

ΡΙΖΕΣ- ΣΥΝΟΨΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α) ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ

$(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha, \alpha \geq 0$ όπου $\sqrt{\alpha}$ είναι αριθμός μη αρνητικός (θετικός ή μηδέν). Το σύμβολο της ρίζας δεν μπορεί να λειτουργήσει όταν η υπόρριζη ποσότητα είναι αρνητική.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

- I) $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$,
II) $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$, με $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$,
III) $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$, $\alpha \geq 0, \beta > 0$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $x^2 = \theta \Leftrightarrow x = \sqrt{\theta} \text{ ή } x = -\sqrt{\theta}$, (για $\theta > 0$)
- $x^2 = \theta$ αδύνατη για $\theta < 0$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

$$\alpha \geq \beta \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} \geq \sqrt{\beta}$$

ΒΑΣΙΚΗ ΕΞΑΣΚΗΣΗ ΣΤΙΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ

1) Να υπολογιστούν οι τετραγωνικές ρίζες

I) $\sqrt{400}$, II) $\sqrt{0,09}$, III) $\sqrt{160000}$, IV) $\sqrt{0,000025}$

2) Να λυθούν οι εξισώσεις I) $x^2 = 0$, II) $x^2 = -1$, III) $x^2 = 36$

3) Να λυθούν οι ανισώσεις I) $x^2 \geq 1$, II) $x^2 \leq 64$, III) $x^2 - 81 > 0$, IV) $x^2 - 100 < 0$, V)

$2x^2 - 50 \geq 0$, VI) $2x^2 - 4 \leq 0$, VII) $4x^2 - 25 \geq 0$, VIII) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} \leq 2$, IX)

$\sqrt{x^2 + 4x + 4} > 3$

4) Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή

I) $\frac{3}{\sqrt{3}}$, II) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, III) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, IV) $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$, V) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

B) ΡΙΖΑ ΤΑΞΗΣ ν , ν ΘΕΤΙΚΟΣ ΑΚΕΡΑΙΟΣ $\nu \geq 2$

ΟΡΙΣΜΟΣ

$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha, \alpha \geq 0$ όπου $\sqrt[\nu]{\alpha}$ είναι αριθμός μη αρνητικός (θετικός ή μηδέν). Το σύμβολο της ρίζας δεν μπορεί να λειτουργήσει όταν η υπόρριζη ποσότητα είναι αρνητική.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΡΗΤΟ (ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟ) ΑΡΙΘΜΟ

Έστω $\alpha > 0$. Ορίζουμε $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}, \alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha}, \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = (\sqrt[\nu]{\alpha})^\mu$, όπου μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ο ρητός εκθέτης είναι αρνητικός αντιστρέφουμε τη βάση και υψώνουμε

στην απόλυτη τιμή του εκθέτη $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{(\sqrt[\nu]{\alpha})^\mu}$

ΡΙΖΑ ν -ΤΑΞΗΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

I) $\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}, \mu\epsilon \alpha \geq 0, \beta \geq 0,$

II) $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}, \alpha \geq 0, \beta > 0$

III) $\alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta}, \mu\epsilon \alpha \geq 0, \beta \geq 0$

IV) $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}, \alpha \geq 0$

V) $\sqrt[\nu \cdot \kappa]{\alpha^{\mu \cdot \kappa}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}, \alpha \geq 0$

Οι προηγούμενες ιδιότητες είναι αποτέλεσμα των ιδιοτήτων των δυνάμεων που γενικεύονται και για δυνάμεις με εκθέτη κλασματικό αριθμό.

ΤΟ ΣΥΜΒΟΛΟ $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0, \nu = \text{περιττός} \\ \text{δεν ορίζεται}, & \text{αν } \alpha < 0, \nu = \text{περιττός} \\ |\alpha|, & \text{αν } \nu = \text{άρτιος}, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ΡΙΖΑ ΤΑΞΗΣ- ν ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

$$\alpha \geq \beta \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} \geq \sqrt[\nu]{\beta}$$

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^\nu = \alpha$, ν θετικός ακέραιος

I) Αν $\nu = \text{άρτιος}$

Αν $\alpha < 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν $\alpha = 0$ τότε $x = 0$ (1 λύση)

Αν $\alpha > 0$ τότε η εξίσωση έχει 2 λύσεις $x = \pm \sqrt[\nu]{\alpha}$

II) Αν $\nu = \text{περιττός}$

Αν $\alpha < 0$ η εξίσωση έχει 1 λύση $x = -\sqrt[\nu]{-\alpha}$

Αν $\alpha = 0$ τότε $x = 0$ (1 λύση)

Αν $\alpha > 0$ τότε η εξίσωση έχει 1 λύση $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΡΙΖΕΣ ν-ΤΑΞΗΣ

1) Να λυθούν οι εξισώσεις και οι ανισώσεις

I) $x^3 = 1$, II) $x^4 = 1$, III) $x^3 = -1$, IV) $x^4 = -1$, V) $8x^3 - 1 = 0$, VI) $81x^4 - 1 = 0$, VII) $128x^4 - 1024 = 0$, VIII) $x^6 \leq 64$, IX) $x^8 \geq 256$, X) $x^3 \geq 125$

2) Να μετατρέψετε τα ακόλουθα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, B = \frac{7}{\sqrt[7]{7^4}}, \Gamma = \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}, \Delta = \frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}, E = \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$$

3) Να απλοποιήσετε τα ριζικά

$$A = \sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{54}, B = \sqrt{5^3 \sqrt{5^4 \sqrt{25}}}$$

(Για το A μετατρέψτε τα ριζικά σε δυνάμεις και αξιοποιήστε την ιδιότητα "γινόμενο δυνάμεων με την ίδια βάση". Για το B παρατηρήστε $25 = 5^2$ και βάλτε τους

παράγοντες μέσα στο τελευταίο ριζικό με χρήση της ιδιότητας $\alpha^y \sqrt[y]{\beta} = \sqrt[y]{\alpha^y \cdot \beta}$.

Τέλος πολλαπλασιάστε τις τάξεις των ριζικών και γράψτε το τελικό ριζικό ως δύναμη με κλασματικό εκθέτη.)