

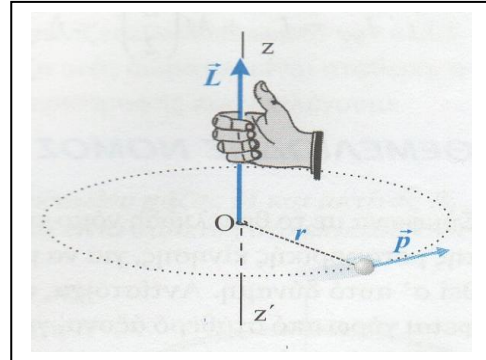
7. ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

Η στροφορμή αποτελεί το αντίστοιχο μέγεθος της ορμής στη στροφική κίνηση.

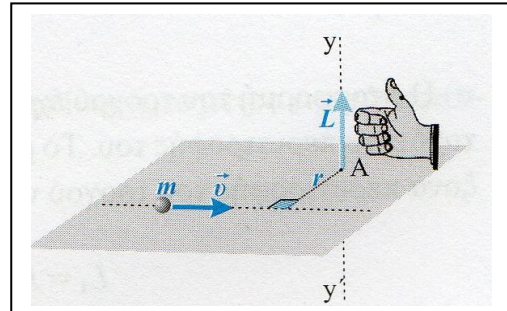
A. Στροφορμή υλικού σημείου

Έστω ένα υλικό σημείο μάζας m που κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r . Ονομάζουμε **στροφορμή L** του υλικού σημείου ως προς έναν άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο της τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της, το διανυσματικό μέγεθος που έχει :

- α. **μέτρο** ίσο με το γινόμενο της ορμής του και της ταχύτητάς του $L = p \cdot r = m v \cdot r$
- β. **διεύθυνση** αυτή του άξονα $z'z$
- γ. **φορά** που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού
- δ. **μονάδα** στο SI το $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$



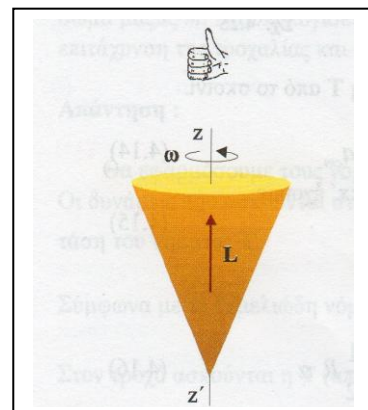
Σημείωση: Η στροφορμή ενός υλικού σημείου ορίζεται ακόμη και αν το υλικό σημείο κινείται σε ευθεία τροχιά. Στην περίπτωση αυτή το r θα είναι η απόσταση της τροχιάς από το σημείο ως προς το οποίο υπολογίζουμε τη στροφορμή



B. Στροφορμή στερεού σώματος

Έστω ένα στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα $z'z$ με γωνιακή ταχύτητα ω . Ονομάζουμε **στροφορμή L** του σώματος αυτού το διανυσματικό μέγεθος που έχει :

- α. **μέτρο** ίσο με το γινόμενο της ροπής αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής και της γωνιακής του ταχύτητας $L = I \cdot \omega$
- β. **διεύθυνση** αυτή του άξονα $z'z$
- γ. **φορά** που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού
- δ. **μονάδα** στο SI το $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$



Παρατηρήσεις

α. Απόδειξη του τύπου $L=I\omega$

Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, m_3, \dots$. Οι μάζες αυτές περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω , αλλά με διαφορετική γραμμική ταχύτητα v ανάλογη με την απόστασή τους από τον άξονα περιστροφής.

Οι στροφορμές των μαζών αυτών έχουν μέτρα $L_1 = m_1 v_1 r_1$, $L_2 = m_2 v_2 r_2$, $L_3 = m_3 v_3 r_3, \dots$ και έχουν όλες την ίδια κατεύθυνση. Έτσι, η στροφορμή του σώματος έχει μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων των στροφορμών αυτών.

