

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1) ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Α. Για να προσδιορίσουμε ένα σημείο στο επίπεδο σχεδιάζουμε δυο κάθετους άξονες $x'Ox$, $y'Oy$ με κοινή αρχή το O . Αυτοί οι κάθετοι άξονες ορίζουν ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Ο άξονας $x'Ox$ ονομάζεται άξονας των τετμημένων, ενώ ο άξονας $y'Oy$ ονομάζεται άξονας των τεταγμένων. Το σημείο O ονομάζεται αρχή των αξόνων. Όταν η μονάδα μέτρησης είναι ίδια και για τους δυο άξονες το σύστημα λέγεται ορθοκανονικό.

Β. Έστω ένα σημείο του επιπέδου A και ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy . Από το A φέρουμε κάθετες προς τους άξονες $x'Ox$, $y'Oy$ που τέμνουν τον οριζόντιο άξονα στο x και τον κατακόρυφο στο y . Το x ονομάζεται τετμημένη του A και το y τεταγμένη του A . Έτσι σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχίζουμε ένα ζευγάρι αριθμών (x,y) . Αντίστροφα όταν μας δίνονται ένας αριθμός x πάνω στον οριζόντιο άξονα και ένας αριθμός y πάνω στον κατακόρυφο άξονα φέρνοντας κάθετες προσδιορίζουμε ένα σημείο του επιπέδου.

Γ. Η τετμημένη και η τεταγμένη ονομάζονται συντεταγμένες. Το ζευγάρι των συντεταγμένων ονομάζεται διατεταγμένο ζεύγος, δηλαδή έχει σημασία η σειρά με την οποία το γράφουμε. Αν αλλάξουμε τη σειρά των συντεταγμένων προκύπτει άλλο σημείο.

Δ. Με ένα σύστημα συντεταγμένων αντιστοιχούμε σε κάθε σημείο A ένα ζευγάρι αριθμών (x,y) και αντίστροφα σε κάθε ζευγάρι (x,y) αντιστοιχεί ένα σημείο A .

Ε. Ισχύουν οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

- Όταν ένα σημείο βρίσκεται στον άξονα των τετμημένων έχει τεταγμένη 0.
 $A(x,y) \in x'x \Leftrightarrow y = 0$
- Όταν ένα σημείο βρίσκεται στον άξονα των τεταγμένων έχει τετμημένη 0.
 $A(x,y) \in y'y \Leftrightarrow x = 0$
- Η αρχή των αξόνων έχει συντεταγμένες $O(0,0)$.
- Αν το σημείο A έχει συντεταγμένες $A(x,y)$ τότε $|x| = d(A, y'y)$ και $|y| = d(A, x'x)$

ΣΤ. Ένα σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα μέρη τα οποία ονομάζονται τεταρτημόρια

- $A(x,y)$ είναι σημείο του 1^{ου} τεταρτημορίου αν και μόνο αν $x > 0$ και $y > 0$
- $A(x,y)$ είναι σημείο του 2^{ου} τεταρτημορίου αν και μόνο αν $x < 0$ και $y > 0$
- $A(x,y)$ είναι σημείο του 3^{ου} τεταρτημορίου αν και μόνο αν $x < 0$ και $y < 0$
- $A(x,y)$ είναι σημείο του 4^{ου} τεταρτημορίου αν και μόνο αν $x > 0$ και $y < 0$.

Ζ. Μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση δυο σημείων $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ με γνωστές συντεταγμένες:

Αν τα σημεία βρίσκονται πάνω στον άξονα $x'x$ τότε: $(AB) = |x_B - x_A|$

Αν τα σημεία βρίσκονται πάνω στον άξονα $y'y$ τότε: $(AB) = |y_B - y_A|$

Στη γενική περίπτωση με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος προκύπτει η σχέση: $(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Η. Όταν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου $A(x,y)$ μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες των συμμετρικών σημείων:

Ως προς τον άξονα $x'x$: $A'(x,-y)$

Ως προς τον άξονα $y'y$: $A''(-x,y)$

Ως προς την αρχή των αξόνων: $A'''(-x,-y)$

Ως προς την ευθεία $y=x$: $B(y,x)$

2) ΑΝΑΛΟΓΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Α. Λόγος δυο αριθμών α, β ονομάζεται το πηλίκό τους $\kappa = \frac{\alpha}{\beta}$. Αναλογία ονομάζεται

η ισότητα δυο λόγων. Για κάθε αναλογία ισχύει η σχέση $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$. Σε

κάθε αναλογία τα χιαστί γινόμενα είναι ίσα.

