

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει η σχέση:

$$f(g(x)) = 3x - 4, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.

β. Να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$.

γ. Αν γνωρίζετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα, να λύσετε την ανίσωση: $g(\ln x) < g(-x + 1)$

δ. Αν η $g(x)$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι και η f είναι 1-1. (Μη θεωρήσετε δεδομένη τη μονοτονία της f από το γ ερώτημα).

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $(f \circ f)(x) = f(x) + 3 - x, x \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε το $f(3)$.

β. Να αποδείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι γνήσια φθίνουσα.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(6 - f(|x - 2| - 1)) = 3$

δ. Να αποδείξετε ότι: $f(x) + f^{-1}(x) = x + 3$

3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = x^3 + ax + 4$, όπου η γραφική παράσταση της $f \circ f$ τέμνει τον yy' στο σημείο με τεταγμένη 80.

α. Να αποδείξετε ότι $a=3$.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f(9 - x^2) + x - 2) - f(x + 2) = 0$

δ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(|x| - 1) - 18) < f^{-1}(80)$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους: $f(x) = e^x + \frac{1 - e^x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 5\sin x - 4, x \in [0, \pi]$

α. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ έχει ελάχιστη τιμή το 1.

β. Να βρείτε τη μονοτονία της $g(x)$ και να λύσετε την εξίσωση $g(x)=1$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{e^x + e^{-x} + 3}{5} = \sin x$

δ. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{|x|-1} + e^{1-|x|} = 2$

5. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$e^{f(1)} + 2f(1) - 1 = 0 \text{ και } \ln(f(2)) + 3f(2) - 3 = 0.$$

α. Να υπολογίσετε τα $f(1)$ και $f(2)$.

β. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x)$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(\ln x + x) < 0$

6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $g(x) = x - 4\sqrt{x} + 4, x \in [0, 4]$

α. Να βρείτε την $(g \circ g)(x)$.

β. Να βρείτε την συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση: $(g \circ f)(x) = 2x - 1$

γ. Αν για μια συνάρτηση $h(x)$ ισχύει ότι $(g \circ h)(x) = x$, μπορούμε να πούμε ότι $h(x)=g(x)$;

7. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε ότι: $(f \circ f)(x) = x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι: $f^{-1}(x) = f(x) + 2$

γ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει την ευθεία $y=x$.

δ) Αν η f είναι γνήσια αύξουσα, να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=x$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x, \quad x \in [1, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Έχει ακρότατο;

β) Να βρείτε την f^{-1} και να κατασκευάσετε στο ίδιο σχήμα τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} .

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 2x - \sqrt{x+1} = 1$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6, \quad x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $x^3 - \sqrt[3]{x+6} = 6, \quad x \in \mathbb{R}$.

γ) να λύσετε την ανίσωση: $f(|x| - 15) < -33$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{2\}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να βρείτε - αν υπάρχουν - τα σημεία τομής της f^{-1} με τους άξονες.

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}\left(\frac{6-2e}{e-2} + f(\ln x)\right) = 1$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x-2}{x-3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{3\}$

α) Να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $(f \circ f)^2(\ln x) - (f \circ f)(\ln x) - 2 < 0$

γ) Να βρείτε συνάρτηση g τέτοια ώστε: $f(g(x)) = x + 2$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x} - e^{x-1} - 1, \quad x \in (0, +\infty)$

α) Να βρείτε τη μονοτονία της f και να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

β) Να βρείτε το $f^{-1}(-e)$, καθώς και τη μονοτονία της f^{-1} .

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(x) = x + 1$

δ) Να λύσετε την εξίσωση:
$$\frac{\sqrt{1+3x^2} - \sqrt{x^2+4}}{(1+\sqrt{1+3x^2}) \cdot (1+\sqrt{x^2+4})} = \frac{e^{\sqrt{x^2+4}} - e^{\sqrt{1+3x^2}}}{2}$$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + e^{x-2} - 3, \quad x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και να βρείτε το $f^{-1}(0)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(\ln 2x) < 2$

δ) Να λυθεί η εξίσωση: $f(1 + f^{-1}(x - 2)) = 0$

ε) Να λυθεί η εξίσωση: $|x| - x^2 = e^{x^2-2} - e^{|x|} - 2$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, $g(x) = \frac{1-e^x}{1+x}$

α) Να ελέγξετε αν $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = (g \circ f)(\ln x)$ στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $h(\ln x) + h(x) - 1 = 0$.

γ) Να βρείτε συνάρτηση $t(x)$ τέτοια ώστε: $f(t(x)) = g(f(\ln x))$

15. Να επινοήσετε κατάλληλες συναρτήσεις, να τις μελετήσετε ως προς την μονοτονία και με τη βοήθειά τους να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $(2x^2 + 3) - 3(x^2 + x + 5) < (x^2 + x + 5)^3 - 3(2x^2 + 3)$

β) $e^{x^2} + \ln(x^2 + 2) < e^{\sqrt{x}} + \ln(\sqrt{x} + 2)$

16. α) Να λυθεί η ανίσωση: $(2x - 1)^2 < \ln\left(\frac{1 + e^{4x}}{1 + e^{4x^2}}\right) + 1$

β) Αν γνωρίζετε ότι η f είναι γνήσια μονότονη, να βρείτε το είδος της μονοτονίας της ώστε να ισχύει η σχέση: $f(x^2 + 1) + f(e) > f(2x) + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.