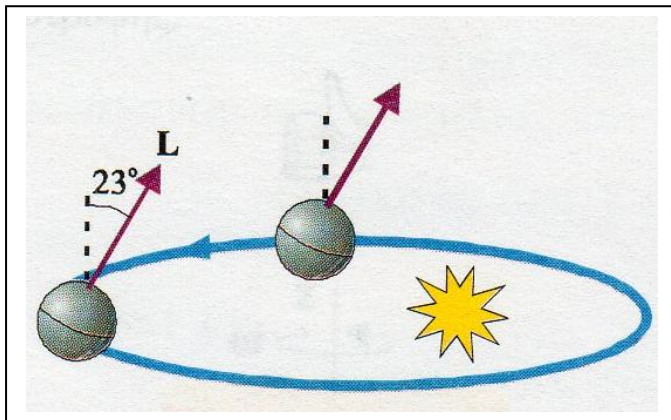
Δηλαδή :

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + \dots \Rightarrow L = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 + \dots \Rightarrow L = m_1 (\omega r_1) r_1 + m_2 (\omega r_2) r_2 + \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow L = m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2 + \dots \Rightarrow L = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots) \omega \Rightarrow L = I \omega, \quad \text{αφού} \quad \text{όπως} \\ &\text{γνωρίζουμε η ποσότητα } m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots \text{είναι η ροπή αδράνειας του σώματος.} \end{aligned}$$

β. Spin

Η στροφορμή που σχετίζεται με τη στροφική κίνηση ενός σώματος που γίνεται γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του ονομάζεται **spin** για να την ξεχωρίσουμε από τη στροφορμή που μπορεί να έχει το σώμα εξαιτίας κάποιας άλλης κίνησης.

Για παράδειγμα η Γη έχει δύο στροφορμές : μία εξαιτίας της κίνησής της γύρω από τον Ήλιο και μία εξαιτίας της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της. Αυτή τη δεύτερη στροφορμή την ονομάζουμε spin



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το spin της Γης. Ας προσέξουμε ότι σχηματίζει γωνία 23° με το επίπεδο τροχιάς της Γης.

Spin, επίσης, έχουν και τα στοιχειώδη σωματίδια (πρωτόνια, νετρόνια, ηλεκτρόνια) του ατόμου. Το spin αυτό έχει μέτρο

$$\frac{1}{2} \hbar = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}, \quad \text{όπου } h = \text{σταθερά του Planck} = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{sec}$$

γ. Γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης

Είπαμε παραπάνω ότι η στροφορμή ενός στερεού σώματος δίνεται από τη σχέση

$$L = I\omega \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = I \cdot a_{\gamma}}$$

Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ξέρουμε, επίσης, ότι :

$$\boxed{\Sigma \tau = I a_{\gamma}}$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι :

$$\boxed{\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}}$$

Η σχέση αυτή είναι η γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης και μας λέει ότι : **Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται σε ένα στερεό σώμα που στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του.**

Παρατηρήσεις

α. Η σχέση $\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$ είναι για τη στροφική κίνηση το ανάλογο της σχέσης

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} \text{ της μεταφορικής κίνησης}$$

β. Η σχέση $\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$ ισχύει και σε σύστημα σωμάτων στο οποίο, ως γνωστόν, οι δυνάμεις που ασκούνται διακρίνονται σε εξωτερικές και εσωτερικές. Επειδή, όμως, οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται πάντοτε ως ζεύγη δράσης-αντίδρασης, η συνολική ροπή τους είναι μηδέν. Έτσι, ενδιαφερόμαστε μόνο για τις εξωτερικές δυνάμεις και η παραπάνω σχέση γράφεται : $\Sigma \tau_{\text{εξ}} = \frac{dL}{dt}$

8. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Ξέρουμε ότι στη μεταφορική κίνηση ισχύει ο νόμος διατήρησης της ορμής, ο οποίος εφαρμόζεται όταν η συνισταμένη δύναμη σε ένα σώμα ή σύστημα σωμάτων είναι μηδέν.

Ένας αντίστοιχος νόμος ισχύει και στη στροφική κίνηση και το μέγεθος που διατηρείται είναι η στροφορμή.