Β. Όταν ο λόγος χρησιμοποιείται για τη σύγκριση δυο ομοειδών μεγεθών θα πρέπει τα μεγέθη αυτά να εκφράζονται στις ίδιες μονάδες μέτρησης.

Γ. Τα ποσά x, y είναι ανάλογα αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\frac{y}{x} = \alpha \Leftrightarrow y = \alpha x \Leftrightarrow x = \frac{y}{\alpha}, \text{ όπου ο σταθερός αριθμός } \alpha \text{ ονομάζεται συντελεστής}$$

αναλογίας. Στα ανάλογα ποσά οι αντίστοιχες τιμές δίνουν τον ίδιο λόγο. Στα ανάλογα ποσά οι τιμές του ενός ποσού προκύπτουν από τις τιμές του άλλου ποσού με πολλαπλασιασμό ενός σταθερού αριθμού, του συντελεστή αναλογίας.

Δ. Κάθε ζευγάρι (x,y) δυο ανάλογων ποσών αναπαρίσταται από ένα σημείο του επιπέδου το οποίο ανήκει σε μια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων. Η ευθεία περνά από την αρχή των αξόνων γιατί το σημείο $O(0,0)$ έχει συντεταγμένες που επαληθεύουν τη σχέση αναλογίας $y=\alpha x$.

Ε. Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$x \cdot y = \alpha \Leftrightarrow y = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{y}, \quad x \neq 0, y \neq 0. \text{ Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά οι}$$

αντίστοιχες τιμές δίνουν το ίδιο γινόμενο. Δυο αντιστρόφως ανάλογα ποσά x και y δεν μπορούν να παίρνουν τιμές ίσες με μηδέν.

ΣΤ. Κάθε ζευγάρι (x,y) δυο αντιστρόφως ανάλογων ποσών βρίσκονται σε μια καμπύλη γραμμή η οποία ονομάζεται υπερβολή. Η υπερβολή δεν τέμνει τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων, γιατί τα ποσά x, y δε μπορούν να πάρουν την τιμή μηδέν.

Ζ. Έχει σημασία σε ένα πρόβλημα να αναγνωρίζουμε αν τα ποσά που περιγράφονται είναι ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα. Ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι τα ακόλουθα:

- Όταν ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα τότε η απόσταση που διανύει είναι ανάλογη του χρόνου, $S=vt$.
- Όταν διανύουμε μια συγκεκριμένη απόσταση η ταχύτητα και ο χρόνος κίνησης είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά, $v = \frac{S}{t}$.
- Όταν ένα σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση τότε η ταχύτητα του είναι ανάλογη του χρόνου κίνησης, $v=at$.
- Σε ένα ορθογώνιο οικόπεδο δεδομένου εμβαδού το μήκος είναι αντιστρόφως ανάλογο του πλάτους.
- Όταν το ποσό y είναι ποσοστό του ποσού x τότε είναι ανάλογα.
- Ο αριθμός των εργατών και ο αριθμός των ημερών που απαιτούνται για την ολοκλήρωση ενός έργου είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά, όταν οι εργάτες έχουν την ίδια απόδοση.
- Σε μια ποσότητα ύλης δεδομένης πυκνότητας ρ , η μάζα της ποσότητας είναι ανάλογη του όγκου: $\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho V$.
- Όταν μια δεδομένη ποσότητα εμπορεύματος τοποθετείται σε συσκευασίες, ο αριθμός των συσκευασιών είναι αντιστρόφως ανάλογος της ποσότητας εμπορεύματος που περιέχει η κάθε συσκευασία.

3) Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η συνάρτηση αποτελεί θεμελιώδη έννοια των Μαθηματικών και χρησιμοποιείται σε όλες τις θετικές επιστήμες. Σε πολλά καθημερινά φαινόμενα εμφανίζονται δυο μεγέθη, τα οποία μεταβάλλονται έτσι, ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει την τιμή του άλλου.

