

ΣΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

★ ΘΕΩΡΗΜΑ (ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΙΠΟΥ)

- 1. Να αποδείξετε ότι: Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή**

$$v = P(\rho)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - \rho$ γράφεται

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + v(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης $x - \rho$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο v . Έτσι έχουμε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + v$$

και, αν θέσουμε $x = \rho$, παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + v = 0 + v = v \Rightarrow \boxed{v = P(\rho)}$$

Επομένως

$$v = P(\rho) \text{ και } \boxed{P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)} \blacksquare$$

★ ΘΕΩΡΗΜΑ (ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ)

- 2. Να αποδείξετε ότι: Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για $x = \rho$ παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) = 0,$$

που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Αντιστρόφως: Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho) = 0$. Τότε από τη σχέση

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$$

παίρνουμε

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x),$$

που σημαίνει ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

3. ΘΕΩΡΗΜΑ (ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΡΙΖΩΝ) Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ο $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha_n \rho^n + \alpha_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_0 &= -\alpha_n \rho^n - \alpha_{n-1} \rho^{n-1} - \dots - \alpha_1 \rho \\ \Leftrightarrow \alpha_0 &= \rho(-\alpha_n \rho^{n-1} - \alpha_{n-1} \rho^{n-2} - \dots - \alpha_1)\end{aligned}$$

Επειδή οι $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο $(-\alpha_n \rho^{n-1} - \alpha_{n-1} \rho^{n-2} - \dots - \alpha_1)$ είναι ακέραιος. Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε, ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0 .



4. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\log_\alpha(\theta_1 \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι είναι:

$$\log_\alpha \theta_1 = x_1 \quad \text{και} \quad \log_\alpha \theta_2 = x_2 \quad (1)$$

Τότε έχουμε

$$\alpha^{x_1} = \theta_1 \quad \text{και} \quad \alpha^{x_2} = \theta_2$$

οπότε:

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1 \theta_2$$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με

$$\log_\alpha(\theta_1 \theta_2) = x_1 + x_2$$

από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά:

$$\log_\alpha(\theta_1 \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$$



5. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, $\theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι είναι:

$$\log_\alpha \theta = x \quad (2)$$

Τότε έχουμε $\alpha^x = \theta$ οπότε: $\alpha^{\kappa x} = \theta^\kappa$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa x$$

από την οποία, λόγω της (2), προκύπτει ότι:

$$\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$$

6. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει ότι $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι :

$x = \text{συν } \omega$ και $y = \text{ημ } \omega$

Επειδή όμως ,

$(OM) = 1$ και

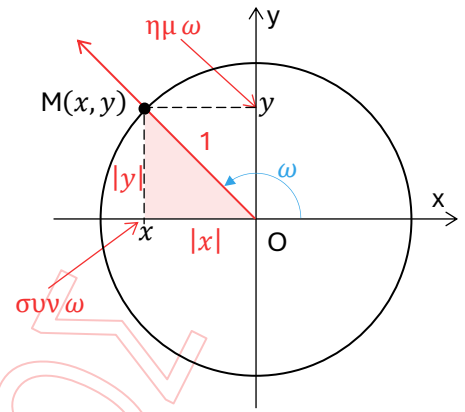
$$(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

θα ισχύει :

$$x^2 + y^2 = 1$$

οπότε θα έχουμε :

$$\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$$



7. Να αποδείξετε ότι:

$$\epsilon\phi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega}, \quad \sigma\phi \omega = \frac{\sigma\upsilon\nu \omega}{\eta\mu \omega}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στο ίδιο σχήμα έχουμε :

$$\epsilon\phi \omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega} \quad (\text{εφόσον } x = \sigma\upsilon\nu \omega \neq 0)$$

$$\sigma\phi \omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu \omega}{\eta\mu \omega} \quad (\text{εφόσον } y = \eta\mu \omega \neq 0).$$

8. Να αποδείξετε ότι: $\epsilon\phi \omega \cdot \sigma\phi \omega = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι :

$$\epsilon\phi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega} \quad \text{και} \quad \sigma\phi \omega = \frac{\sigma\upsilon\nu \omega}{\eta\mu \omega} \quad (\text{εφόσον } \sigma\upsilon\nu \omega \neq 0 \text{ και } \eta\mu \omega \neq 0)$$

Επομένως :

$$\epsilon\phi \omega \cdot \sigma\phi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \omega}{\eta\mu \omega} = 1$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

9. Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και τι ονομάζουμε λύση της;

Η **Βασική Μορφή** μιας γραμμικής εξίσωσης είναι $ax + by = \gamma$, με a και b όχι και οι δύο μηδέν

Λύση μιας εξίσωσης με δύο μεταβλητές είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) που οδηγεί σε αλήθεια όταν αντικατασταθεί στην εξίσωση, δηλαδή την επαληθεύει.

10. Να αποδείξετε ότι η γραμμική εξίσωση $ax + by = \gamma$ με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

- Αν $b \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται :

$$ax + by = \gamma \Leftrightarrow by = -ax + \gamma \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{\gamma}{b}$$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{a}{b}$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\frac{\gamma}{b}$

Ειδικότερα :

- Αν $a \neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες, ενώ
- Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = \frac{\gamma}{b}$ και επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\frac{\gamma}{b}$.

- Αν $b = 0$ (οπότε $a \neq 0$), τότε η εξίσωση γράφεται

$$ax = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{a}$$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\frac{\gamma}{a}$

11. Τι παριστάνει γραφικά η εξίσωση $y = \kappa$;

Η εξίσωση $y = \kappa$ παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

12. Τι παριστάνει γραφικά η εξίσωση $x = \kappa$;

Η εξίσωση $x = \kappa$, παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$.

⚠ Προσοχή: Η ευθεία $x = \kappa$ δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

13. Τι λέμε γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους;

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις $ax + by = \gamma$ και $a'x + b'y = \gamma'$ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** ή, πιο σύντομα, ένα **γραμμικό σύστημα 2×2** και γράφουμε

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$

14. Τι λέγεται λύση ενός συστήματος και τι επίλυση ενός συστήματος;

Κάθε ζεύγος (x, y) αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται **λύση του συστήματος**. Επίλυση ενός συστήματος ονομάζεται η διαδικασία εύρεσης του συνόλου των λύσεων του συστήματος.

15. Πως κάνουμε επαλήθευση του συστήματος;

Αντικαθιστούμε τις τιμές των αγνώστων που βρήκαμε στις αρχικές εξισώσεις του συστήματος και να ελέγχουμε αν τις επαληθεύουν, δηλαδή κάνουμε **επαλήθευση του συστήματος**.

16. Πότε δύο συστήματα λέγονται ισοδύναμα;

Όταν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις

Η μετατροπή ενός συστήματος σε ισοδύναμό του γίνεται με αντικατάσταση κάποιας εξίσωσης από ένα **γραμμικό συνδυασμό** $\lambda(\epsilon) + \lambda'(\epsilon')$, των δύο εξισώσεων (ϵ) και (ϵ') .

17. Με ποιες μεθόδους μπορεί να λυθεί ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους;

Με τη μέθοδο της **αντικατάστασης** και με τη μέθοδο των **αντιθέτων συντελεστών** (ή μέθοδο της απαλοιφής), με **Γραφική** επίλυση, με τη μέθοδο των **οριζουσών**.

18. Αν οι εξισώσεις του συστήματος $\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$, παριστάνουν ευθείες ϵ και ϵ'

α. Πότε οι ϵ, ϵ' τέμνονται; **β.** Πότε είναι παράλληλες; **γ.** Πότε ταυτίζονται-συμπίπτουν; (γεωμ. ερμηνεία)

α) Το σύστημα έχει μοναδική λύση

β) Το σύστημα είναι αδύνατο

γ) Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Μονοτονία συνάρτησης:

ΟΡΙΣΜΟΙ

19. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα** (γράφουμε $f \nearrow$ σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει :

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- **γνησίως φθίνουσα** (γράφουμε $f \searrow$ σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει :

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Επίσης

- Μια συνάρτηση f λέγεται **σταθερή** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: $f(x_1) = f(x_2)$

20. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ** .

- Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
- **Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$**
- **Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$**

Ακρότατα:

21. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

Το $x_0 \in A$ λέγεται **θέση μεγίστου**, ενώ η τιμή $f(x_0)$ λέγεται **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με $f(x_0) = \max_A f(x)$

22. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

Το $x_0 \in A$ λέγεται **θέση ελαχίστου**, ενώ η τιμή $f(x_0)$ λέγεται **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με $f(x_0) = \min_A f(x)$

23. Τι ονομάζουμε ακρότατα μιας συνάρτησης;

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

Άρτια

24. Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A λέγεται **άρτια**; Τι ισχύει για την γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης;

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέγεται **άρτια**, όταν :

$$\text{για κάθε } x \in A \text{ ισχύει: } \begin{cases} -x \in A \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα $y'y$.

