

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^{-x} + \lambda$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  την ευθεία  $y = 2$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 2$ .

**Μονάδες 3**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) - x = 0$  έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα  $(2, 3)$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

**B4.** Έστω  $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$ ,  $x > 2$ . Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x.$$

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Αν  $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ , με  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι '1-1' και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 8**

**B3.** Αν  $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ , με  $x > 1$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 6**

**B4.** Αν  $\varphi$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι  $f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να δείξετε ότι  $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 3**

**B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 6**

**B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

**Μονάδες 9**

**B4.** Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \lambda$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$  και η συνάρτηση  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \sqrt{x}$ .

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Αν  $h(x) = (x-1)^2$ ,  $x \in [0, 1]$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι "1-1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $h^{-1}$  της  $h$  (μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

**B3.** Έστω  $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, 1]$ .

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση: } \varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x} & , \quad x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & , \quad x=1 \end{cases}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση  $\varphi$  ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο  $[0, 1]$ . (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$ , όπου  $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . (μονάδες 4)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$  και η συνάρτηση  $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $h(x) = \ln x$ .

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f = g \circ h$ .

**Μονάδες 5**

Έστω  $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}$ ,  $x > 0$ .

**B2.** i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι  $\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$  (μονάδες 4).

**Μονάδες 8**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1 + x^2)}{f(x)}$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

και  $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

**B1.** Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις  $f = \frac{g}{h}$  και  $r = g \cdot h$ .

**Μονάδες 6**

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1 \quad \text{και} \quad r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1.$$

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι  $f^{-1} = f$  (μονάδες 5), όπου  $f^{-1}$  είναι η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $r$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Να λύσετε την εξίσωση  $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$ .

**Μονάδες 6**