Α. Μεταβλητή είναι ένα αντικείμενο που χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου και συμβολίζεται με ένα γράμμα. Οι μεταβλητές χρησιμοποιούνται επίσης για να συμβολίσουν μεγέθη των οποίων οι τιμές τους αλλάζουν.

Β. Συνάρτηση είναι μια διαδικασία που συσχετίζει μεταβλητές. Σε κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζει μια και μόνο τιμή της μεταβλητής y . Στη συνάρτηση δίνουμε ένα όνομα με ένα μικρό γράμμα του αλφαβήτου, π.χ. f . Η σχέση των x, y περιγράφεται από την ισότητα $y=f(x)$. Όταν η συνάρτηση προσδιορίζεται με ένα συγκεκριμένο τύπο, τότε η προηγούμενη ισότητα δίνει το y μέσω μιας αλγεβρικής σχέσης του x . Η μεταβλητή x ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή και η μεταβλητή y ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή. Η y λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή γιατί εξαρτάται από το x . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το y είναι συνάρτηση του x . Διαβάζουμε “ y ίσον f του x ”.

Γ. Αν x, y είναι οι μεταβλητές μιας συνάρτησης $y=f(x)$ τότε τα ζεύγη (x, y) παρουσιάζονται από ένα πίνακα τιμών, τον πίνακα τιμών της συνάρτησης. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) που επαληθεύουν τον τύπο $y=f(x)$ ονομάζεται γραφική παράσταση της συνάρτησης.

4) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η διαδικασία με την οποία κάθε τιμή ενός μεγέθους αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή ενός άλλου μεγέθους, πολλές φορές περιγράφεται από ένα μαθηματικό τύπο. Έτσι ορίζεται η συνάρτηση μέσω ενός αλγεβρικού τύπου.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η διαδικασία αντιστοίχισης ανάμεσα στις τιμές δυο μεγεθών δεν περιγράφεται ή δεν γνωρίζουμε αν περιγράφεται από κάποιο τύπο. Είναι απαραίτητο να δώσουμε έναν ορισμό της συνάρτησης που να την περιγράφει στη γενική περίπτωση.

A. ΟΡΙΣΜΟΣ: Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία-κανόνας με την οποία κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του B. Το σύνολο A λέγεται πεδίο ορισμού και το σύνολο B ονομάζεται πεδίο τιμών.

B. Οι συναρτήσεις περιγράφονται από ένα μικρό γράμμα. Η συνάρτηση f από το A στο B συμβολίζεται $f : A \rightarrow B$. Όταν το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε $y=f(x)$. Το x που παριστάνει τα στοιχεία του πεδίου ορισμού ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή. Το $f(x)$ λέγεται τιμή της f στο x. Το y που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x, ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή. Το σύνολο $f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in B : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$ ονομάζεται σύνολο τιμών της συνάρτησης. Προφανώς $f(A) \subseteq B$ ενώ γενικά $f(A) \neq B$.

Γ. Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$.

Η f ονομάζεται πραγματική συνάρτηση αν και μόνο αν $B \subseteq R$.

Η f ονομάζεται πραγματικής μεταβλητής αν και μόνο $A \subseteq R$.

Η f ονομάζεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής αν και μόνο αν $A \subseteq R$ και $B \subseteq R$.

Δ. Όταν δίνεται μια συνάρτηση πρέπει να γνωρίζουμε το πεδίο ορισμού της. Όταν δίνεται η συνάρτηση μέσω ενός τύπου $y=f(x)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού της θέτοντας τους κατάλληλους περιορισμούς ώστε να λειτουργεί σωστά ο τύπος. Το πεδίο ορισμού ορισμού μιας συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής, είναι το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R ώστε να λειτουργεί σωστά ο τύπος της.