Περιττή

25. Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A λέγεται **περιττή**; Τι ισχύει για την γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης;

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέγεται **περιττή**, όταν :

$$\text{για κάθε } x \in A \text{ ισχύει: } \begin{cases} -x \in A \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

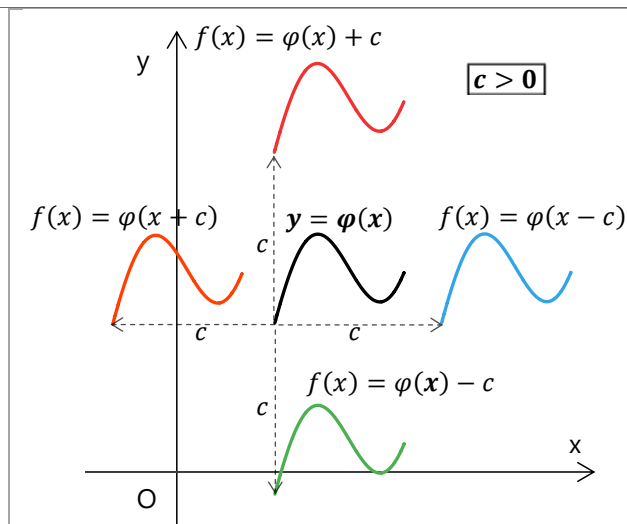
Παρατήρηση: Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι η f άρτια ή περιττή: το πεδίο ορισμού να είναι συμμετρικό ως προς το 0 (πχ $A = [-c, c]$) ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $-x \in A$, διαφορετικά δεν είναι και δεν συνεχίζουμε στα $f(-x), -f(x)$

Κατακόρυφη - οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

26. Έστω μια συνάρτηση $\varphi(x)$ και $c > 0$. Πώς προκύπτει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$f(x) = \varphi(x) + c, \quad f(x) = \varphi(x) - c, \quad f(x) = \varphi(x - c), \quad f(x) = \varphi(x + c);$$



- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με: $f(x) = \varphi(x) + c$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια **κατακόρυφη μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα πάνω**
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με: $f(x) = \varphi(x) - c$, όπου $c > 0$, προκύπτει από μια **κατακόρυφη μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα κάτω**

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:

$$f = \varphi(x - c), \text{ όπου } c > 0,$$

προκύπτει από μια **οριζόντια μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα δεξιά**

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:

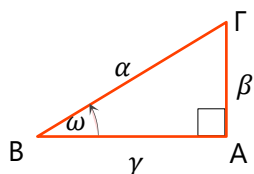
$$f = \varphi(x + c), \text{ όπου } c > 0,$$

προκύπτει από μια **οριζόντια μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

27. Έστω οξεία γωνία ω . Πώς ορίζεται το ημίτονο, συνημίτονο, η εφαπτόμενη και η συνεφαπτόμενη της γωνίας ω ;



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

$$\eta\mu \omega = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu \omega = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\epsilon\varphi \omega = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκειμένη κάθετη}}$$

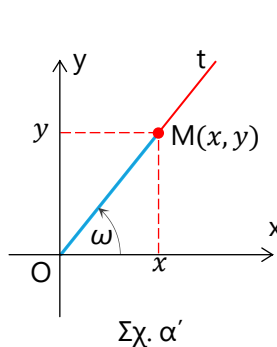
$$\sigma\varphi \omega = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}}$$

«**η**μ**α**υ – σ**τ**υ – ε**φ**α**τ**»

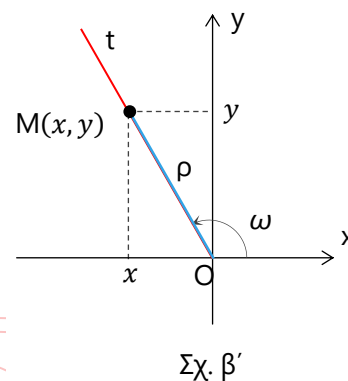
28. Πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω , με $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Οτ μία ημιευθεία αυτού και ω η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox αν περιστραφεί κατά τη **θετική φορά** γύρω από το O μέχρι να συμπίψει για πρώτη φορά με την ημιευθεία $O\tau$ (Σχ. α', β'). Ο θετικός ημιάξονας Ox λέγεται **αρχική πλευρά** της γωνίας ω , ενώ η ημιευθεία $O\tau$ λέγεται **τελική πλευρά** της ω . Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $M(x, y)$ στην **τελική πλευρά** τότε $x\hat{O}M = \omega$ και $OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ τότε ορίζουμε ότι: οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι

$$\begin{aligned}\eta\mu \omega &= \frac{y}{\rho} \\ \sigma\upsilon\nu \omega &= \frac{x}{\rho} \\ \epsilon\phi \omega &= \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \\ \sigma\phi \omega &= \frac{x}{y}, \quad y \neq 0\end{aligned}$$



Σχ. α'



Σχ. β'

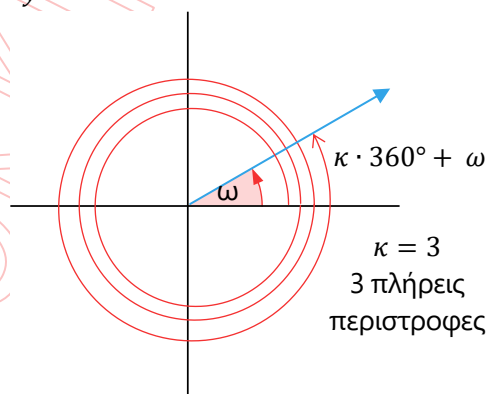
29. Πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων των 360° και αρνητικών γωνιών;

Για κάθε γωνία ω , θετική ή αρνητική, ορίζουμε:

$$\eta\mu \omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu \omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\phi \omega = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0, \quad \sigma\phi \omega = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0 \quad \text{Όπου } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

Έστω μια οξεία γωνία ω . Οι γωνίες που είναι μεγαλύτερες των 360° θα είναι της μορφής: $\kappa \cdot 360^\circ + \omega$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, και ισχύει:

$$\begin{aligned}\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) &= \eta\mu \omega \\ \sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) &= \sigma\upsilon\nu \omega \\ \epsilon\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) &= \epsilon\phi \omega \\ \sigma\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) &= \sigma\phi \omega\end{aligned}$$

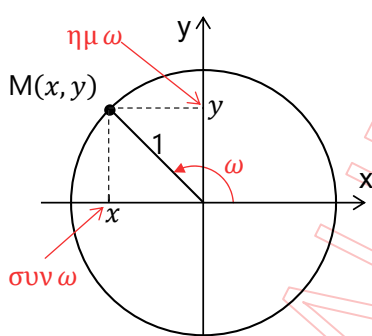


30. Τι ονομάζουμε τριγωνομετρικό κύκλο;

Με κέντρο την αρχή $O(0,0)$ ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτίνα $\rho = 1$ γράφουμε έναν κύκλο. Ο κύκλος αυτός λέγεται **τριγωνομετρικός κύκλος**.

31. Πώς ορίζονται το $\eta\mu \omega$ και το $\sigma\upsilon\nu \omega$ στον τριγωνομετρικό κύκλο;

αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$, τότε ισχύει:



$$\begin{aligned}\eta\mu \omega &= \frac{y}{1} = y = \text{τεταγμένη του σημείου } M \\ \sigma\upsilon\nu \omega &= \frac{x}{1} = x = \text{τετμημένη του σημείου } M\end{aligned}$$

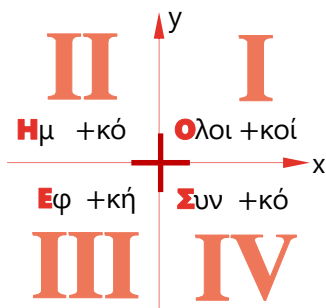
Για το λόγο αυτό ο άξονας x'x λέγεται και **άξονας των συνημίτονων**, ενώ ο άξονας y'y λέγεται και **άξονας των ημίτονων**.

32. Τι τιμές μπορούν να πάρουν το $\eta\mu \omega$ και το $\sigma\upsilon\nu \omega$;

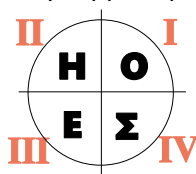
Οι τιμές του $\eta\mu \omega$ και του $\sigma\upsilon\nu \omega$ μιας γωνίας ω δεν μπορούν να υπερβούν κατ' απόλυτη τιμή την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου, που είναι ίση με 1. Δηλαδή ισχύει:

$$-1 \leq \eta\mu \omega \leq 1 \Leftrightarrow |\eta\mu \omega| \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu \omega \leq 1 \Leftrightarrow |\sigma\upsilon\nu \omega| \leq 1$$

33. Πώς βρίσκονται τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω ανάλογα με το τεταρτημόριο;



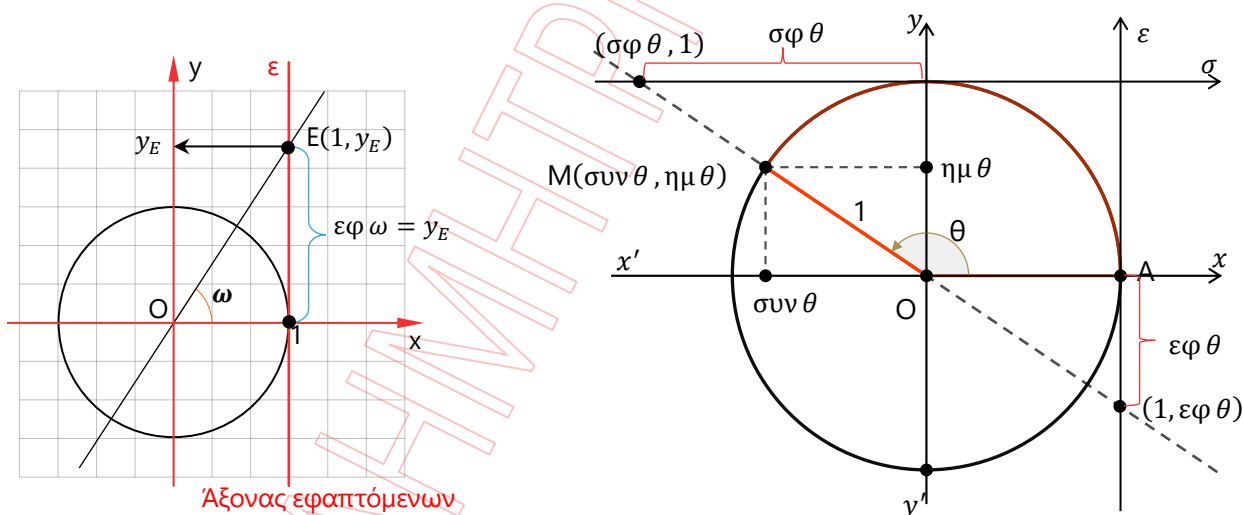
Αυτό μπορεί να ανακληθεί χρήσιμα από το ακόλουθο διάγραμμα ή με τη χρήση μιας μνημονικής πρότασης ΟΗΕΣ



