

Τα απαραίτητα εργαλεία της Μαθηματικής Λογικής

Στο παρόν σημείωμα θα προσπαθήσουμε να δώσουμε όλα τα απαραίτητα εργαλεία που αφορούν τις μαθηματικές προτάσεις και τις λογικές σχέσεις τους. Μια πρόταση P λέγεται μαθηματική πρόταση αν μπορεί να χαρακτηριστεί ως **Αληθής** ή **Ψευδής**. Μια μαθηματική πρόταση αν και μπορεί να φαίνεται αληθής καταρρίπτεται αν βρεθεί ένα παράδειγμα που την κοντράρει. (αντιπαράδειγμα)

1. Συνεπαγωγή $P \Rightarrow Q$

Αν σε ένα ισχυρισμό διατυπώσουμε ‘Αν ισχύει ο P τότε ισχύει και ο Q ’ τότε λέμε ότι η πρόταση P συνεπάγεται την Q . Η P λέγεται υπόθεση της συνεπαγωγής και η Q συμπέρασμα. Η συνεπαγωγή χρησιμοποιείται κυρίως στην ευθεία απόδειξη.

Προσοχή!!

Αν ισχύει $P \Rightarrow Q$ δε σημαίνει ότι εξασφαλίζουμε και το αντίστροφο $Q \Rightarrow P$. Παραδειγμα: $P_1: x < y$ και $Q_1: x \neq y$. Προφανώς $P_1 \Rightarrow Q_1$ ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει (π.χ. $x = 5, y = -3$). Άλλο παράδειγμα: $a = \beta \Rightarrow a^2 = \beta^2$. Για $a = 3, \beta = -3$ φαίνεται ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Η συνεπαγωγή χρησιμοποιείται ιδιαίτερα τόσο στην άλγεβρα όσο και στην γεωμετρία.

2. Ισοδυναμία $P \Leftrightarrow Q$

Η ισοδυναμία είναι μια λογική πρόταση που ισχύει όταν εξασφαλίζεται και το αντίστροφο του ισχυρισμού $P \Rightarrow Q$. Τότε γράφουμε $P \Leftrightarrow Q$. Η ισοδυναμία διατυπώνεται με τις εκφράσεις ‘αν και μόνο αν’, ‘τότε και μόνο τότε’, ‘ικανή και αναγκαία συνθήκη’.

Στο Γυμνάσιο ασχοληθήκαμε με την επίλυση εξισώσεων, ανισώσεων και συστημάτων. Σε κάθε βήμα της λύσης κατασκευάζαμε ισοδύναμες εξισώσεις, ανισώσεις ή συστήματα. Κλασική ισοδυναμία που χρησιμοποιούσαμε για να αλλάζει μέλος κάποιος όρος ήταν η

$$a + \gamma = \beta + \gamma \Leftrightarrow a = \beta.$$

Σε κάθε ισοδύναμο βήμα οι αλγεβρικές εκφράσεις που βρίσκαμε επρέπε να έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.

Στο Λύκειο επίσης θα συναντήσουμε προτάσεις οι οποίες καταλήγουν με την έκφραση ‘και αντιστρόφως’ δηλώνοντας ισοδυναμία. Θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί να αποδεικνύουμε και τις δυο συνεπαγωγές: $P \Rightarrow Q$ και $Q \Rightarrow P$.

3. Ο σύνδεσμός ή: $P \vee Q$

Όταν στο Γυμνάσιο λύναμε εξισώσεις με παραγοντοποίηση καταλήγαμε

σε μια έκφραση της μορφής

$$a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \dots \cdot a_n(x) = 0$$

όπου ο κάθε παράγοντας ήταν πρώτου ή δευτέρου βαθμού. Στη συνέχεια μηδενίζαμε τον κάθε παράγοντα και μαζεύαμε τις λύσεις που βρίσκαμε. Όλες οι λύσεις μαζί ήταν λύσεις της αρχικής εξίσωσης. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι τουλάχιστον ένας παράγοντας του γινομένου θα έπρεπε να ήταν μηδέν γράφαμε

$$a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \dots \cdot a_n(x) = 0 \Leftrightarrow a_1(x) = 0 \text{ ή } a_2(x) = 0 \text{ ή } \dots \text{ ή } a_n(x) = 0.$$

Γενικότερα για να ισχύει η πρόταση $[P \text{ ή } Q]$ θα πρέπει να ισχύει τουλάχιστον μια από τις P, Q .