E. Για να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης θεωρούμε την

εξίσωση $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in A \end{cases}$ ως προς x. Για να έχει λύση ως προς x προκύπτουν

κατάλληλου περιορισμοί οι οποίοι δίνουν το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

ΣΤ. Όταν μας δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης $y=f(x)$ η ανεξάρτητη μεταβλητή x συμβολίζεται με κάποιο γράμμα. Ουσιαστικά η ανεξάρτητη μεταβλητή x είναι μια άδεια θέση στην οποία τοποθετούμε κάποια αριθμητική τιμή ή αλγεβρική παράσταση. Η συνάρτηση είναι ένας μηχανισμός που λειτουργεί με τον κανόνα που περιγράφει ο τύπος της. Με την εισαγωγή μιας τιμής ή παράστασης στην ανεξάρτητη μεταβλητή λειτουργεί η συνάρτηση και επιστρέφει μια τιμή ή αλγεβρική έκφραση για την ανεξάρτητη μεταβλητή.

5) ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου (x,y) (ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων) που επαληθεύουν τον τύπο της.

A. Έστω μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $f : A \rightarrow B$.

Γραφική παράσταση της f είναι το σύνολο

$C_f = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in A\}$. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$M(x_M, y_M) \in C_f \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = f(x_M) \\ x_M \in A \end{cases}$$

Η προβολή της γραφικής παράστασης της f στον οριζόντιο άξονα $x'x$ δίνει το πεδίο ορισμού της f . Η προβολή της γραφικής παράστασης της f στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ δίνει το σύνολο τιμών της f .

B. Όταν μας δίνεται μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $f : A \rightarrow B$ μπορούμε να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων.

- Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης με τον άξονα $x'x$ λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} y = f(x), y = 0 \\ x \in A \end{cases}$. Έτσι βρίσκουμε τα σημεία

$M_\kappa(\rho_\kappa, 0)$ όπου ρ_κ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ στο A .

- Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης με τον άξονα $y'y$ βρίσκουμε το σημείο $\Lambda(0, f(0))$ αρκεί το 0 να είναι στοιχείο του πεδίου ορισμού A .

Γ. Όταν δίνεται ο τύπος μιας πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής f μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σχετική θέση της γραφικής παράστασης με τον άξονα $x'x$:

- C_f πάνω από τον άξονα $x'x \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ x \in A \end{cases}$
- C_f κάτω από τον άξονα $x'x \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ x \in A \end{cases}$
- C_f όχι πάνω από τον άξονα $x'x \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ x \in A \end{cases}$
- C_f όχι κάτω από τον άξονα $x'x \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ x \in A \end{cases}$

Δ. Μπορούμε να βρούμε τα κοινά σημεία και τις σχετικές θέσεις δυο γραφικών παραστάσεων δυο πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής f, g με πεδία ορισμού A_1, A_2 .

- Για να βρούμε τα κοινά σημεία των δυο γραφικών παραστάσεων θεωρούμε το σύστημα
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$
 οπότε οδηγούμαστε στην εξίσωση $f(x)=g(x)$ στο $A_1 \cap A_2$.
- Η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g αν και μόνο αν
$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ x \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$
.
- Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g αν και μόνο αν
$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ x \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$
.
- Η γραφική παράσταση της f δεν είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g αν και μόνο αν
$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ x \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$
.
- Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g αν και μόνο αν
$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ x \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$
.

6) ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Έστω πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $f : A \rightarrow B$

A. Η f ονομάζεται Άρτια συνάρτηση αν και μόνο αν η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ αν και μόνο αν για κάθε

$$x \in A \text{ ισχύουν } \begin{cases} -x \in A \text{ και} \\ f(-x) = f(x) \end{cases}.$$

B. Η f ονομάζεται Περιττή συνάρτηση αν και μόνο αν η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ αν και μόνο

$$\text{αν για κάθε } x \in A \text{ ισχύουν } \begin{cases} -x \in A \text{ και} \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}.$$

7) ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $f : A \rightarrow B$ και $\Delta \subseteq A$.

A. Η f ονομάζεται γνησίως αύξουσα στο Δ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. Όταν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε η γραφική της παράσταση ανεβαίνει καθώς το x αυξάνει στο Δ . Όταν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της A , λέγεται γνησίως αύξουσα.

B. Η f ονομάζεται γνησίως αύξουσα στο Δ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. Όταν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ τότε η γραφική της παράσταση κατεβαίνει στο Δ καθώς το x αυξάνει στο Δ . Όταν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της A , λέγεται γνησίως φθίνουσα.