Είδαμε παραπάνω ότι $\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$. Αν, λοιπόν, $\Sigma \tau = 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = \text{σταθερή}.$$

Δηλαδή, αν η συνολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα (ή σύστημα σωμάτων) είναι μηδέν, τότε η στροφορμή του σώματος (ή του συστήματος σωμάτων) παραμένει σταθερή.

A. Όταν η ροπή αδράνειας του σώματος παραμένει σταθερή

$$\text{Αν } L = \text{σταθερή} \Rightarrow I\omega = \text{σταθερή} \Rightarrow \omega = \text{σταθερή}$$

Δηλαδή, αν η συνολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα του οποίου η ροπή αδράνειας μένει σταθερή είναι μηδέν, τότε το σώμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Για παράδειγμα, κατά την περιστροφή της Γης γύρω από τον εαυτό της, η ελκτική δύναμη που δέχεται η Γη από τον Ήλιο δεν προκαλεί ροπή καθώς ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας της.

Έτσι, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης γύρω από τον εαυτό της παραμένει σταθερή και, γιαυτό, η διάρκεια της ημέρας και της νύχτας διατηρείται σταθερή (24 ώρες)

B) Όταν η ροπή αδράνειας του σώματος μεταβάλλεται

Αν, λόγω ανακατανομής της μάζας του σώματος (εξαιτίας εσωτερικών δυνάμεων), μεταβληθεί η ροπή αδράνειας ενός σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, τότε έχουμε

$$L = \text{σταθερή} \Rightarrow I\omega = \text{σταθερή} \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Δηλαδή αν η συνολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα είναι μηδέν και, εξαιτίας κάποιων εσωτερικών δυνάμεων, μεταβληθεί η ροπή αδράνειάς του, τότε θα μεταβληθεί αντιστρόφως ανάλογα και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του έτσι ώστε το γινόμενο $I\omega$ να παραμείνει σταθερό.

Παραδείγματα :

i) Όταν μία αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ στριφογυρίζει στο παγοδρόμιο, η ροπή των δυνάμεων που ασκούνται πάνω της (βάρος και αντίδραση του εδάφους) είναι μηδέν και, έτσι, η στροφορμή της παραμένει σταθερή.

Αν, λοιπόν, συμπύξει τα χέρια και τα πόδια της μειώνοντας, καταυτόν τον τρόπο, τη ροπή αδράνειάς της, τότε η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της αυξάνεται

ii) Όταν ένας καταδύτης πηδάει από το βατήρα, για να μπορέσει να κάνει πολλές περιστροφές στον αέρα πριν πέσει στο νερό, μαζεύει τα χέρια και τα πόδια του κοντά στο σώμα του.

Μ'αυτό τον τρόπο ελαττώνει τη ροπή αδράνειάς του και, καθώς η στροφορμή του πρέπει να παραμείνει σταθερή (αφού η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του είναι το βάρος του που δεν προκαλεί ροπή) αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του

iii) Τα αστέρια που στο τελευταίο μέρος της ζωής του έχουν μάζα από 1,4 έως 2,5 φορές τη μάζα του Ήλιου μετατρέπονται σε αστέρες νετρονίων ή pulsars. Πιο συγκεκριμένα, όταν εξαντλήσουν τις πηγές ενέργειας που διαθέτουν καταρρέουν λόγω της ίδιας τους της βαρύτητας και συρρικνώνονται σε μία σφαίρα ακτίνας 15–20 km με τους πυρήνες των ατόμων τους σχεδόν να εφάπτονται.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ελαττωθεί τρομακτικά η ροπή αδράνειάς τους και, κατά συνέπεια, να έχουμε μία αντίστοιχη αύξηση στη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής τους (αφού η συρρίκνωση έγινε λόγω εσωτερικών δυνάμεων πρέπει η στροφορμή τους να παραμείνει σταθερή).

Έτσι, ένα αστέρι νετρονίων φτάνει να περιστρέφεται με 3000 στροφές ανά sec, όταν, για σύγκριση, ο Ήλιος χρειάζεται 25 ημέρες για μία περιστροφή.