34. Να συμπληρωθεί ο πίνακας με το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών

	τεταρτημόρια			
	1 ^ο	2 ^ο	3 ^ο	4 ^ο
ημ ω				
συν ω				
εφ ω				
σφ ω				
μνημονική πρόταση	Ο	Η	Ε	Σ

35. Πώς ορίζεται η εφ ω στον τριγωνομετρικό κύκλο;



36. Τι ορίζουμε ως ακτίνιο;

ΟΡΙΣΜΟΣ Ακτίνιο (ή 1 rad) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad)

37. Ποια σχέση συνδέει τη μοίρα με το ακτίνιο;

Εάν το μ είναι μια γωνία σε μοίρες και α είναι μια γωνία σε ακτίνια τότε

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi\mu}{180} \text{ και } \mu = \frac{180\alpha}{\pi}$$

38. Ποιος είναι ο πίνακας των τριγωνομετρικών αριθμών των βασικών γωνιών;

ω σε °	0°	30°	45°	60°	90°
ω σε rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ημ ω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συν ω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφ ω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται
σφ ω	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Στη συνέχεια, επειδή στον τριγωνομετρικό κύκλο το τόξο x rad έχει μήκος x, αντί να γράφουμε ημ(x rad), συν(x rad), εφ(x rad) και σφ(x rad), θα γράφουμε απλά ημ ω, συν ω, εφ ω και σφ ω.

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**39. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει ότι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$**

Απόδειξη στην αρχή

40. Να αποδείξετε ότι:

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

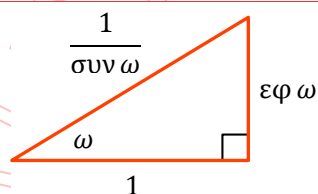
Απόδειξη στην αρχή

41. Να αποδείξετε ότι: $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$

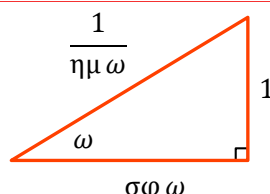
Απόδειξη στην αρχή

42. Να γνωρίζετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega} \quad \text{και} \quad \eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$$



$$\epsilon\phi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$$



$$\sigma\phi^2\omega + 1 = \frac{1}{\eta\mu^2\omega}$$

Απόδειξη εκτός ύλης

$$\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \\ \frac{\eta\mu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \frac{1}{\eta\mu^2\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \epsilon\phi^2\omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \\ 1 + \sigma\phi^2\omega = \frac{1}{\eta\mu^2\omega} \end{cases}$$

43. Τι ισχύει για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των αντίθετων γωνιών, των γωνιών με άθροισμα 180° , των γωνιών που διαφέρουν κατά 180° , των γωνιών με άθροισμα 90°

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\sin(-\theta) = \sin \theta$$

$$\eta\mu(-\theta) = -\eta\mu \theta$$

$$\epsilon\varphi(-\theta) = -\epsilon\varphi \theta$$

$$\sigma\varphi(-\theta) = -\sigma\varphi \theta$$

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180 έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\eta\mu(180^\circ + \theta) = -\eta\mu \theta$$

$$\epsilon\varphi(180^\circ + \theta) = \epsilon\varphi \theta$$

$$\sigma\varphi(180^\circ + \theta) = \sigma\varphi \theta$$

Οι γωνίες με άθροισμα 180 έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\sin(180^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\eta\mu(180^\circ - \theta) = \eta\mu \theta$$

$$\epsilon\varphi(180^\circ - \theta) = -\epsilon\varphi \theta$$

$$\sigma\varphi(180^\circ - \theta) = -\sigma\varphi \theta$$

Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90 , τότε το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

$$\sin(90^\circ - \theta) = \eta\mu \theta$$

$$\eta\mu(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\epsilon\varphi(90^\circ - \theta) = \sigma\varphi \theta$$

$$\sigma\varphi(90^\circ - \theta) = \epsilon\varphi \theta$$

44. Τριγωνομετρικοί τύποι στις θέσεις $\frac{\pi}{2}$ και $\frac{3\pi}{2}$

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\eta\mu(90^\circ + \theta) = \sin \theta$$

$$\epsilon\varphi(90^\circ + \theta) = -\sigma\varphi \theta$$

$$\sigma\varphi(90^\circ + \theta) = \epsilon\varphi \theta$$

$$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\eta\mu(270^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\epsilon\varphi(270^\circ - \theta) = \sigma\varphi \theta$$

$$\sigma\varphi(270^\circ - \theta) = \epsilon\varphi \theta$$

$$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\eta\mu(270^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\epsilon\varphi(270^\circ + \theta) = \sigma\varphi \theta$$

$$\sigma\varphi(270^\circ + \theta) = -\epsilon\varphi \theta$$

45. ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

- Οι γωνίες $2k\pi + \omega$ και ω έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς, με $k \in \mathbb{Z}$.
- Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο $\sin(-\omega) = \sin \omega$, και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu \omega$, $\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi \omega$, $\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi \omega$. Δηλαδή η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι άρτια, ενώ οι $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \epsilon\varphi x$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \sigma\varphi x$, $x \neq k\pi$ είναι περιττές συναρτήσεις. $\frac{\pi}{2}$
- Οι γωνίες της μορφής ή που μπορούν να πάρουν τη μορφή **(άρτιος) $\cdot 90^\circ \pm \omega$** , **(άρτιος) $\cdot \frac{\pi}{2} \pm \omega$** δηλ. $180^\circ \pm \omega$, $\pi \pm \omega$ ή $360^\circ \pm \omega$, $2\pi \pm \omega$ ή $2k \cdot 90^\circ \pm \omega$, $2k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \omega$ έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία ω αλλά πρόσημο (+) ή (-) ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας, θεωρώντας ότι $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$
- Οι γωνίες της μορφής ή που μπορούν να πάρουν τη μορφή **(περιττός) $\cdot 90^\circ \pm \omega$** , **(περιττός) $\cdot \frac{\pi}{2} \pm \omega$** δηλ. $90^\circ \pm \omega$, $\frac{\pi}{2} \pm \omega$ ή $270^\circ \pm \omega$, $3 \cdot \frac{\pi}{2} \pm \omega$ ή $(2k+1) \cdot 90^\circ \pm \omega$, $(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \pm \omega$ δηλ., εναλλάσσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία ω , δηλαδή το ημίτονο γίνεται συνημίτονο ή αντίστροφα και εφαπτομένη γίνεται συνεφαπτομένη ή αντίστροφα και πρόσημο (+) ή (-) ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο καταλήγει η τελική πλευρά της γωνίας, θεωρώντας ότι $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$

3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

46. Τι ονομάζουμε περιοδική συνάρτηση;

Ορισμός της περιοδικής συνάρτησης

Μια συνάρτηση f είναι **περιοδική** αν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε

$$f(x + T) = f(x)$$

για όλα τα x στο πεδίο ορισμού της f .

Ο μικρότερος αριθμός T για τον οποίο η f είναι περιοδική ονομάζεται **περίοδος** της f .

