

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$ και $g \circ \frac{1}{f}$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$ και $h(x) = \sqrt{x}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $\frac{f}{g}$, $\frac{f}{g} \circ h$, $f \circ \frac{1}{f}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφή τους.

A) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$.

B) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Γ) $f(x) = x - \ln(1 + e^x)$.

Δ) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$.

E) $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$.

ΣΤ) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$

Z) $f(x) = \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)$.

ΘΕΜΑ 2

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ είναι 1-1. Να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1} και στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)^2 + 3, x \geq 2$.

A) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

B) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

Γ) Για κάθε $x \geq 2$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(f(x), x)$ των C_f και $C_{f^{-1}}$ αντίστοιχα. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση d των σημείων A και B .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**ΘΕΜΑ 1**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x - 16$.

A) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω $f: R \rightarrow R$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$f^3(x) + f(x) - x = 0$ για κάθε $x \in R$ και $f(R) = R$.

A) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B) Να βρείτε την f^{-1} .

Γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την $y=x$.

ΘΕΜΑ 3

Έστω $f: R \rightarrow R$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$f^2(x) - 4f(x) + 5 = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in R$ και $f(R) = R$.

A) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B) Να βρείτε την f^{-1} .

Γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την $y=x$.