λέμε ότι εκτελεί **σύνθετη κίνηση**, όταν εκτελεί ταυτόχρονα και μεταφορική και στροφική κίνηση. Τέτοια είναι, για παράδειγμα, η κίνηση που κάνει ο τροχός ενός αυτοκινήτου όταν το αυτοκίνητο κινείται. Καθώς ο τροχός κυλιέται, αφενός περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με γωνιακή ταχύτητα ω , αφετέρου εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική κίνηση με ταχύτητα v_{cm} (που είναι η ταχύτητα του αυτοκινήτου)

Κατά την κύλιση του τροχού, κάθε σημείο της περιφέρειάς του έρχεται διαδοχικά σε επαφή με το έδαφος. Έτσι, όταν ένα σημείο A της περιφέρειάς του σε χρόνο dt περιστραφεί κατά ds , ο τροχός θα έχει μετακινηθεί κατά $dx=ds$.



Η γραμμική ταχύτητα u περιστροφής των σημείων της περιφέρειας του τροχού είναι ίση με $u=ds/dt$ και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του είναι ίση με $u_{cm}=dx/dt$. Αφού, όμως, $dx=ds$ καταλαβαίνουμε ότι $u_{cm}=u$.

Επιπλέον, επειδή για τη γραμμική ταχύτητα περιστροφής των σημείων της περιφέρειας του τροχού γνωρίζουμε ότι $u=\omega R$, συμπεραίνουμε ότι :

$$u_{cm}=u=\omega R$$

Αν η κίνηση του αυτοκινήτου είναι επιταχυνόμενη, τότε το κέντρο μάζας του τροχού κινείται με επιτάχυνση α_{cm} , η οποία θα είναι ίση με την επιτροχια επιτάχυνση α_ϵ των σημείων της περιφέρειας του τροχού, για την οποία γνωρίζουμε ότι : $\alpha_\epsilon=\alpha_\gamma R$, όπου α_γ είναι η γωνιακή επιτάχυνση περιστροφής του τροχού. Άρα :

$$\alpha_{cm}=\alpha_\epsilon=\alpha_\gamma R$$

Αφού, τώρα, ο τροχός εκτελεί σύνθετη κίνηση, η ταχύτητα κάθε σημείου του θα είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα της γραμμικής ταχύτητάς του u (λόγω της στροφικής κίνησης) και της ταχύτητας του κέντρου μάζας του τροχού u_{cm} (λόγω της μεταφορικής κίνησης), για τις οποίες - στην περίπτωση των σημείων της περιφέρειας του τροχού - αποδείξαμε παραπάνω ότι έχουν ίσα μέτρα.

Η γραμμική ταχύτητα περιστροφής κάθε σημείου είναι εφαπτόμενη του τροχού και έχει τη φορά της περιστροφής, ενώ η ταχύτητα της μεταφορικής κίνησής του είναι ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού.

Έτσι, η ταχύτητα μεταφοράς είναι ίδια για όλα τα σημεία του τροχού (κατά μέτρο, διεύθυνση, φορά), ενώ, αντίθετα, η ταχύτητα περιστροφής διαφέρει από σημείο σε σημείο (στη διεύθυνση).

Αυτά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, στο οποίο δείχνουμε πώς υπολογίζουμε τη συνολική ταχύτητα τεσσάρων χαρακτηριστικών σημείων του τροχού :