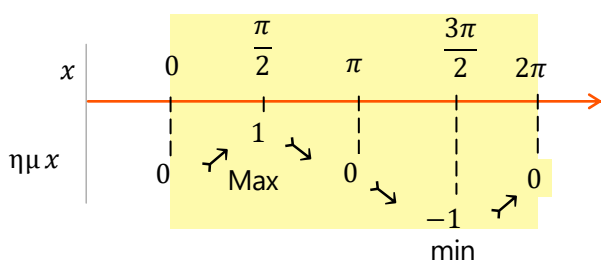
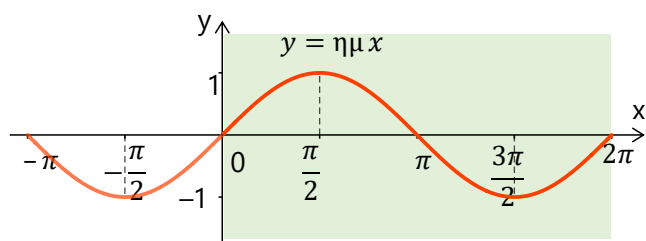
47. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις·

- α) Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο $\eta\mu(x \text{ rad})$ λέγεται **συνάρτηση ημίτονο** και συμβολίζεται με $\eta\mu$. Ορίζουμε δηλαδή ότι $\eta\mu x = \eta\mu(x \text{ rad})$
- β) Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο $\sigma\upsilon\nu(x \text{ rad})$ λέγεται **συνάρτηση ημίτονο** και συμβολίζεται με $\sigma\upsilon\nu$. Ορίζουμε δηλαδή ότι $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(x \text{ rad})$
- γ) Η **συνάρτηση εφαπτομένη** που συμβολίζεται με $\epsilon\varphi$, ορίζεται ως εξής: $\epsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$
το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\epsilon\varphi$ είναι το σύνολο: $\mathbb{R}_1 = \{x \mid \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$
- δ) Η **συνάρτηση συνεφαπτομένη** που συμβολίζεται με $\sigma\varphi$, ορίζεται ως εξής: $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$
το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\epsilon\varphi$ είναι το σύνολο: $\mathbb{R}_2 = \{x \mid \eta\mu x \neq 0\}$

48. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και αναφέρεται τις ιδιότητες τους

Συνάρτηση ημίτονο

$$f(x) = \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \eta\mu x \leq 1$$



Πίνακας μεταβολών

• Πεδίο Ορισμού: $A = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

• Σύνολο Τιμών: $[-1, 1]$

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow |\eta\mu x| \leq 1$$

• Περίοδος 2π :

$f(x + 2\pi) = \eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu x = f(x)$, για αυτό τη μελετάμε σε διάστημα πλάτους 2π π.χ. $[0, 2\pi]$

• y-τομή: $(0, 0)$

• x-τομή: $(\kappa\pi, 0)$

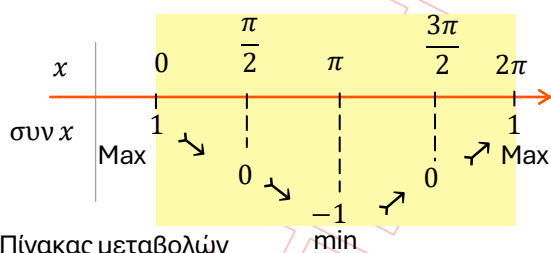
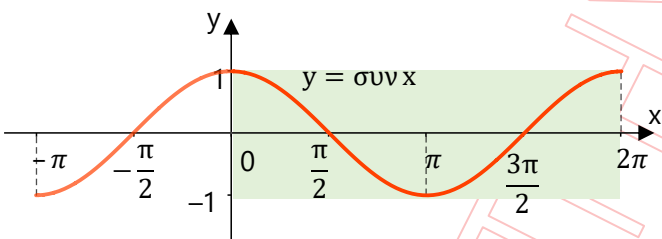
• f είναι **περιττή** $f(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -f(x)$ έτσι η γραφική παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων

• έχει μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$ με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

• ελάχιστο στο $x_1 = \frac{3\pi}{2}$ με $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

Συνάρτηση συνημίτονο

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$$



Πίνακας μεταβολών

• Πεδίο Ορισμού: $A = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

• Σύνολο Τιμών: $[-1, 1]$

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Leftrightarrow |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$$

• Περίοδος 2π :

$f(x + 2\pi) = \sigma\upsilon\nu(x + 2\pi) = \sigma\upsilon\nu x = f(x)$, για αυτό τη μελετάμε σε διάστημα πλάτους 2π π.χ. στο $[0, 2\pi]$

• y-τομή: $(0, 1)$

• x-τομή: $\left(\frac{\pi}{2} + \kappa\pi, 0\right)$

• f : **άρτια** $f(-x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x = f(x)$

Συμμετρία ως προς y-άξονα

• μέγιστο στα $x_1 = 0, x_2 = 2\pi$ με $f(0) = 1, f(2\pi) = 1$

• ελάχιστο στο $x_3 = \pi$ με $f(\pi) = -1$

Συνάρτηση εφαπτομένη

$f(x) = \varepsilon\varphi x, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

- Πεδίο Ορισμού: όλα τα $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Σύνολο Τιμών : $(-\infty, +\infty)$
- Η $\varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Η f είναι περιοδική με **περίοδο π** και για αυτό τη μελετάμε σε διάστημα πλάτους π π.χ. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- y-τομή: $(0,0)$
- x-τομή: $(k\pi, 0)$
- Κατακόρυφη Ασύμπτωτη: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- f : **περιττή** $f(-x) = \varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x = -f(x)$
- Συμμετρία ως προς την αρχή $O(0,0)$
- Δεν έχει ακρότατα (δηλαδή δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο).

Συνάρτηση συνεφαπτομένη

$f(x) = \sigma\varphi x, \quad x \in \mathbb{R} - \{k\pi\}$

- Πεδίο Ορισμού: όλα τα $x \neq k\pi$
- Σύνολο Τιμών : $(-\infty, +\infty)$
- **Περίοδος π** , για αυτό τη μελετάμε σε διάστημα πλάτους π π.χ. $(0, \pi)$
- Η $\sigma\varphi x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$
- x-τομή: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$
- Κατακόρυφη Ασύμπτωτη: $x = k\pi$
- f : **περιττή** $f(-x) = \sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x = -f(x)$
- Συμμετρία ως προς την αρχή $O(0,0)$
- Δεν έχει ακρότατα (δηλαδή δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο).

49. Τι μπορούμε να παρατηρήσουμε για τις συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$ και $f(x) = \rho \sigma\upsilon\upsilon(\omega x)$

ΣΧΟΛΙΟ Από τα προηγούμενα παραδείγματα γίνεται φανερό ότι, σε μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$:

- Το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της που είναι ίση με $-\rho$.
- Το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης που είναι ίση με $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

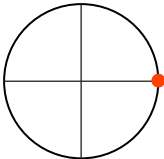
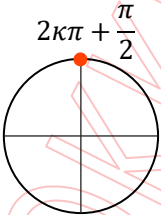
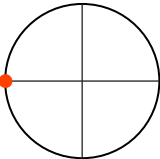
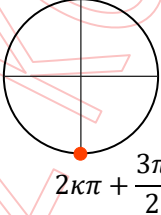
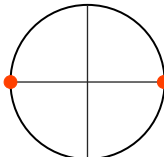
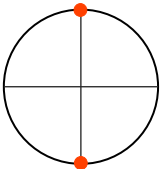
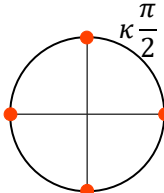
Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = \rho \sigma\upsilon\upsilon(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

50. Ποιοι είναι οι τύποι λύσεων της τριγωνομετρικών εξισώσεων**ΤΥΠΟΙ ΛΥΣΕΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ** (ως προς x , τα x και θ σε ακτίνια)

$$\begin{aligned} \eta\mu x = \eta\mu \theta &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi + \pi - \theta \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \\ \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \theta &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi - \theta \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \theta, k \in \mathbb{Z} \\ \epsilon\varphi x = \epsilon\varphi \theta &\Leftrightarrow x = k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z} \\ \sigma\varphi x = \sigma\varphi \theta &\Leftrightarrow x = k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

51. Γρήγορη επίλυση βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων**Τόξα με πέρασ στα άκρα των τεταρτημορίων και λύσεις τριγ. εξισώσεων**

 $2k\pi$ $\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	 $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 $2k\pi + \pi$ $\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$	 $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ $\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 $k\pi$ $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\epsilon\varphi x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ $\sigma\varphi x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ $\eta\mu^2 x = 1 = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 $k\frac{\pi}{2}$ $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ $\eta\mu 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	

52. Χρήσιμοι τύποι για την επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων**ΤΥΠΟΙ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ**

αλλαγής – σε +

αλλαγής τριγ. αριθμού

$-\eta\mu x = \eta\mu(-x)$ Περιττή	$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$-\epsilon\varphi x = \epsilon\varphi(-x)$ Περιττή	$\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
$-\sigma\varphi x = \sigma\varphi(-x)$ Περιττή	$\epsilon\varphi x = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$-\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - x)$	$\sigma\varphi x = \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4° : Πολυώνυμα-Πολυωνυμικές Εξισώσεις

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

53. Τι ονομάζουμε μονώνυμο;

Μονώνυμο του x : $\boxed{ax^v}$ με $a \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}^*$ ή κάθε σταθερός πραγματικός αριθμός α_0

54. Τι ονομάζουμε πολυώνυμο, τι λέγονται όροι, και τι συντελεστές του πολυωνύμου; Τι λέγεται σταθερός όρος του πολυωνύμου;

Πολυώνυμο του x , v βαθμού: $\boxed{a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0}$, $a_v, a_{v-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_v \neq 0$ και $v \in \mathbb{N}^*$ **υ θετικός ακέραιος**

Τα πολυώνυμα τα συμβολίζουμε συνήθως με $P(x)$, $Q(x)$, κτλ.

Όροι πολυωνύμου : Τα μονώνυμα $a_v x^v, a_{v-1} x^{v-1}, \dots, a_1 x, a_0$

Συντελεστές πολυωνύμου : οι αριθμοί $a_v, a_{v-1}, \dots, a_1, a_0$

Σταθερός όρος : ο a_0 (ό,τι δεν πολλαπλασιάζεται με το x)

Πολυώνυμα σε γενική μορφή:

1^{ου} βαθμού: $ax + \beta$, $a \neq 0$. 2^{ου} βαθμού: $ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$. 3^{ου} βαθμού: $ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $a \neq 0$
κ.ο.κ.

55. Τι λέμε βαθμό ενός πολυωνύμου;

Βαθμός του πολυωνύμου $a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ είναι v , αν $a_v \neq 0$.