Γ. Η f νομάζεται σταθερή στο Δ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Όταν η f είναι σταθερή στο Δ η γραφική της παράσταση είναι ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στο διάστημα Δ . Όταν η συνάρτηση είναι σταθερή στο πεδίο ορισμού της A , λέγεται σταθερή.

Δ. Άμεσα προκύπτουν οι επόμενες δυο προτάσεις:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ αν και μόνο αν για κάθε

$$x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 \neq x_2 \text{ ισχύει } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ αν και μόνο αν για κάθε

$$x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 \neq x_2 \text{ ισχύει } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

Ε. Όταν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της λέγεται γνησίως μονότονη συνάρτηση.

8) ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Όταν γνωρίζουμε τη μονοτονία μιας πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής μπορούμε να λύνουμε εξισώσεις και ανισώσεις. Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : A \rightarrow B$. Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύονται τα επόμενα:

Α. Στο πεδίο ορισμού A ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Β. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, στο πεδίο ορισμού A ισχύει η ισοδυναμία: $f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$.

Γ. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, στο πεδίο ορισμού A ισχύει η ισοδυναμία: $f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$.

Δ. Αν η f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο A .

9) ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $f : A \rightarrow B$ και $x_0 \in A$.

Α. Η f έχει ελάχιστο στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν $f(x) \geq f(x_0)$. Η τιμή $f(x_0)$ ονομάζεται μέγιστη τιμή της f στο x_0 .

Β. Η f έχει μέγιστο στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν $f(x) \leq f(x_0)$. Η τιμή $f(x_0)$ ονομάζεται ελάχιστη τιμή της f στο x_0 .

Γ. Περιοχή ενός $x_0 \in A$ ονομάζεται κάθε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Αν το A είναι διάστημα τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq A$.

Δ. Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν $f(x) \geq f(x_0)$ για όλα τα $x \in A$ σε μια περιοχή του x_0 ("κοντά στο x_0 ").

Ε. Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν $f(x) \leq f(x_0)$ για όλα τα $x \in A$ σε μια περιοχή του x_0 ("κοντά στο x_0 ").

10) ΜΕΤΑΤΟΠΗΣΕΙΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Εύκολα μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ιδιότητες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης αν έχει προκύψει από μετατόπιση άλλης γνωστής γραφικής παράστασης. Θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις η μετατόπιση να είναι παράλληλη είτε στον άξονα $x'x$ είτε στον άξονα $y'y$. Έστω η πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $f : A \rightarrow B$ και σταθερά $c > 0$.

A. Η γραφική παράσταση της $y=f(x)+c$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $y=f(x)$ με κατακόρυφη μετατόπιση c μονάδες προς τα πάνω.

B. Η γραφική παράσταση της $y=f(x)-c$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $y=f(x)$ με κατακόρυφη μετατόπιση c μονάδες προς τα κάτω.

Γ. Έστω $x-c \in A$ για όλα τα $x \in A$. Η γραφική παράσταση της $y=f(x-c)$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $y=f(x)$ με οριζόντια μετατόπιση c μονάδες προς τα δεξιά.

Δ. Έστω $x+c \in A$ για όλα τα $x \in A$. Η γραφική παράσταση της $y=f(x+c)$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $y=f(x)$ με οριζόντια μετατόπιση c μονάδες προς τα αριστερά.

11) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y=ax$

A. Έστω η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ με $f(x)=ax$. Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$ οπότε η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Έστω επιπλέον ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f ,

$M(x_M, y_M) \neq O(0,0)$. Τότε $\alpha = \frac{y_M}{x_M} = \varepsilon\phi\omega$, όπου $\angle xOM = \hat{\omega}$. Επειδή η εφω

κάθε φορά που αλλάζει το σημείο είναι ίδια, οποιοδήποτε άλλο σημείο της C_f διαλέξουμε θα βρίσκεται στην ημιευθεία OM ή στην αντικείμενη της ημιευθεία. Έτσι όλα τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση $y=ax$ θα βρίσκονται πάνω στην ευθεία OM .

