

10 ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ 1-1 ΚΑΙ ΤΗΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\phi(x) = x^{2\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^{2019} + 5x - 7$, $x \in \mathbb{R}$

Β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

Γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

Δ) Να μελετηθεί το πρόσημο της $f(x)$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση περνά από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(2,3)$.

Α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση

Β) Να βρείτε το πρόσημο της f

Γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(2e^x + 1) = 3$

Δ) Να λυθεί η ανίσωση $f(3x + 5) \leq 0$

ΘΕΜΑ 3

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με την ιδιότητα $(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1$ η οποία ισχύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(2) = 5$:

Α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

Β) Να βρεθούν οι τιμές $f(5)$ και $f^{-1}(2)$.

Γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2$

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ η οποία επαληθεύει την ιδιότητα $3f(x) + 2f^3(x) = 4x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1}

Β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Να αποδείξετε ότι ισχύουν στο $\mathbb{R}$ οι ισοδυναμίες

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$$

Δ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , f^{-1} .

Ε) Να λυθεί η ανίσωση $f(2e^{x-1}) \geq f(3-x)$

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

Β) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων f , f^{-1} .

Γ) Να λυθεί η εξίσωση $e^{x^5+x^3-2} + x^5 + x^3 = 2f^{-1}(e+2) - 3$

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - x + 12$, $x \in \mathbb{R}$

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

Β) Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(14)$

Γ) Να λυθεί η ανίσωση $27 \cdot 2^{3x} - (4^x + 2)^3 < 4^x - 3 \cdot 2^x + 2$

Δ) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y=x$

Ε) Δίνεται ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Να λυθεί επίσης η ανίσωση

$$f^{-1}(f(|x|-1)+8) < 1$$

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x) = \ln x + x^2, x > 0$

Α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση ϕ είναι αντιστρέψιμη

Β) Να λυθεί η εξίσωση

$$e^{x^4 - 5x^2 + 4 - \ln 3} = \frac{x}{x^2 + 2}$$

ΘΕΜΑ 8

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)+f(e)=2e+3$ και

$$f(x) - f(y) = \ln \frac{x}{y} + 2(x-y) \text{ για όλα τα } x, y \text{ με } x > 0, y > 0.$$

Α) Να βρεθούν οι τιμές $f(1)$ και $f(e)$

Β) Να βρείτε τον τύπο της f

Γ) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη

Δ) Να λυθεί η ανίσωση $4(x^2 - 1) < \ln \frac{x^2 + 10}{3x^2 + 8}$

ΘΕΜΑ 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1, x \in \mathbb{R}$

Α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

Β) Να λυθεί η εξίσωση $e^{\eta\mu x} + \eta\mu x = \sqrt{e} + \frac{1}{2}$.

Γ) Να δείξετε ότι $e^e + e < e^\pi + \pi$.

Δ) Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(x) = 0$.

ΘΕΜΑ 10

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})=g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ οι οποίες είναι γνησίως φθίνουσες και περιττές.

Α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $g(0)$.

Β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι περιττή και γνησίως αύξουσα.

Γ) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι επίσης περιττή και γνησίως φθίνουσα.

Δ) Να λυθεί η εξίσωση $2(f \circ g)(x) = 3f(x) + 4g(x)$

Ε) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x+2) + f^{-1}(x+4) + f(x+3) < 0$