δηλαδή ο μεγαλύτερος εκθέτης του x με μη μηδενικό συντελεστή

56. Πότε ένα πολυώνυμο λέγεται σταθερό και πότε μηδενικό

Σταθερό πολυώνυμο: $P(x) = c$, (c σταθερός αριθμός) είναι **μηδενικού βαθμού αν $c \neq 0$** . Τα πολυώνυμα της μορφής a_0 , δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί

- Το σταθερό πολυώνυμο c έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x και
- Αν ένα πολυώνυμο έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x , τότε αυτό είναι το σταθερό πολυώνυμο c και

Μηδενικό πολυώνυμο: $P(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Δεν ορίζεται ο βαθμός του.**

(το μηδενικό είναι και σταθερό)

Αν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με μηδέν, τότε το $P(x)$ είναι ίσο με το πολυώνυμο 0 (μηδενικό πολυώνυμο).

57. Πότε δυο πολυώνυμα είναι ίσα;

Ίσα πολυώνυμα : **Δυο πολυώνυμα**

$a_\mu x^\mu + \dots + a_1 x + a_0$ **και** $\beta_v x^v + \dots + \beta_1 x + \beta_0$, **με $\mu \geq v$**

θα λέμε ότι είναι ίσα όταν:

$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_v = \beta_v$ **και** $\alpha_{v+1} = \alpha_{v+2} = \dots = \alpha_\mu = 0$

δηλαδή όταν οι συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων τους είναι ίσοι.

- Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x
- Αν δυο πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x , τότε τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.

58. Τι ονομάζουμε αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου;

Αριθμητική τιμή : η τιμή που προκύπτει το πολυώνυμο αν αντικαταστήσουμε το x με ένα ορισμένο πραγματικό αριθμό

59. Τι ονομάζουμε ρίζα ενός πολυωνύμου;

Ρίζα πολυωνύμου : ο αριθμός που το μηδενίζει .

Αν είναι $P(\rho) = 0$, τότε ο ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου

60. Πώς προσθέτουμε δυο πολυώνυμα;

Η πρόσθεση πολυωνύμων γίνεται κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων.

61. Πώς αφαιρούμε δυο πολυώνυμα;

Η αφαίρεση γίνεται με απαλοιφή των παρενθέσεων και στη συνέχεια αναγωγή ομοίων όρων.

62. Με τι ισούται ο βαθμός του αθροίσματος δυο μη μηδενικών πολυωνύμων;

Αν το άθροισμα δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων

63. Πως πολλαπλασιάζουμε δυο πολυώνυμα;

Ο πολλαπλασιασμός γίνεται εφαρμόζοντας επιμεριστική ιδιότητα και στη συνέχεια αναγωγή ομοίων όρων.

64. Με τι ισούται ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων;

Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

65. Να γράψετε το θεώρημα : ταυτότητα της διαίρεσης

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$$

όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

το $\Delta(x)$ λέγεται **διαιρετέος**, το $\delta(x)$ **διαιρέτης**, το $\pi(x)$ **πηλίκιο** και το $\upsilon(x)$ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

- αν σε μια διαίρεση είναι $\upsilon(x) = 0$, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x)$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\delta(x)$ **διαιρεί** το $\Delta(x)$ ή ότι το $\delta(x)$ είναι **παράγοντας** του $\Delta(x)$ ή ότι το $\Delta(x)$ **διαιρείται με το** $\delta(x)$ ή ακόμη ότι το $\delta(x)$ είναι **διαιρέτης** του $\Delta(x)$.

66. Να αποδείξετε ότι

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΙΠΟΥ)

Να αποδείξετε ότι Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή

$$\upsilon = P(\rho)$$

Απόδειξη στην αρχή

67. Να αποδείξετε ότι

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ)

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

Απόδειξη στην αρχή

68. Εύρεση τιμών με άμεση αντικατάσταση ή με τον αλγόριθμο Horner

Δίνεται $P(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 5x + 1$, βρείτε τις τιμές του $P(x)$ όταν $x = -3$ δηλαδή το $P(-3)$

Άμεση αντικατάσταση

$P(-3)$	$= 2(-3)^4 + (-3)^3 - (-3)^2 + 5(-3) + 1$
	$= 2(81) + (-27) - 9 - 15 + 1$
	$= 162 - 27 - 9 - 15 + 1$
	$= 135 - 24 + 1$
	$= 112$

Σε αντίθεση με τον **αλγόριθμο Horner**, για την εύρεση του $P(-3)$

συντελεστές
του $P(x)$

	2	1	-1	5	1
		+	+	+	+
-3		-6	15	-42	111
	2	-5	14	-37	112

$112 = P(-3)$

- Δείξτε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 7x^3 +$

$17x^2 - 17x + 6$ **διαιρείται με το** $(x - 1)^2$ **και βρείτε το πηλίκιο της διαίρεσης** $P(x) \div (x - 1)^2$

ΛΥΣΗ

Για να διαιρείται το πολυώνυμο $P(x)$ με το $(x - 1)^2$ πρέπει το $P(x)$ να διαιρείται με το $(x - 1)$

και το πηλίκιο της διαίρεσης στη συνέχεια να διαιρείται επίσης με το $(x - 1)$

Έτσι διαιρώντας το πολυώνυμο διαδοχικά με $(x - 1)$ και $(x - 1)$ θα δώσει το ζητούμενο πηλίκιο.

1	1	-7	17	-17	6
	1	-6	11	-6	
1	1	-6	11	-6	0
	1	-5	6		
	1	-5	6	0	

Αυτή η γραμμή δείχνει ότι:
 $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 =$
 $(x - 1)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$ (I)

Αυτή η γραμμή δείχνει ότι:
 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 =$
 $(x - 1)(x^2 - 5x + 6)$ (II)

Από (I) και (II) συνεπάγεται $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = (x - 1)(x - 1)(x^2 - 5x + 6) \Leftrightarrow$
 $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = (x - 1)^2(x^2 - 5x + 6)$

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 1)^2$ είναι το $(x^2 - 5x + 6)$

• **Παραγοντοποιήστε το πολυώνυμο $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$**

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = x(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$ κοινός παράγοντας ο x

Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Horner στο $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ με για $x = 1$ αφού το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με το μηδέν.

1	1	-6	11	-6
	1	-5	6	
1	1	-5	6	0

$f(x) = x(x - 1)(x^2 - 5x + 6)$

Παραγοντοποιήστε και το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$

Έτσι: $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

69. Να θυμάστε τις ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ:

1. $P(\rho) = 0$
2. το ρ είναι ρίζα του $P(x)$
3. το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$
4. το $x - \rho$ διαιρεί το $P(x)$
5. το $P(x)$ διαιρείται με το $x - \rho$
6. η διαίρεση $P(x) \div (x - \rho)$ είναι τέλεια
7. το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) \div (x - \rho)$ είναι 0

Οι παραπάνω προτάσεις θα αντικαθιστούνται με την 1^η: $P(\rho) = 0$ η οποία είναι αλγεβρική έκφραση και μπορεί να δουλευτεί.

70. Τι ονομάζεται πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n :

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΙΣΩΣΗ

• Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$

71. Τι ονομάζουμε ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης:

• **Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης** ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, δηλαδή κάθε αριθμό ρ , για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$.

- Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $\boxed{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0}$ με $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{Z}$, είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου α_0
- Η επίλυση μια εξίσωσης με τη μέθοδο αυτή στηρίζεται στην ισοδυναμία $P_1(x) \cdot P_2(x) \dots P_k(x) = 0 \Leftrightarrow (P_1(x) = 0 \text{ ή } P_2(x) = 0 \text{ ή } \dots P_k(x) = 0)$

72. Να αποδείξετε ότι**ΘΕΩΡΗΜΑ (ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΡΙΖΩΝ)**

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $p \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο p είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

Απόδειξη στην αρχή

73. Πώς επιλύεται μια εξίσωση με ριζικό ή με ριζικό και απόλυτο

Υψώνουμε στο τετράγωνο και περιορισμό

$$\text{Η εξίσωση } \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \text{και} \\ f(x) = (g(x))^2 \end{cases} \Leftrightarrow \text{κτλ}$$

Η εξίσωση $\sqrt{f(x)} = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^2$ κτλ
 Πχ $\sqrt{x^2 - 4x - 5} = |x + 3|$

74. Εξισώσεις/Ανισώσεις απόλυτης τιμής

Αν θ θετικός ($\theta > 0$) Τότε

- $|x| = \theta$ σημαίνει $x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| \leq \theta$ σημαίνει $-\theta \leq x \leq \theta$
- Με $\delta > 0$ τότε:

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow d(x, x_0) < \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

Συμπερασματικά:

$$|x| = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ \text{αδύνατη,} & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases} \quad |x| \leq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha \leq x \leq \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ \text{αδύνατη,} & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$|x| \geq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\alpha \text{ ή } x \geq \alpha, & \text{αν } \alpha > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ αόριστη,} & \text{αν } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

75. Πως λύνουμε πολυωνυμικές ανισώσεις

- Ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή < 0 ή ≥ 0 ή ≤ 0

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x)B(x) > 0$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x)B(x) < 0$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow A(x)B(x) \geq 0 \text{ πρέπει } B(x) \neq 0$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0 \Leftrightarrow A(x)B(x) \leq 0 \text{ πρέπει } B(x) \neq 0$$

- Ανισώσεις της μορφής

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geq \Gamma(x) \Leftrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} - \Gamma(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{A(x) - B(x)\Gamma(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow (A(x) - B(x)\Gamma(x))B(x) \geq 0 \text{ και πρέπει } B(x) \neq 0$$

- Στις **ρητές** και στις **άρρητες** εξισώσεις ή ανισώσεις **προσέχουμε τους περιορισμούς**. Δηλαδή:

$\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ πρέπει $B(x) \neq 0$	$\sqrt{A(x)} \geq \kappa$ πρέπει $A(x) \geq 0$	$\frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}} \geq \lambda$ πρέπει $B(x) > 0$
--	---	--

- Ανισώσεις της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ (< 0)

Εννοείται κάνουμε πίνακα προσήμων για τα γινόμενα που προκύπτουν.