B. Ο συντελεστής a ονομάζεται κλίση της ευθείας $y=ax$. Υπάρχει μοναδική γωνία $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$ ώστε $a=\varepsilon\phi\omega$ και είναι η γωνία που σχηματίζεται αν περιστρέψουμε τον άξονα $x'x$ αντίθετα από τη φορά του ρολογιού μέχρι να συναντήσει την ευθεία $y=ax$.

Γ.

- Αν $a > 0$ η γωνία ω είναι οξεία και η ευθεία βρίσκεται στο 1° και στο 3° τεταρτημόριο. Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.
- Αν $a < 0$ η γωνία ω είναι αμβλεία και η ευθεία βρίσκεται στο 2° και στο 4° τεταρτημόριο. Τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.
- Αν $a=0$ η γωνία $\omega = 0^\circ$ και η ευθεία $y=0$ ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'x$. Τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Δ. Η συνάρτηση $y=ax$ περιγράφει ανάλογα ποσά αφού $\alpha = \frac{y}{x} = \text{σταθερό}$.

12) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = ax + \beta$

A. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : R \rightarrow R$ με $f(x)=ax+\beta$ προκύπτει από την $y=ax$ με κατακόρυφη μετατόπιση β μονάδων προς τα πάνω αν $\beta>0$ ή με κατακόρυφη μετατόπιση β μονάδων προς τα κάτω αν $\beta<0$. Συνεπώς η συνάρτηση με τύπο $y=ax+\beta$ περιγράφει ευθεία παράλληλη στην $y=ax$ η οποία διέρχεται από το σημείο $B(0,\beta)$.

B. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $y=ax+\beta$ με τον οριζόντιο άξονα $x'x$ τότε, λόγω παραλληλίας με την $y=ax$, προκύπτει $\alpha=\epsilon\phi\omega$. Το α εκφράζει την κλίση της ευθείας $y=ax+\beta$.

Γ. Το πρόσημο του α σχετίζεται με το είδος της γωνίας ω και τη μονοτονία της συνάρτησης f .

- Αν $\alpha>0$ τότε η γωνία ω είναι οξεία και η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.
- Αν $\alpha<0$ τότε η γωνία ω είναι αμβλεία και η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.
- Αν $\alpha=0$ τότε η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, $\omega=0$ και η f είναι η σταθερή συνάρτηση $y=\beta$.

Δ. Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \alpha_1 x + \beta_1$, $\varepsilon_2 : y = \alpha_2 x + \beta_2$. Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σχετική τους θέση.

- Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$ οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο το οποίο το προσδιορίζουμε από τη λύση του συστήματος των δυο εξισώσεων.
- Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$ τότε οι ευθείες είναι παράλληλες
- Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$ τότε οι ευθείες ταυτίζονται.

13) Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ $Ax+By+\Gamma=0$

Η εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει ευθεία εκτός από την ειδική περίπτωση $A=B=0$.

- Αν $B \neq 0$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y=ax+\beta$ όπου $\alpha=-A/B$, $\beta=-\Gamma/B$ και παριστάνει ευθεία με κλίση $\lambda=-A/B$ η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $M(0,-\Gamma/B)$.
- Αν $B=0$, $A \neq 0$ και η εξίσωση παίρνει τη μορφή $x = x_0$. Στην αυτή παριστάνει εξίσωση παράλληλη στον άξονα $y'y$ και σχηματίζει γωνία $\omega = 90^\circ$ με τον οριζόντιο άξονα $x'x$. Ειδικότερα ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση $x=0$.

Για να σχεδιάσουμε την ευθεία αυτή βρίσκουμε δυο σημεία που επαληθεύουν την εξίσωση (π.χ. σημεία τομής με τους άξονες) και τα ενώνουμε.

14) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$.

Η συνάρτηση $f : R^* \rightarrow R$ με $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$ περιγράφει αντιστρόφως

ανάλογα ποσά αφού κάθε σημείο της γραφικής παράστασης έχει συντεταγμένες που δίνουν σταθερό γινόμενο. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αποτελείται από δυο μέρη τα οποία ονομάζονται κλάδοι υπερβολής. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει ενδιαφέρουσες συμμετρίες: είναι περιττή συνάρτηση-έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$ - ενώ έχει άξονες συμμετρίας τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων $x'x$, $y'y$,

καθώς και τις ευθείες $y=x$, $y=-x$. Επιπλέον η γραφική παράσταση της f πλησιάζει οριακά τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων, χωρίς να τους τέμνει, δηλαδή οι άξονες $x'x$, $y'y$ είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης.