4. Ο σύνδεσμος και: P και Q

Όταν στο Γυμνάσιο γράφαμε κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις έπρεπε οι παρονομαστές να ήταν διάφοροι του μηδενός. Αυτό το εξασφαλίσαμε επιλέγοντας τους κατάλληλους περιορισμούς μετά από την παραγοντοποίηση των παρονομαστών. Χρησιμοποιούσαμε την ισοδυναμία

$$a \cdot b \neq 0 \Leftrightarrow [a \neq 0 \text{ και } b \neq 0]$$

και απορρίπταμε τις ρίζες του κάθε παράγοντα. Γενικότερα για να ισχύει η πρόταση $[P \text{ και } Q]$ θα πρέπει να ισχύουν και οι δυο προτάσεις P, Q . Σημαντική εφαρμογή του και είναι η εύρεση κοινών λύσεων, (συναλήθευση) εξισώσεων και ανισώσεων.

5. Σύνολα και λογικές σχέσεις

Μπορούμε να συσχετίσουμε τις λογικές πράξεις με τα σύνολα παρατηρώντας τα παρακάτω ($\Omega = \mathbb{R}$ είναι το σύνολο αναφοράς)

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow [x \in A \Rightarrow x \in B] \\ A = B &\Leftrightarrow [A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A] \end{aligned}$$

ενώ οι πράξεις (ένωση, τομή, συμπληρωματικό) ορίζονται με βάση τις ακόλουθες λογικές σχέσεις

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in \Omega | x \in A \text{ ή } x \in B\} \\ x \in A \cup B &\Leftrightarrow [x \in A \text{ ή } x \in B] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in \Omega | x \in A \text{ και } x \in B\} \\ x \in A \cap B &\Leftrightarrow [x \in A \text{ και } x \in B] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A' &= \{x \in \Omega | x \notin A\} \\ x \in A' &\Leftrightarrow x \notin A \end{aligned}$$

6. Πίνακες Αλήθειας λογικών σχέσεων

Θα αναφέρουμε τους πίνακες των βασικών λογικών πράξεων. Σημειώνουμε ότι η ισοδυναμία μεταξύ λογικών πράξεων σημαίνει ότι οι λογικές πράξεις αυτές έχουν τους ίδιους πίνακες αλήθειας.

A) Άρνηση $\bar{P}$

P	$\bar{P}$
A	Ψ
Ψ	A

B) Σύνδεσμοι διάζευξη (ή) $[P \vee Q]$ και σύζευξη (και) $[P \wedge Q]$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$
A	A	A	A
A	Ψ	A	Ψ
Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Γ) συνεπαγωγή $[P \Rightarrow Q]$ και ισοδυναμία $[P \Leftrightarrow Q]$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$[P \Rightarrow Q] \wedge [Q \Rightarrow P]$
A	A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	A	Ψ
Ψ	A	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	A	A

Η τελευταία στήλη αναφέρεται στην ισοδυναμία μια και

$$[P \Leftrightarrow Q] \Leftrightarrow [P \Rightarrow Q] \wedge [Q \Rightarrow P]$$

Δ) Άτοπο και αντιθετοαντιστροφή

Οι αποδεικτικές μέθοδοι Απαγωγή σε Άτοπο και Αντιθετοαντιστροφή βασίζονται στις ακόλουθες ισοδυναμίες

$$\text{Άτοπο} \quad [P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow \overline{[P \wedge \bar{Q}]}$$

$$\text{Αντιθετοαντιστροφή} \quad [P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}].$$

Οι παραπάνω ισοδυναμίες ισχύουν λόγω του ακόλουθου πίνακα αλήθειας

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$P \wedge \bar{Q}$	$\overline{[P \wedge \bar{Q}]}$	$P \Rightarrow Q$	$[\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}]$
A	A	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A
A	Ψ	Ψ	A	A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	Ψ	Ψ	A	A	A
Ψ	Ψ	A	A	Ψ	A	A	A