76. Πρόσημο τριώνυμου $ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ (πίνακας προσήμου)

Πρόσημο τριώνυμου $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$

Αν $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	Ομόσημο του α	0	Ετερόσημο του α	0	Ομόσημο του α

Αν $\Delta = 0$

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	Ομόσημο του a	0	Ομόσημο του a

Αν $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Ομόσημο του a	

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΙ

77. Πώς ορίζονται οι δυνάμεις με έκθετη ρητό;

Αν $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε :

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$$

Επιπλέον, αν μ, ν , θετικοί ακέραιοι, ορίζουμε : $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$

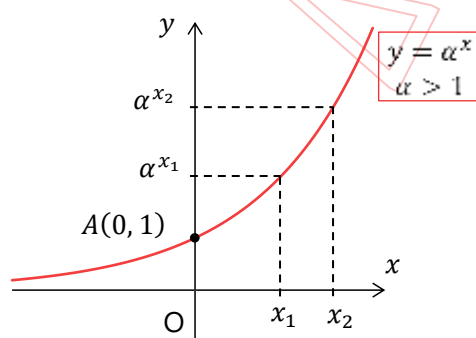
78. Πώς ορίζεται η εκθετική συνάρτηση με βάση a

Εκθετική συνάρτηση με βάση το a ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(x) = a^x$, $a > 0$ και $a \neq 1$, δηλαδή $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

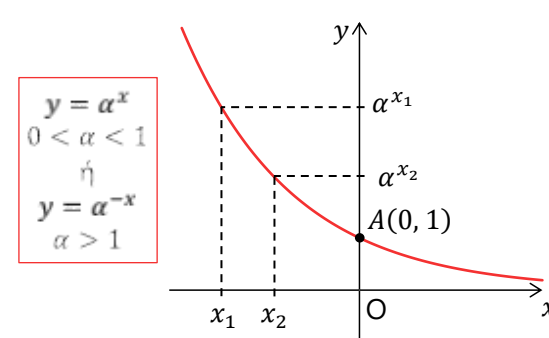
Αν είναι $a = 1$, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.

79. Ποιες είναι οι ιδιότητες και η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης

Αν $a > 1$ τότε για την $f(x) = a^x$ ισχύουν:



Αν $0 < a < 1$ τότε για την $f(x) = a^x$ ισχύουν:



- Πεδίο Ορισμού: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Σύνολο Τιμών: $(0, +\infty)$
 - $y'y$ -τομή: $A(0,1)$
 - $f \nearrow (-\infty, +\infty)$ για $f(x) = a^x$
- είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,
αν $x_1 < x_2$ τότε $a^{x_1} < a^{x_2}$
- $f: 1-1$
 - Αντίστροφη $\eta: f^{-1}(x) = \log_a x$
 - έχει Οριζόντια ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των x
 - Συνεχής

- Πεδίο Ορισμού: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Σύνολο Τιμών: $(0, +\infty)$
 - $y'y$ -τομή: $A(0,1)$
 - $f \searrow (-\infty, +\infty)$
- είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,
αν $x_1 < x_2$ τότε $a^{x_1} > a^{x_2}$
- $f: 1-1$
 - Αντίστροφη $\eta: f^{-1}(x) = \log_a x$
 - έχει Οριζόντια ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα των x
 - Συνεχής

80. Ποια χρήσιμη ισοδυναμία προκύπτει από την μονοτονία, για την επίλυση εκθετικών εξισώσεων

ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ οπότε με απαγωγή σε άτοπο έχουμε ότι ισχύει: $a^x: 1-1$, έτσι έχουμε

$$a^{x_1} = a^{x_2} \stackrel{a^x: 1-1}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$$

ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

εφαρμόζουμε τη μονοτονία της $f(x) = a^x$, προσέχοντας αν $a > 1$ ή $0 < a < 1$

$$a > 1$$

$$0 < a < 1$$

η $a^x \nearrow \mathbb{R}$ και διατηρείται η φορά, έτσι η $a^x \searrow \mathbb{R}$ και αλλάζει η φορά, έτσι

$$a^{x_1} < a^{x_2} \stackrel{a^x \nearrow}{\Leftrightarrow} x_1 < x_2 \quad a > 1$$

$$a^{x_1} < a^{x_2} \stackrel{a^x \searrow}{\Leftrightarrow} x_1 > x_2 \quad 0 < a < 1$$

Στη διαδικασία επίλυσης εκθετικών εξισώσεων ή ανισώσεων μπορούμε να εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Ο αριθμός e : $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong 2,7182818284590452353602874713527 \dots$

Εκθετική συνάρτηση λέγεται η $f(x) = e^x$ (όμοια με την $f(x) = a^x$ με $a > 1$)

5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

81. Πώς ορίζεται ο λογάριθμος με βάση $a > 0$ με $a \neq 1$ ενός θετικού αριθμού;

Λογάριθμος του θ με βάση το a όπου $\theta > 0$ και $a > 0$ με $a \neq 1$, ονομάζεται η μοναδική λύση της εξίσωσης $a^x = \theta$ και συμβολίζεται με $\log_a \theta$ δηλ. ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta$$

Ο $\log_a \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a για να βρούμε το θ .

Δεκαδικός λογάριθμος: $\log \theta$ δηλ. όταν η βάση $a = 10$. άρα $\log_{10} \theta = \log \theta$

Φυσικός (ή Νεπέρειος) λογάριθμος: $\ln \theta$ δηλ. όταν η βάση $a = e$. άρα $\log_e \theta = \ln \theta$

Κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως λογάριθμος: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x = \ln(e^x)$

82. Ποιες ιδιότητες προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του λογάριθμου;

Άμεσες συνέπειες του ορισμού του $\log_a \theta$ ($\theta > 0$ και $a > 0$ με $a \neq 1$)

$$\log_a a = 1$$

$$\ln e = 1$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log_a a^x = x$$

$$\ln e^x = x$$

$$\log 10^x = x$$

$$a^{\log_a \theta} = \theta$$

$$e^{\ln \theta} = \theta$$

$$10^{\log \theta} = \theta$$

83. Να γράψετε και να αποδείξετε τις κύριες ιδιότητες των λογαρίθμων

Ιδιότητες λογαρίθμων ($\theta, \theta_1, \theta_2 > 0$ και $a > 0$ με $a \neq 1$, $\kappa \in \mathbb{R}$)

$$\log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$\log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

$$\log_a \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_a \theta$$

$$\log_a \theta^{2k} = 2k \cdot \log_a |\theta|, k \in \mathbb{Z}^*$$

$$\log_a \sqrt[\nu]{\theta} = \log_a \theta^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu} \log_a \theta$$

$$\log_a \frac{1}{\theta} = -\log_a \theta$$

$$a^x = e^{x \ln a}, \text{ αφού } a = e^{\ln a}$$

Εκτός ύλης

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}, \quad \theta, a, \beta > 0 \text{ και } a, \beta \neq 1$$

$$\log_\beta \theta = \frac{\ln \theta}{\ln \beta}$$

$$\log_\beta \theta = \frac{\log \theta}{\log \beta}$$

Αποδείξεις στην αρχή

⚠ Επειδή το σύμβολο $\log_a \theta$ ορίσθηκε μόνο όταν $a > 0$ με $a \neq 1$ και $\theta > 0$, όπου στο εξής το συναντάμε, θα εννοείται ότι $a > 0$ με $a \neq 1$ και $\theta > 0$ χωρίς να τονίζεται ιδιαίτερα.

5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΑΥΤΗΣ

84. Τι ονομάζουμε λογαριθμική συνάρτηση με βάση, $a > 0$ και $a \neq 1$

Λογαριθμική συνάρτηση ορίζουμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ και $a \neq 1$, $x > 0$.
Ισχύει:

$$\log_a x = \theta \Leftrightarrow a^\theta = x$$

85. Ποιες είναι οι ιδιότητες και η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης

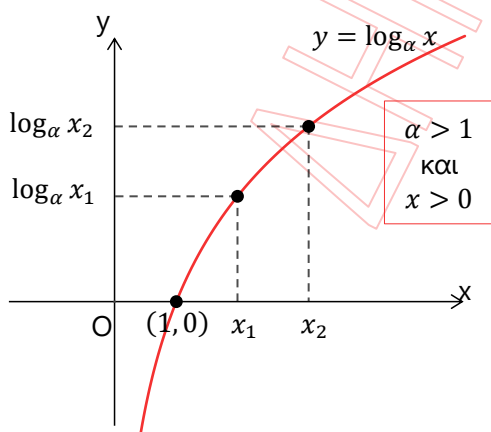
Για τη συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ ισχύουν:

- $x \in (0, +\infty)$, δηλ. έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$
- $y \in \mathbb{R}$, δηλ. έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(-\infty, +\infty)$

Αλλά:

Αν $a > 1$,

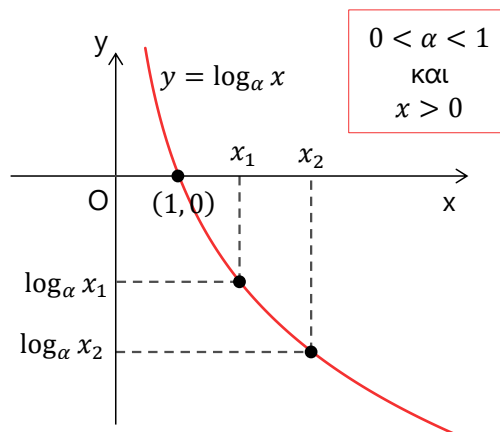
- η $\log_a x$ είναι γνησίως αύξουσα () δηλαδή αν $x_1 < x_2$ τότε $\log_a x_1 < \log_a x_2$



- έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των y .

