

Ασκήσεις-Δευτεροβάθμια εξίσωση, μορφές τριωνύμου και εφαρμογές

1. Να λυθεί η εξίσωση

$$(-4x^2 + 12x - 9)(-3x^2 - 5x + 4)(-2x^2 + 6x - 11)(x^2 + x + \frac{1}{4}) = 0$$

2. Να λυθεί η εξίσωση

$$\left[x^2 - (3 - 2\sqrt{2})x + 2 - 3\sqrt{2} \right] \left[\sqrt{3}x^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} \right] = 0$$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις

A) $4(x + 2) = 4 - (x - 3)(x + 3)$

B) $(x + 2)^3 - x(x - 3)^2 = 15 - (3x + 1)(1 - 3x)$

4. Να λυθεί η κλασματική εξίσωση

$$\frac{5}{6} - \frac{(x+1)(x-1)}{2} = \frac{2-x}{3} - \frac{(x-4)^2}{6}$$

5. Ομοίως η εξίσωση

$$(x^4 - 5x^2 + 4)(x^4 - 8x^2 - 9)(x^4 + 7x^2 + 10)(x^4 - 8x^2 + 16)(4x^4 + 2x^2 + 1) = 0$$

6. Να εξετάσετε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $(\lambda - 3)x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda + 3 = 0$ για τις διάφορες τιμές του λ .

7. Να βρεθεί ο λ αν η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x^2 + (\lambda - 1)x + 1 = 0$ έχει μια διπλή ρίζα. Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση αυτή.

8. Να βρεθεί εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $x_1 = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ και $x_2 = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$.

9. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 3x - 5 = 0$. Να κατασκευαστεί δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες $\rho_1 = |x_1|$, $\rho_2 = |x_2|$.

10. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 6 = 0$. A) Να δείξετε ότι έχει πραγματικές ρίζες για όλες τις πραγματικές τιμές του λ . B) Να βρεθεί ο λ αν έχει δυο ρίζες αντίθετες. Γ) Να βρεθεί ο λ αν έχει δυο ρίζες αντίστροφες.

11. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

$$K_1 = \frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 7x + 6}, \quad K_2 = \frac{2x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 7x + 6}, \quad K_3 = \frac{2x^2 + x - 6}{4x^2 - 12x + 9}$$

12. Ομοίως τα κλάσματα

$$\Lambda_1 = \frac{9x^2 - 6x + 1}{3x^2 + 8x - 3}, \quad \Lambda_2 = \frac{6x^2 - 7x - 3}{3x^2 + 7x + 2}, \quad \Lambda_3 = \frac{-x^2 + 4x + 5}{-2x^2 + 2x + 4}$$

13. Ομοίως τα κλάσματα

$$M_1 = \frac{x^2 - 2ax - 3a^2}{x^2 + 3ax + 2a^2}, \quad M_2 = \frac{x^2 + 2(a-1)x - 3a(a+2)}{x^2 - (3a+2)x + 2a(a+2)}$$

$$M_3 = \frac{x^2 - (a-2\beta)x - 2a\beta}{x^2 + (3\beta-a)x - 2\beta(a-\beta)}, \quad M_4 = \frac{-x^2 + ax + \beta(\beta-a)}{x^2 + (a+\beta)x - 2a(a-\beta)}$$

14. Δίνονται τα τριώνυμα $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 + 5\lambda + 10$ και $g(x) = x^2 + 4x + 4\lambda + 16$. Το τριώνυμο $f(x)$ έχει ρίζα τον $x = 2$ και το τριώνυμο $g(x)$ αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Α) Να βρείτε τον αριθμό λ . Β) Αφού βρείτε τους περιορισμούς για να ορίζεται το κλάσμα $K = \frac{f(x)}{g(x)}$ να το απλοποιήσετε.

