

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - Συναρτήσεις, Σύνθεση, Αντίστροφη Συνάρτηση

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{\sqrt{2-|x|}}{|x+1|-1}, g(x) = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}.$$

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους και να λυθούν οι εξισώσεις $f(x) = 0$, $g(x) = 2$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - (a+\beta)x^2 + \beta x + 1$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-\frac{1}{2}, 7)$, $B(-1, 23)$. Α) Να δείξετε ότι $a = -6$ και $\beta = -5$. Β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 1$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} - 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f \cdot g$ και να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της από το σχήμα

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2-1)}$. Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . Β) Να δείξετε ότι το 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .
5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$ και η ευθεία $\epsilon : y = ax + \beta$. Α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες. Β) Αν η C_f και ϵ τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 1$ και η ϵ διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$, να βρείτε τα a, β .
6. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) = g(x) + x^2 - 4$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g .
7. Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - f(x) - 1 = x(x-1)$ για όλα τα $x \in A$. Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον $x'x$.
8. Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει $g(x) = f^2(x) - 2f(x) + x^2 + 3$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_g τέμνει το θετικό ημιάξονα Oy .
9. Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f^2(x) + 3f(x) = x$;
10. Σε κάθε περίπτωση να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: Α) $f^2(x) + g^2(x) + 1 = 2[\eta\mu x \cdot f(x) - \sigma\upsilon\nu x \cdot g(x)]$, Β) $f^2(x) = 4e^x (f(x) - e^x)$, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^9 - x^6$ και $g(x) = x^{2019} - x^{2020}$. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{(\lambda + 1)x - 2\lambda - 1}{x - 2\lambda^2 + \lambda - 2}$$

και

$$g(x) = \frac{[(1 - \lambda)^8 + \lambda]x + (\lambda - 3)^5 - 4}{x - \lambda^2 - 2\lambda}$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f = g$.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{\lambda x + 4}{x - 4^\lambda - 4}, \quad g(x) = \frac{(2 - \lambda^2)x - \lambda^2}{6 \cdot 2^\lambda - 4 - x}$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις f, g να είναι ίσες.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 3 - x + \frac{2x + x^3}{x^2 + 2}, \quad g(x) = \frac{(2\lambda^2 + 1)x^2 + (2\lambda - 1)x + 4 - \lambda^2}{x^2 + \lambda x + 1}.$$

Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f = g$.

15. Αν οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττές να αποδείξετε ότι I) η συνάρτηση $f + g$ είναι περιττή, II) η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι άρτια, III) η συνάρτηση fog είναι περιττή.

16. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. I) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f^+(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ είναι άρτια συνάρτηση. II) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f^-(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ είναι περιττή συνάρτηση. III) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αναλύεται σε άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

I) Αν ισχύει $(fog)(x) = (goh)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $f = h$.

II) Αν ισχύει $(fogof)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $fog = gof$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f(x) \leq x, \quad f(x + y) \leq f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

I) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων.

II) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

III) Να βρείτε τον τύπο της f .

19. Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y > 0$$

A) Να δείξετε ότι

$$I) f(1) = 0,$$

$$II) f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y) \text{ για κάθε } y > 0,$$

$$III) f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \text{ για κάθε } x > 0, y > 0,$$

$$IV) f(x^3) = 3f(x) \text{ για κάθε } x > 0,$$

$$V) f(\sqrt{x}) = \frac{f(x)}{2} \text{ για κάθε } x > 0.$$

B) Αν $f(65) + f(31) \neq 0$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{f\left(\frac{2015}{2014}\right) + f\left(\frac{2014}{2015}\right) + \dots + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{2}{1}\right)}{f(65) + f(31)}$$

Γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Να αποδείξετε ότι η $h = f \circ g$ είναι περιττή

20. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x-3) - 2f(1-x) = x^2 - 2x \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τη συνάρτηση } f. \text{ (Υποδ. Να θέσετε } y = x - 3 \text{ και } z = -y - 2)$$

21. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x^2+2) + f(3x) = 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x' τουλάχιστον σε δυο σημεία. (Υποδ. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + 2 = 3x$.)

22. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = 2x - 1$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. I) Να δείξετε ότι $f(2x - 1) = 2f(x) - 1$. II) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα. (Υποδ. Να λύσετε την εξίσωση $2x - 1 = x$.)

23. Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Αν επιπλέον ισχύει

$$(f \circ f \circ f)(x) + f(x) = 2x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

A) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Υπόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο)

B) Να δείξετε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Υπόδειξη: Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) > x$ τότε $f(x) < x$ ΑΤΟΠΟ. Αν $f(x) < x$ τότε $f(x) > x$ ΑΤΟΠΟ.)

24. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν $(f \circ g)(x) = 2x - 1$ και $g(x) = \frac{3-2x}{x+1}$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.
25. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{x^3}$, $x \geq 0$ είναι συνάρτηση 1-1.
26. Να λυθεί η εξίσωση $\ln \frac{\sqrt{x}+2}{x+2} = x - \sqrt{x}$, $x > 0$.
27. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x - 4, & x \geq 6 \\ x - 2, & x \leq 5 \end{cases}$$

και να βρείτε από το σχήμα τα σύνολα τιμών $f([6, +\infty))$, $f((-\infty, 5])$.
Να εξετάσετε αν I) η συνάρτηση f είναι 1-1 στα διαστήματα $(-\infty, 5]$ και $[6, +\infty)$ του πεδίου ορισμού της. II) Είναι η f συνάρτηση 1-1;

28. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 2 \\ \sqrt{x-2} + 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

είναι συνάρτηση 1-1.

29. Δίνεται η γνήσια αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(f(x) - 1) - 1$. Να δείξετε ότι:
A) $g(0) = 0$ B) $g \uparrow \mathbb{R}$. Να λυθεί η εξίσωση $g(x) = 0$
30. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-4}$ και $g(x) = 1 + \sqrt{x}$. Αφού βρείτε τα πεδία ορισμού κάθε μιας να βρείτε τις συναρτήσεις g^{-1} και $f \circ g^{-1}$
31. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A_f = (-1, 2]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων A) $g_1(x) = f(2x - 1)$, B) $g_2(x) = f(x^2)$.
32. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ είναι γνησίως μονότονη, με το ίδιο είδος μονοτονίας της f .
33. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέψιμη και περιττή συνάρτηση. Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι επίσης περιττή συνάρτηση.
34. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ έτσι ώστε $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
A) Να δείξετε ότι $f(0) = 1$ και $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
B) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Γ) Αν η f είναι 1-1 συνάρτηση να δείξετε ότι $f^{-1}(x \cdot y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ για όλα τα $x, y \in f(\mathbb{R})$.

35. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.
 Β) Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$ τότε να δείξετε ότι αντιστρέφεται.
36. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $12f(x^2) - 4f^2(x) \geq 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι δεν αντιστρέφεται.
37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 10$, $x \in \mathbb{R}$.
 Α) Να βρείτε την αντίστροφη της f .
 Β) Να λυθεί η εξίσωση $(f \circ f)(x) = 3$
38. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Αφού ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$ να υπολογίσετε την αντίστροφη $(f \circ f)^{-1}$.
39. Αν f γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε τα σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην $y = x$.
40. Α) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = -x^3$, αν η f αντιστρέφεται. Β) Αν f γνησίως φθίνουσα συνάρτηση τότε μπορεί να υπάρχουν σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$ που δεν βρίσκονται πάνω στην $y = x$.
41. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{ax+1}{x-\beta}, \quad x \neq \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

- Α) Αν η f δεν αντιστρέφεται να δείξετε ότι είναι σταθερή.
 Β) Αν η f αντιστρέφεται και ισχύει $f = f^{-1}$ να δείξετε ότι $a = \beta$.
42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 - 2$. Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$
43. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση $3g(x) + f(x-1) = g(g(x))$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι $1-1$ τότε να δείξετε ότι η g είναι επίσης $1-1$ και να λυθεί η εξίσωση $g(e^x + x + 1) = g(2 - x^3)$.
44. Αν η γνήσια μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει γραφική παράσταση που περνά από τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-1, 4)$ να δείξετε ότι είναι γνήσια φθίνουσα και να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(5 - f^{-1}(3 \ln x)) + 1 = 0$.
45. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x) - 1) = x$. Να δείξετε ότι: Α) η f είναι αντιστρέψιμη και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, Β) $f^{-1}(x) = f(x - 1) = f(x) - 1$

46. Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα την $x = 2$. Β) Αν η g είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση με $g(2) = 1$ να λυθεί η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x g(x)$
47. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = 2e^x$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: Α) $f(0) = 1$, Β) $f(x) > 0$, Γ) Η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$, Δ) Να λυθεί η ανίσωση $\ln(f(x)) \geq f(0)$.
48. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $e^{f(x)} + f(x) = g(x)$. Αν η g είναι γνήσια φθίνουσα να δείξετε ότι η f είναι επίσης γνήσια φθίνουσα και να λυθεί η εξίσωση $f(f(x^2 + 2x)) < f(f(x + 2))$
49. Αν για την περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 f(x) \leq \eta \mu x$ να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x^2}$ για τα μη μηδενικά x .
50. (2002) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ αντιστρέφεται και να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$
51. (2002) Έστω η συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η σύνθεση $f \circ g$ να ορίζεται και να είναι $1 - 1$. Να δείξετε ότι η g είναι επίσης $1 - 1$. Αν για όλα τα $x > 0$ ισχύει $g(f(\ln x) + 1) = g(x + 2)$ να δείξετε $f(x) = e^x + 1$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.
52. (2005) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + 2$ αντιστρέφεται.
53. (2005) Έστω η γνήσια μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση δέρχεται από τα σημεία $A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$ να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$.
54. (2006) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2 + (x - 2)^2$ με $x \geq 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση και να βρείτε το τύπο της. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1} με την ευθεία $y = x$.
55. (2014) Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$e^{f(x)} (f^2(x) - 2f(x) + 3) = x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

56. (2016) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 και να βρείτε την f^{-1} .

57. (2017) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$. I) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. II) Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0, 1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
58. (2019) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + 2$. Να αποδείξετε ότι είναι συνάρτηση 1-1 και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.
59. (2019) Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + 1$ και $g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ και τύπο $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
60. (2020) Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = e^x$.
I) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.
II) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.
61. (2020) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.
I) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$.
II) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι ίσες.
III) Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.
62. (2020) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
I) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.
II) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.
III) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\phi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.
63. (2020) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x+1)^2 - 1$, $x \in [-1, +\infty)$ και $g(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1} .
B) Να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.
64. (2021) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$, $x \in (1, +\infty)$ και η $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.
A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή

της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$, $x < 0$.

B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = g \circ f^{-1}$ είναι η $h(x) = \frac{x-1}{x}$, $x < 0$.

65. (2022) Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

A) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

B) Αν $h(x) = (x-1)^2$, $x \in [0, 1]$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h .

66. (2022) Δίνονται οι συναρτήσεις

$f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{x-1}$ και $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln x$

I) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\phi = g \circ f$.

II) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με $h(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Αν

$$\phi(x) = \ln x - \ln(x-1), \quad x \in (1, +\infty),$$

να εξετάσετε αν $\phi = h$.

67. (2023) Δίνεται η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \ln x$. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.

68. (2023) Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \text{ και } h(x) = \ln x.$$

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.

β) Αν $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$ να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1} = f$.

69. (2024) Δίνονται οι συναρτήσεις $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

και $h : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

A) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.

B) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση

$$[f^{-1}(f(x))]^2 = 1 + 4r(x).$$

70. (2024) Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2 \ln x - 1$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x - 2$.
 A) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.
 B) Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1} .
71. (2025) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
 A) Να αποδείξετε ότι η σύνθεση της συνάρτησης g με τη συνάρτηση f είναι η συνάρτηση $\phi(x) = \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
 B) Να δείξετε ότι η συνάρτηση ϕ είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τη συνάρτηση $h = \phi^{-1}$.
72. (2026) Δίνονται οι συναρτήσεις
- $$f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = 2 \ln(x - 1)$$
- $$g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x - 2} + 1.$$
- A) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.
 B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h^{-1} .
73. (2026) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
 A) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
 B) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g = f + f^{-1}$.