

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΘΕΜΑ 1

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$f_1(x) = \frac{1}{e^x + 1}, f_2(x) = \frac{1}{e^x - 1}, f_3(x) = \frac{1}{e^x - e}, f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{e - e^{-x}}}, f_5(x) = \sqrt{e^{-x} - 1},$$
$$f_6(x) = \frac{1}{e^{2x} - (e+1)e^x + e}, f_7(x) = \sqrt{e^{2x} - (e+1)e^x + e}.$$

ΘΕΜΑ 2

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$g_1(x) = \frac{1}{e^x - 2}, g_2(x) = \sqrt{2e^x - 1}, g_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - 3e^x}}, g_4(x) = \frac{1}{\ln(x-1) + \ln(x) - 1 + \ln(e/2)},$$
$$g_5(x) = \frac{1}{\ln x^2 - (\ln x)^2}, g_6(x) = \frac{1}{\ln(x^2 + 1) - \ln x - \ln 2}$$

ΘΕΜΑ 3

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ και $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ είναι περιττές.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln \sqrt{x} - \sqrt{\ln x}$ και $g(x) = \ln^4 x - 5 \ln^2 x + 4$. Να βρεθούν τα σημεία τομής τους με τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 5

Να σχεδιάσετε τις συναρτήσεις

$$f_1(x) = \ln|x|, f_2(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2), f_3(x) = |\ln x|, f_4(x) = \ln(ex - 2e) \text{ και να βρείτε το}$$

σύνολο τιμών τους.

ΘΕΜΑ 6

Α) Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \ln x^2$ είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (\ln x)^2$;

Β) Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \ln(x^2 - 4)$ είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \ln(3x)$;

Γ) Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^{\ln x}$ δεν είναι κάτω από την ευθεία $y=e$;

ΘΕΜΑ 7

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^{3x-5}$ και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=1$.

Β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = x^{x^2+3x+1}$ και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με την ευθεία $y=x$.

Γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων

$$\varphi(x) = (\varepsilon\varphi x)^{\eta\mu x}, h(x) = (\sigma\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x} \text{ στο διάστημα } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

ΘΕΜΑ 8

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$ έχει ακριβώς μια λύση την $x=2$.

B) Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 27^x + 12^x - 2 \cdot 8^x \text{ είναι πάνω από τον άξονα } x'x;$$

Γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων

$$g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3}, h(x) = 2^x.$$

ΘΕΜΑ 9

A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x) = \ln x + x - 1$ και να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

B) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της φ με τον άξονα $x'x$.

Γ) Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \ln x$ δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 1 - x$; Να μελετήσετε το ίδιο ερώτημα γραφικά.

Δ) Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $\theta(x) = \ln x + x^2 - 1$ και να λυθεί αλγεβρικά και γραφικά η ανίσωση $\ln x \geq 1 - x^2$.

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x + \log_{\frac{\pi}{4}} x, x \in (0, \pi)$.

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

B) Να δείξετε ότι η ευθεία $y=2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f ακριβώς σε ένα σημείο.

ΘΕΜΑ 11

A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \log_3(16^x - 2 \cdot 12^x)$.

B) Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 2x + 1$.

ΘΕΜΑ 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln(x+3) - \ln(\alpha x), \alpha \in \mathbb{R}$.

A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f για τις διάφορες τιμές του α .

B) Αν $\alpha \geq 0$ να βρεθεί το α ώστε η γραφική παράσταση της f να τέμνει τον άξονα $x'x$ ακριβώς σε ένα σημείο.

Γ) Αν $\alpha < 0$ να εξετάσετε σε πόσα σημεία τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$.