

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

2018, 2019

Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x)$$

- Το γράμμα x παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A και λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το γράμμα y , που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.
→ Το πεδίο ορισμού A της f συμβολίζεται με D_f .

2. Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το A .

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y / y = f(x), x \in A\}$

3. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης;

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται με C_f .

4. Πως προκύπτει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $-f$, $|f|$ με βοήθεια της γραφικής παράστασης της f ;

Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$.

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

2007, 2012, 2016, 2021, 2023

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

6. Πως ορίζονται οι πράξεις των συναρτήσεων;

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Το πεδίο ορισμού των $f + g$, $f - g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$,

εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

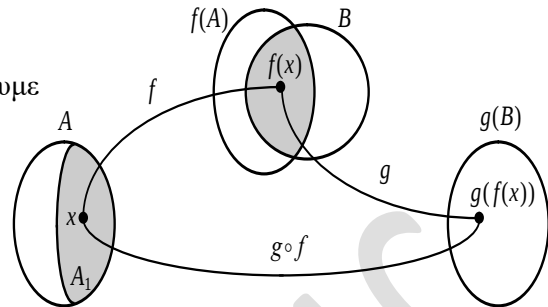
7. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ;

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.



ΣΧΟΛΙΑ

- Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

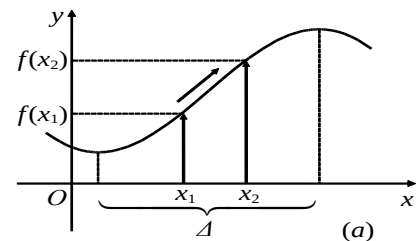
Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$.

Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

8. Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα και πότε γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται:

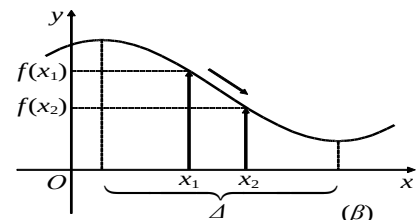
- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)



- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. β)

Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ , γράφουμε $f \nearrow \Delta$

(αντιστοίχως $f \searrow \Delta$). Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

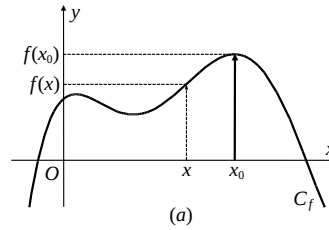


9. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο και πότε ελάχιστο;

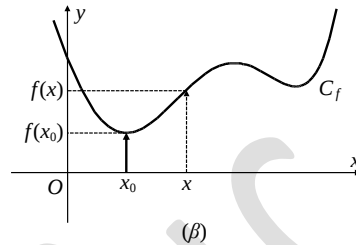
2014, 2010

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. α)



- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. β).

**10. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1;**

1987, 2005, 2015

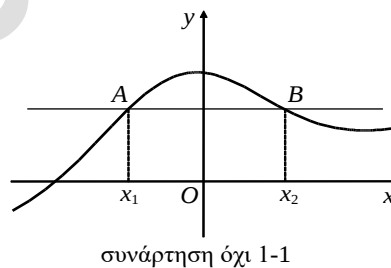
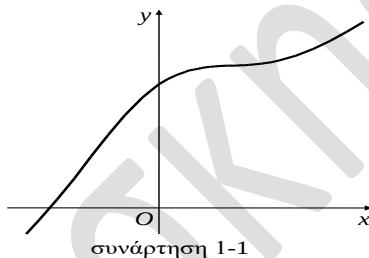
Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

ΣΧΟΛΙΑ

- Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν:
 - Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
 - Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.



- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση 1-1.

11. Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας συνάρτησης f και τι γνωρίζεται για τις γραφικές τους παραστάσεις;

2019

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου

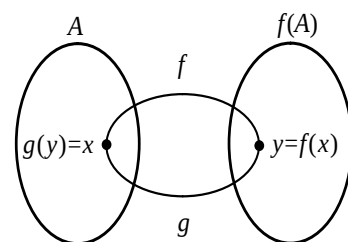
ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια

συνάρτηση $g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$

αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
- ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.



Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f . Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

οπότε $f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A).$

12. Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία όμως αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$, δηλαδή την $y = x$.

ΟΡΙΟ –ΣΥΝΕΧΕΙΑ

→ Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$,

τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$

→ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$

→ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$

→ $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

13. Ποια θεωρήματα ισχύουν για το όριο και τη διάταξη;

Για το όριο και τη διάταξη ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

14. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ορίων;

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.

5. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$
6. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 .
7. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v$, $v \in \mathbb{N}^*$

15. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έστω $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \\ &\quad \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + \alpha_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 \lim_{x \rightarrow x_0} x + \alpha_0 = \\ &\quad \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 = P(x_0) \end{aligned}$$

16. Να αποδείξετε ότι για τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$, με $Q(x_0) \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

17. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

2016, 2020, 2021

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell, \text{ τότε και } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

18. Ποια είναι τα βασικά τριγωνομετρικά όρια στο $x_0 \in \mathbb{R}$;

1. $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$)
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ 3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$ 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

19. Πως ορίζεται το όριο της σύνθεσης $f \circ g$ δύο συναρτήσεων f, g στο σημείο x_0 ;

Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0 , εργαζόμαστε ως εξής:

- Θέτουμε $u = g(x)$.
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ , δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$$

20. Ποιες είναι οι ιδιότητες του μη πεπερασμένου ορίου $x_0 \in \mathbb{R}$;

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$

Συνέπειες

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty, \nu \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \nu \in \mathbb{N}^*$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty, \nu \in \mathbb{N}^*$,

Δηλαδή δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \frac{1}{x^{2\nu+1}}, \nu \in \mathbb{N}^*$,

21. Ποια είναι τα όρια πολωνυμικής και ρητής συνάρτησης στο ∞ ;

- Για την πολωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_\nu \neq 0$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$
- Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}, \alpha_\nu \neq 0, \beta_\mu \neq 0$, ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu} \right)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu} \right)$

22. Ποια είναι τα όρια της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού τους;

- Αν $a > 1$, τότε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$
- Αν $0 < a < 1$, τότε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$

23. Τι ονομάζεται ακολουθία;

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

24. Πότε η ακολουθία (α_n) έχει όριο $\ell \in \mathbb{R}$;

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_n) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει $|\alpha_n - \ell| < \varepsilon$.

25. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της;

2015, 2009, 1986, 1983

Έστω μια συνάρτηση f και ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 , όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

26. Πότε μια συνάρτηση θα λέμε ότι είναι συνεχής;

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέμε ότι είναι συνεχής συνάρτηση.

27. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο (α, β) ;

2004

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .

28. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$;

2008, 2012, 2004, 2017, 2021

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

29. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε ποιες άλλες συναρτήσεις που ορίζονται μέσω των f, g είναι συνεχείς στο x_0 ;

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$f + g, \quad c \cdot f, \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R}, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f| \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{f}$$

Επιπλέον αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

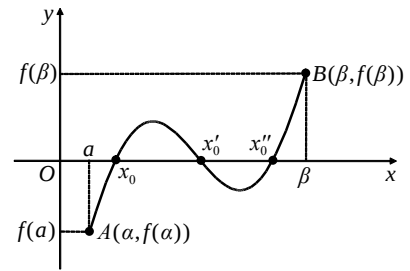
30. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να «δώσετε» την γεωμετρική του ερμηνεία.