Ασκήσεις-Πρόσημο τριωνύμου, ανισώσεις δευτέρου βαθμού, συστήματα ανισώσεων, εφαρμογές πρόσημου τριωνύμου

1. Να λυθούν οι ανισώσεις
A) $x^2 + 2x - 3 > 0$, B) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$, Γ) $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$,
Δ) $-x^2 + 4x + 12 > 0$, Ε) $2x^2 + 5x - 3 < 0$, ΣΤ) $-3x^2 + 4x + 4 \geq 0$
2. Να λυθούν οι ανισώσεις
A) $x^2 - 10x + 25 > 0$, B) $-x^2 + 8x + 64 < 0$, Γ) $2x^2 - 4x + 2 \leq 0$,
Δ) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$, Ε) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$, ΣΤ) $4x^2 - 12x + 9 > 0$
3. Να λυθούν οι ανισώσεις
A) $x^2 - x + 2 > 0$, B) $2x^2 - 5x + 4 < 0$, Γ) $-x^2 + 2x - 3 \geq 0$, Δ) $-3x^2 + 3x - 1 \leq 0$, Ε) $-x^2 + 10x - 25 \leq 0$, ΣΤ) $3x^2 - 6x + 3 < 0$
4. Να λυθούν οι ανισώσεις
A) $-x^2 + 4x > 0$, B) $-3x^2 + 4x \leq 0$, Γ) $-x^2 + 2x - 3 \geq 0$, Δ) $x^2 \geq 25$,
Ε) $\frac{x^2}{2} \leq 18$, ΣΤ) $-9x^2 + 16x \geq 0$, Ζ) $-x > \frac{x^2}{4}$, Η) $(x+1)^2 \geq \frac{5-x}{2}$, Θ)
 $x^2 + 1 - \frac{(x+2)^2}{5} > 0$
5. Να λυθούν οι ανισώσεις A) $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$, B) $x^2 - 7|x| + 6 < 0$, Γ)
 $|x^2 + 3x - 1| < 3$, Δ) $|2x - 1| \leq |x + 3|$
6. Να δείξετε ότι για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $-2x^2 + 4xy - 3(y^2 + 1) < 0$
7. Να γίνει συναλγήθευση των ανισώσεων $x^2 - 2x - 3 < 0$ και $-x^2 + x + 2 \geq 0$
8. Να γίνει συναλγήθευση των ανισώσεων $x^2 + x - 2 \geq 0$ και $x^2 + 2x - 8 < 0$
9. Να γίνει συναλγήθευση των ανισώσεων $x^2 + 4x - 5 > 0$ και $x^2 - 4 \leq 0$
10. Να συναλγήθεύσετε τις ανισώσεις $-x^2 + 2x < -3$, $x^2 - 2x - 15 < 0$ και
 $x - 2 > 0$
11. Να λυθεί η διπλή ανίσωση $4(x+1) < x(x+7) < 2(2x+5)$
12. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$A) \frac{x-3}{x^2+4x-5} < 0, B) \frac{-x^2+3x+4}{x^2-1} \leq 0, \Gamma) \frac{(x^2-1)(-x^2+x+6)}{x^2-2x-8} \leq 0,$$

$$\Delta) \frac{2(x-3)}{7-x} \geq -1, E) \frac{4x}{3x-x^2} \geq \frac{1}{2}, \Sigma T) \frac{x+8}{2x+1} \geq x, Z) \frac{2x^2-4x+5}{x^2+2} \geq 1,$$

$$H) \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x} \leq \frac{13}{x^2+3x}, \quad \Theta) \frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{3x+1} \leq 2$$

13. Να βρείτε για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 3)x + 6 - \lambda = 0$ έχει πραγματικές και άνισες ρίζες
14. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $-2x^2 + 3x + 2\lambda^2 - 5\lambda - 12 = 0$ να έχει ετερόσημες ρίζες
15. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - (3\lambda - 1)x + (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για όλα τα $\lambda \in \mathbb{R}$
16. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες για όλα τα $\lambda \in \mathbb{R}$
17. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το τριώνυμο $f_1(x) = (\lambda - 1)x^2 + 4x + \lambda + 2$, $\lambda \neq 1$ να είναι θετικό για όλα τα $x \in \mathbb{R}$
18. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το τριώνυμο $f_2(x) = \lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda$, $\lambda \neq 0$ να είναι αρνητικό για όλα τα $x \in \mathbb{R}$
19. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η ανίσωση $4x^2 + 4(2\mu - 1)x + 4 - 3\mu \geq 0$ να αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$
20. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ανίσωση $-x^2 + (\lambda - 5)x + \lambda - 8 \leq 0$ να αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$
21. Να βρείτε τις τιμές του $\rho \in \mathbb{R}$ ώστε η ανίσωση $(\rho - 6)x^2 + (\rho - 3)x - 1 < 0$ να αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$
22. Να βρείτε τις τιμές του $\sigma \in \mathbb{R}$ ώστε η ανίσωση $(\sigma - 2)x^2 - 2\sigma x + 2\sigma - 3 > 0$ να αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$