Αν $0 < a < 1$,

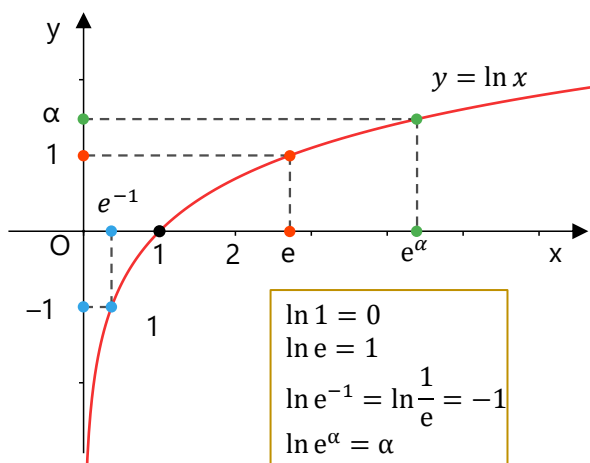
- η $\log_a x$ είναι γνησίως φθίνουσα () δηλαδή αν $x_1 < x_2$ τότε $\log_a x_1 > \log_a x_2$



- έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα των y .
- Αν $0 < x < 1$ τότε $\log_a x > 0$

- Αν $0 < x < 1$ τότε $\log_{\alpha} x < 0$
- Αν $x > 1$ τότε $\log_{\alpha} x > 0$

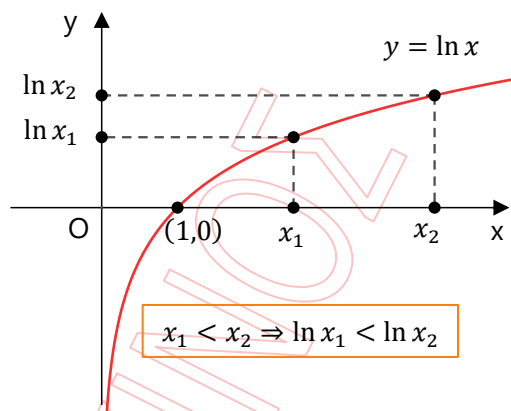
Έτσι η $f(x) = \ln x$ (όπου $\alpha = e \cong 2,71 > 1$):



Ομοίως η $f(x) = \log x$ (όπου $\alpha = 10 > 1$)

- Αν $x > 1$ τότε $\log_{\alpha} x < 0$

Είναι γνησίως αύξουσα.



86. Για Επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων

Από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει:

Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $\log_{\alpha} x_1 \neq \log_{\alpha} x_2$, έτσι με απαγωγή σε άτοπο έχουμε ότι ισχύει:

$$\log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2 \xrightarrow{\log_{\alpha} x : 1-1} x_1 = x_2$$

Εφαρμόζουμε τον ορισμό του λογαρίθμου και τις ιδιότητες.

87. Για την επίλυση των λογαριθμικών ανισώσεων :

Εφαρμόζουμε τον ορισμό του λογαρίθμου, τις ιδιότητες και τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης, προσέχοντας αν $\alpha > 1$ ή $0 < \alpha < 1$

$$\alpha > 1$$

η $\log_{\alpha} x$ ↗ άρα **διατηρείται η φορά** έτσι

$$\log_{\alpha} x_1 < \log_{\alpha} x_2 \xrightarrow[\alpha > 1]{\log_{\alpha} x \nearrow} x_1 < x_2$$

$$0 < \alpha < 1$$

η $\log_{\alpha} x$ ↘ άρα **αλλάζει η φορά** έτσι

$$\log_{\alpha} x_1 < \log_{\alpha} x_2 \xrightarrow[0 < \alpha < 1]{\log_{\alpha} x \searrow} x_1 > x_2$$

Οπότε με:

$$\alpha > 1$$

Αν: $0 < x < 1$ τότε $\log_{\alpha} x < 0$

Αν: $x > 1$ τότε $\log_{\alpha} x > 0$

$$0 < \alpha < 1$$

Αν: $0 < x < 1$ τότε $\log_{\alpha} x > 0$

Αν: $x > 1$ τότε $\log_{\alpha} x < 0$

88. Λογάριθμοι στην επίλυση εκθετικών εξισώσεων – ανισώσεων

- Εφαρμόζοντας τους ορισμούς και τις ιδιότητες της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης προσπαθούμε να μετατρέψουμε την εκθετική εξίσωση – ανίσωση σε λογαριθμική ή το αντίστροφο ανάλογα με το πιο είναι πιο εύκολο.

- Να θυμάστε ότι:

$e^x : 1-1$, ↗ στο $\mathbb{R}$ και να εφαρμόζετε στις ασκήσεις τις ισοδυναμίες:

$$e^{x_1} = e^{x_2} \xrightarrow{e^x : 1-1} x_1 = x_2$$

$$e^{x_1} < e^{x_2} \xrightarrow{e^x \nearrow} x_1 < x_2$$

- **Εντός ύλης: οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογαρίθμους με βάση το e ή το 10 , έτσι να θυμάστε ότι:**

$\ln x$, $\log x : 1-1$, ↗ στο $(0, +\infty)$, οπότε να εφαρμόζετε στις ασκήσεις τις ισοδυναμίες:

$$\ln x_1 = \ln x_2 \stackrel{\ln x : 1-1}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$$

$$\log x_1 = \log x_2 \stackrel{\log x : 1-1}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$$

$$\ln x_1 < \ln x_2 \stackrel{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} x_1 < x_2$$

$$\log x_1 < \log x_2 \stackrel{\log x \nearrow}{\Leftrightarrow} x_1 < x_2$$

Συμβουλές πριν τις εξετάσεις

- **Διάβασε** τις παραπάνω ερωτήσεις **και μάθε** τις απαντήσεις επίσης
- **Όλες τις ερωτήσεις κατανόησης, Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους, συμπλήρωσης κενού, αντιστοίχισης...** στις αντίστοιχες παραγράφους της εξεταστέας ύλης και οπωσδήποτε
- **Ξαναλύσε παραδείγματα Βιβλίου/Σημειώσεων.** Κάλυψε τις λύσεις στα παραδείγματα και προσπάθησε να τις επεξεργαστείς ξανά.
- **Ξαναλύσε** τις καλύτερες των ασκήσεων (δηλ. εκείνες που σου είχαν αρέσει κι όποιες σε είχαν δυσκολέψει) που λύσατε στη διάρκεια της χρονιάς!

προσπαθείς χωρίς βοήθεια > μετά βιβλίο ή σημειώσεις > μετά δες την απάντηση

είναι χρησιμότερο να λύσεις λιγότερες ασκήσεις με αυτόν τον τρόπο, παρά απλά να διαβάζεις τις απαντήσεις σε πολλές ασκήσεις!

Ενδεικτικά ξαναλύσε κι αυτές:

--	--	--

- ★ **SOS-Κάνε μια δοκιμαστική εξέταση.** Βρες κάποια παλαιότερα θέματα (πχ το ενδεικτικό διαγώνισμα που ακολουθεί) και αντιμετώπισε τα σαν προσομοίωση. Δώσε στον εαυτό σου ένα χρονικό όριο (2h) και μην χρησιμοποιείς τις σημειώσεις ή το βιβλίο σου.

Συμβουλές για τις εξετάσεις

Στόχος σας είναι να γράψετε **όσο καλύτερα μπορείτε αυτά που γνωρίζετε** και **έστω κάτι** από αυτά που δεν γνωρίζετε ή δεν έχετε διαβάσει.