2003, 2014, 2020

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

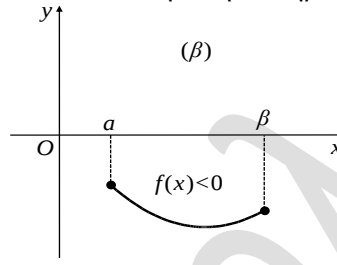
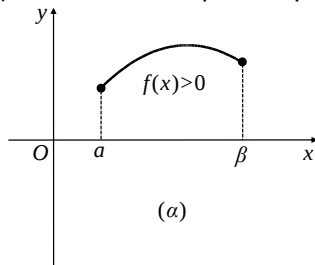
Γεωμετρική ερμηνεία

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[a, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x' , η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

**ΣΧΟΛΙΟ**

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

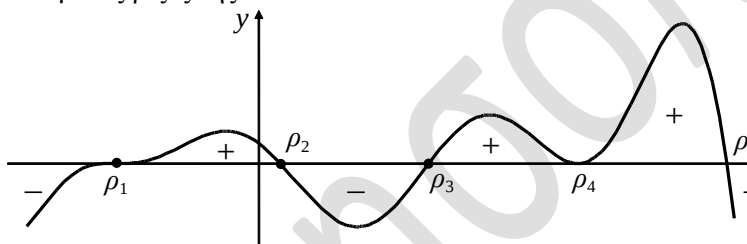


- Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του πρόσημου της f για τις διάφορες τιμές του x .

Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

- α)** Βρίσκουμε τις ρίζες της f .



- β)** Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

31. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, να το αποδείξετε και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία. 1995, 2005, 2015, 2020

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(a) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

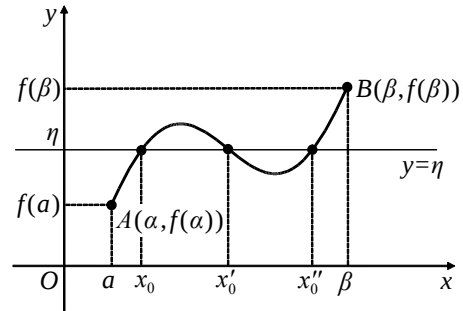
$g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [a, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $g(a)g(\beta) < 0$, αφού $g(a) = f(a) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$. Επομένως, σύμφωνα με το

θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και τα ακριανά σημεία βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος τότε κάθε οριζόντια ευθεία $y = \eta$ με $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο.



32. Ποια είναι η εικόνα ενός διαστήματος Δ μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης;

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

33. Να διατυπώσετε για μια συνεχής συνάρτηση το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της. Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) όπου

$$A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) .

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

34. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

2000

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ . Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$, όπου $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

35. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
2004, 2009

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο

x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Παρατήρηση

- Αν θέσουμε $x = x_0 + h$ τότε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
- Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$ οπότε $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$.

36. Πότε ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ;

Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} > 0$, οπότε είναι

$v(t_0) \geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} < 0$, οπότε είναι $v(t_0) \leq 0$.

37. Πως ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ;

Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = s(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή $v(t_0) = s'(t_0)$.

38. Τι ονομάζεται κλίση της f στο x_0 και ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x_0 ;

Κλίση της f στο x_0 ή συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο x_0 , ονομάζεται το $f'(x_0)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

39. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

2023, 2022, 2018, 2013, 2007, 2003, 2000, 1999

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

40. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της A ;

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

41. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

42. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

2023, 2020, 2013, 2010

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι

παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$.

43. Ποια συνάρτηση ονομάζεται πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης f ;
Πως ορίζεται η νιοστή παράγωγος μιας συνάρτησης f με $n \geq 3$;

2020

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$,

$x \rightarrow f'(x)$, η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f .

Η νιοστή παράγωγος της f με $n \geq 3$ συμβολίζεται με $f^{(n)}$ και είναι: $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$.

44. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0. \text{ Επομένως, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0, \text{ δηλαδή } (c)' = 0.$$

45. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1. \text{ Επομένως, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1, \text{ δηλαδή } (x)' = 1.$$

46. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$, δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$.