- Αν $a>0$ οι δυο κλάδοι της υπερβολής βρίσκονται στο 1^ο και στο 3^ο τεταρτημόριο. Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ του πεδίου ορισμού της.
- Αν $a<0$ οι δυο κλάδοι της υπερβολής βρίσκονται στο 2^ο και στο 4^ο τεταρτημόριο. Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ του πεδίου ορισμού της.
- Η f παρόλο που διατηρεί το είδος μονοτονίας στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της δεν είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση.

15) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = ax^2$ ΚΑΙ ΟΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ ΤΗΣ

Η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ με $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$ είναι μια παραβολή η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, δηλαδή είναι άρτια συνάρτηση.

A) Η γραφική παράσταση της παραβολής δίνει τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης.

- Αν $a>0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Έχει ελάχιστο στο $x=0$ την τιμή $f(0)=0$.
- Αν $a<0$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Έχει μέγιστο στο $x=0$ την τιμή $f(0)=0$.

B) Αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της f οριζόντια ή κατακόρυφα οι ιδιότητες της μονοτονίας και των ακροτάτων της f τροποποιούνται. Έστω $c>0$.

- Αν μετατοπίσουμε την $y = ax^2$ c μονάδες προς τα πάνω τότε ο άξονας συμμετρίας παραμένει ο $y'y$, ενώ η κορυφή της παραβολής γίνεται το σημείο $K(0,c)$. Η παραβολή θα έχει εξίσωση $y = ax^2 + c$.
- Αν μετατοπίσουμε την $y = ax^2$ c μονάδες προς τα κάτω τότε ο άξονας συμμετρίας παραμένει ο $y'y$, ενώ η κορυφή της παραβολής γίνεται το σημείο $K(0,-c)$. Η παραβολή θα έχει εξίσωση $y = ax^2 - c$.
- Αν μετατοπίσουμε την $y = ax^2$ c μονάδες δεξιά τότε ο άξονας συμμετρίας γίνεται η ευθεία $x=c$, ενώ η κορυφή της παραβολής γίνεται το σημείο $K(c,0)$. Η παραβολή θα έχει εξίσωση $y = a(x-c)^2$.
- Αν μετατοπίσουμε την $y = ax^2$ c μονάδες αριστερά τότε ο άξονας συμμετρίας γίνεται η ευθεία $x=-c$, ενώ η κορυφή της παραβολής γίνεται το σημείο $K(-c,0)$. Η παραβολή θα έχει εξίσωση $y = a(x+c)^2$.

16) Η ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$

Έστω η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ με $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$. Με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων ο τύπος γράφεται

$$y = a \left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \Leftrightarrow y + \frac{\Delta}{4a} = a \left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2, \Delta = \beta^2 - 4a\gamma.$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι παραβολή αφού ο τύπος της ανάγεται στην εξίσωση $\Psi = \alpha X^2$ με $X = x + \frac{\beta}{2\alpha}$, $\Psi = y + \frac{\Delta}{4\alpha}$.

A. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από την γραφική παράσταση της $y = \alpha x^2$ με κατάλληλες μετατοπίσεις. Με οριζόντια μετατόπιση $\left| -\frac{\beta}{2\alpha} \right|$ μονάδων και κατακόρυφη μετατόπιση $\left| -\frac{\Delta}{4\alpha} \right|$ μονάδων. Η συμπεριφορά της παραβολής καθορίζεται από το πρόσημο του α . Το πλήθος των σημείων τομής της με τον άξονα $x'x$ καθορίζεται από το πρόσημο της διακρίνουσας Δ .

B. Η παραβολή $y=f(x)$ έχει κορυφή $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Γ. Η μονοτονία και τα ακρότατα της f καθορίζεται από το πρόσημο του α .

- Αν $\alpha > 0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ με τιμή ελαχίστου $f_{\min} = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.
- Αν $\alpha < 0$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Η f έχει μέγιστο στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ με τιμή μεγίστου $f_{\max} = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.