1. **Διαβάστε** όλα τα θέματα **προσεκτικά**.
2. **Μην πανηγυρίζετε** αν τα θέματα σας φανούν εύκολα, γιατί ενδεχομένως κρύβουν παγίδες
3. **Μην πανικοβάλλεστε**, αν σας φαίνονται πολύ δύσκολα.
4. Σε ένα ερώτημα που σας φαίνεται άγνωστο **μην απογοητεύεστε** προσπαθήστε να φέρετε στη μνήμη σας όσα θέματα σχετικά με το ερώτημα, έχετε δουλέψει! Τις περισσότερες φορές κάτι που στην αρχή σας διαφεύγει, σε λίγο θα το θυμηθείτε!
5. **Αν δεν μπορείτε να συγκεντρωθείτε**, προσπαθήστε να χαλαρώσετε. Κλείστε τα μάτια για λίγα δευτερόλεπτα και αναπνεύστε βαθιά.
6. **ΧΑΛΑΡΩΣΤΕ!!!** Αυτό είναι το πρώτο βήμα για να δώσετε επιτυχώς εξετάσεις.
7. **Να είστε έξυπνοι** καθώς δίνετε εξετάσεις.. **Αρχικά**, επεξεργαστείτε τα θέματα που **ΓΝΩΡΙΖΕΤΕ καλύτερα**

8. Καθαρά γράμματα, ορθογραφία και σωστή σύνταξη (θα **κερδίσεις την εύνοια του βαθμολογητή**).
9. Χρησιμοποιείτε το **πρόχειρο**, φτιάξτε ένα σχεδιάγραμμα με τα **βασικότερα σημεία** των απαντήσεων σε κάθε ζήτημα. Τελειώνοντας κάθε θέμα το **μεταφέρουμε στο καθαρό**.
10. **Να είστε αποτελεσματικοί στο χρόνο**. Μην ξοδεύετε πολύ χρόνο σε ένα πρόβλημα, κατανέμουμε εξ ίσου το χρόνο ανάμεσα στα θέματα που έχουμε να επεξεργαστούμε.
11. **Εάν κολλήσετε** σε ένα θέμα, **προχωρήστε**.
12. **Δείξτε Όλη τη Δουλειά σας**. Μην αφήνετε στον καθηγητή να διαβάσει το μυαλό σας προσπαθώντας να καταλάβει αν ξέρετε τι κάνετε ή όχι
13. **Ξαναδιαβάστε το Πρόβλημα** πριν απαντήσετε στην ερώτηση.
14. **Έχει νόημα η απάντησή σας;** Διαβάζουμε προσεκτικά τις απαντήσεις που δώσαμε, για τυχόν επιπόλαια λάθη.
15. Εάν το επιτρέπει ο χρόνος, **Ελέγξτε ξανά την λύση σας**.
16. **Προσέξτε**, αν υπάρχουν **μονάδες μέτρησης** να είναι **στο ίδιο σύστημα!**
17. **Μην αφήνετε ποτέ ένα ερώτημα κενό**
Μηδέν παίρνεις αν δεν γράψεις τίποτα. **Αν όμως γράψεις παίρνεις ... $\geq$ Μηδέν !**
18. **Εξαντλήστε** όλο το χρόνο που έχετε στη διάθεσή σας. Δεν βιαζόμαστε.

Τέλος **να έχετε αυτοπεποίθηση** και **ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!**

Εύχομαι Καλή ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΚΑΙ ΚΑΛΕΣ ΔΙΑΚΟΠΕΣ

ΞΑΝΑ-Θυμηθείτε τις Ιδιότητες !

- $|a| \geq 0$ και $a^2 \geq 0$ για όλα τα $a \in \mathbb{R}$
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $|-a| = |a|$, και $|\beta - a| = |a - \beta|$
- $|x| \leq \theta \iff -\theta \leq x \leq \theta$
- $|x| \geq \theta \iff x \leq -\theta \text{ ή } x \geq \theta$

- $a < b \iff a + \kappa < b + \kappa$
- $\left. \begin{matrix} a < b \\ \gamma < \delta \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + \gamma = b + \delta$

Προσθέτουμε κατά μέλη

- $\left. \begin{matrix} a < b \\ \gamma < \delta \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \cdot \gamma = b \cdot \delta$,

 a, b, γ, δ θετικοί**Πολ/ζουμε κατά μέλη**

$$a < b \iff a \cdot \kappa < b \cdot \kappa \quad \kappa > 0$$

- αν κ αρνητικός τότε

$$a < b \iff a \cdot \kappa > b \cdot \kappa \quad \kappa < 0$$

⚠️ αλλάζουμε φορά

- αν a, b ομόσημοι τότε

$$a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

⚠️ αντιστρέφουμε και αλλάζουμε φορά

$$a < b \iff a^{2n+1} < b^{2n+1}$$

• Αν a και b είναι μη αρνητικοί αριθμοί και n θετικός ακέραιος:

$$a < b \iff a^n < b^n$$

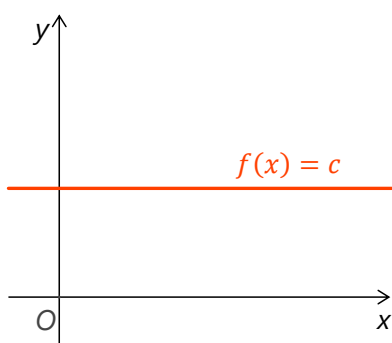
$$a < b \iff \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

Βασικές Γραφικές παραστάσεις

Η έννοια της συνάρτησης είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη γραφική της παράσταση και η σύνδεση αυτή πρέπει να αναδεικνύεται σε κάθε ευκαιρία, διότι υποστηρίζει την κατανόηση των χαρακτηριστικών της συνάρτησης.

Σταθερή Συνάρτηση

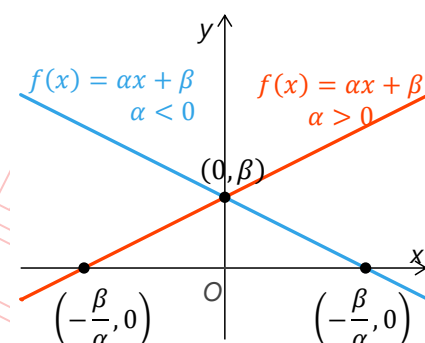
$$f(x) = c$$



- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών: $\{c\}$
- y' -τομή: $(0, c)$
- f σταθερή, ούτε $\nearrow$, ούτε $\searrow$

Συνάρτηση Ευθείας

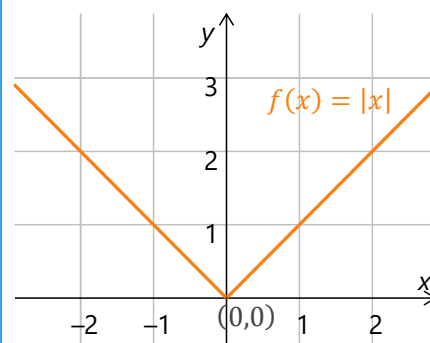
$$f(x) = ax + \beta$$



- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών: $(-\infty, +\infty)$
- $f \nearrow$ αν $a > 0$
- $f \searrow$ αν $a < 0$

Συνάρτηση Απόλυτη Τιμή

$$f(x) = |x|$$



- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών: $[0, +\infty)$
- $f \searrow$ στο $(-\infty, 0]$
- $f \nearrow$ στο $[0, +\infty)$
- f : άρτια
- Συμμετρία ως προς y -άξονα

Δευτεροβάθμια Συνάρτηση

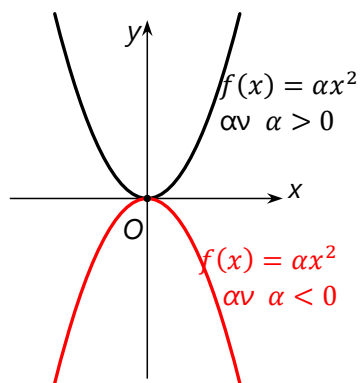
$$f(x) = ax^2$$

Κυβική Συνάρτηση

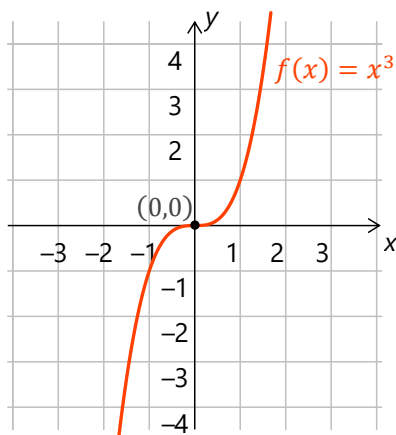
$$f(x) = x^3$$

Ρητή Συνάρτηση

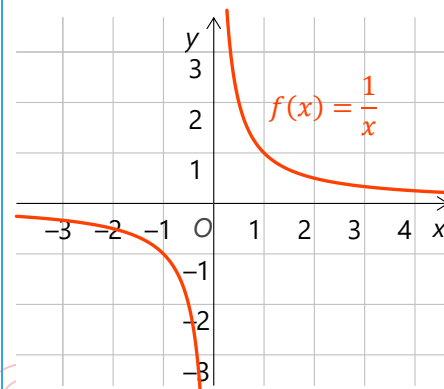
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών: $[0, +\infty)$ αν $\alpha > 0$
- Σύνολο Τιμών: $(-\infty, 0]$ αν $\alpha < 0$
- $f \searrow$ στο $(-\infty, 0]$ αν $\alpha > 0$
- $f \nearrow$ στο $[0, +\infty)$ αν $\alpha > 0$
- Ολικό Ελάχιστο $(0,0)$ αν $\alpha > 0$
- $f \nearrow$ στο $(-\infty, 0]$ αν $\alpha < 0$
- $f \searrow$ στο $[0, +\infty)$ αν $\alpha < 0$
- Ολικό Μέγιστο $(0,0)$ αν $\alpha < 0$
- f : άρτια
- Συμμετρία ως προς y -άξονα
- Η κορυφή: $(0,0)$



- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, +\infty)$
- Σύνολο Τιμών: $(-\infty, +\infty)$
- $f \nearrow$ στο $(-\infty, \infty)$
- f : περιττή
- Συμμετρία ως προς την Αρχή



- Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- Σύνολο Τιμών: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- $f \searrow$ στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$
- f : περιττή
- Συμμετρία ως προς την Αρχή
- Κατακόρυφη Ασύμπτωτη: y -άξονας
- Οριζόντια Ασύμπτωτη: x -άξονας