1998

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1} \text{ δηλαδή}$$

$$(x^v)' = vx^{v-1}.$$

47. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2005, 2009

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \text{ δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Στο $x_0 = 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

48. Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in A$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

2023, 2020, 1989, 1985

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \text{ Επειδή οι}$$

συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0), \text{ Δηλαδή}$$

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Γενίκευση: $(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_k'(x)$

49. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

Η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Σημείωση

Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ τότε $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Το προηγούμενο θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι για τις τρεις συναρτήσεις ισχύει: $(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

50. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

Η $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ τότε $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

51. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -vx^{-v-1}$, δηλαδή $(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$.

Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε: $(x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v}\right)' = \frac{(1)'x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}$.

52. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

53. Πότε η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και πότε σε ένα διάστημα Δ ;

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.
Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.
Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u)u'$.

54. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,
 $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

55. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$, δηλαδή $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$

Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,
 $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha$.

56. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει
$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$
2008

— αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ
— αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$.
Επομένως, $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ και άρα $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

57. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 ;

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

58. Τι ονομάζεται οριακό κόστος παραγωγής x_0 μονάδων ενός προϊόντος;

Αν K είναι το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0 .

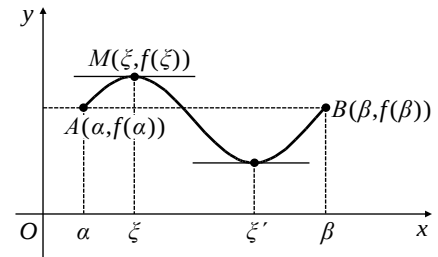
59. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

2007, 2012, 2020, 2021

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$.

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η

εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .

**60. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.**

2022, 2019, 2016, 2013, 2008, 2003

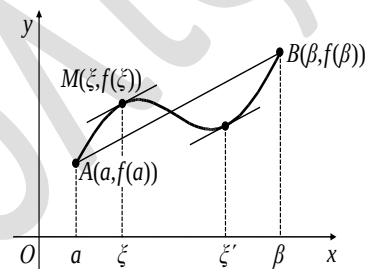
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .

**61. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν**

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι:
η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

2021, 2014, 2009, 2004, 1996, 1994, 1989, 1987

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε
$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

62. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

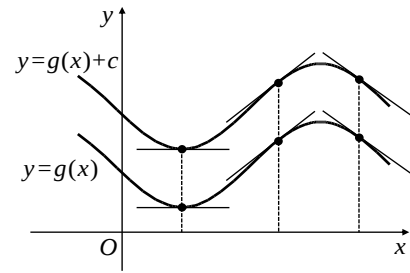
- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε

εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



63. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

2023, 2021, 2019, 2017, 2012, 1996

- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ οπότε έχουμε } f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

64. α) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

2012 2020

β) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

2015

α) Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .

β) Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f .

- Τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της f λέγονται τοπικά ακρότατα αυτής.

65. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.

2011, 2004, 2013, 2016, 2017, 2019, 2022, 2023

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1)

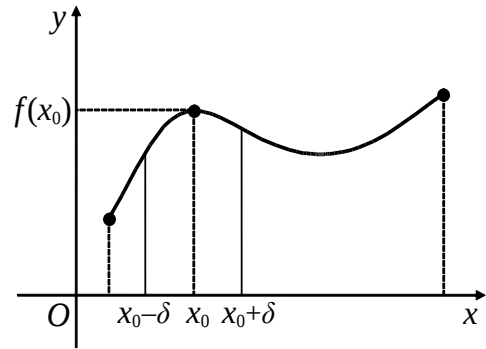
Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \text{ Επομένως,}$$

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ οπότε θα έχουμε}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$



— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

66. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα;

2013

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

67. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση

ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

2020, 2019, 2016, 1986

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$. (2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

68. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

2014, 2018

Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως

αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

69. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και τότε προς τα κάτω;

2006, 2010, 2014

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

70. Με βάση ποιο θεώρημα εξετάζουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης f ; Ισχύει το αντίστροφό του; Δώστε παράδειγμα.

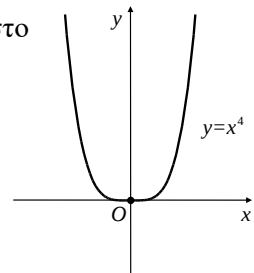
Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$f(x) = x^4$. Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$

είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η f'' δεν είναι θετική στο 0 αφού $f''(0) = 0$.



71. Ποια είναι η σχετική θέση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με μία εφαπτομένη της με βάση τη κυρτότητα της συνάρτησης f ;

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται “κάτω” (αντιστοίχως “πάνω”) από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



72. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

73. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής;

Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της, τότε ποια σχέση ισχύει για τη δεύτερη παράγωγο της f στο x_0 ;

Πότε ένα σημείο είναι βέβαιο σημείο καμπής;

2017

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

- i) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και
- ii) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
 - ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$
- τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

74. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ;

2010, 2003, 2015, 2020, 2022

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

75. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

2007, 2016, 2023

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

76. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, (αντιστοίχως στο $-\infty$);

2005, 2011, 2022

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

Θεώρημα: Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$ αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι:

— Οι πολωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

— Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του

βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

- Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
- Στο $+\infty, -\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty, a)$.

77. Να διατυπώσετε τους κανόνες De L' Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty, x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

78. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ; 2006, 2011, 2014, 2019

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

79. Να αποδείξετε ότι:

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε

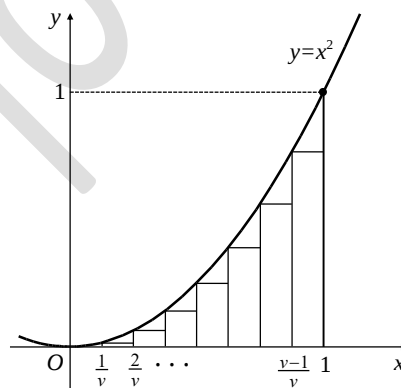
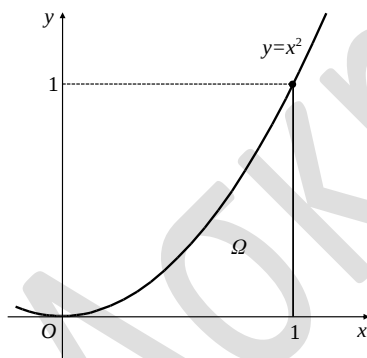
- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

2022, 2015, 2010, 2003, 2001, 1998

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

80. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ είναι $E(\Omega) = \frac{1}{3}$.



Μια μέθοδος να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι η εξής:

Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε v ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{1}{v}$, με άκρα τα σημεία:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{v}, \quad x_2 = \frac{2}{v}, \dots, x_{v-1} = \frac{v-1}{v}, \quad x_v = \frac{v}{v} = 1.$$

- Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά. Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα, ε_v , των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το:

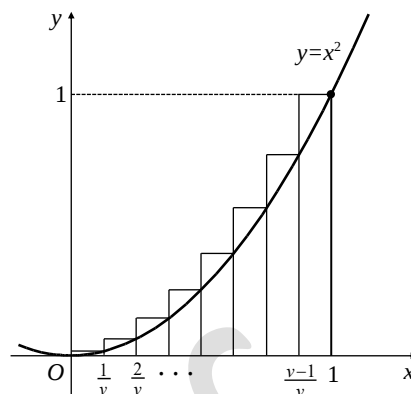
$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= f(0) \frac{1}{v} + f\left(\frac{1}{v}\right) \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v-1}{v}\right) \frac{1}{v} \\ &= \frac{1}{v} \left[0^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v-1}{v}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{v^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (v-1)^2] = \frac{1}{v^3} \frac{(v-1) \cdot v(2v-1)}{6} = \frac{2v^2 - 3v + 1}{6v^2}.$$

- Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της f σε καθένα απ' αυτά (Σχ. 7), τότε το άθροισμα

$$E_v = f\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right)\frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right)\frac{1}{v}$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Είναι όμως,



$$E_v = f\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right)\frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right)\frac{1}{v} = \frac{1}{v} \left[\left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v}{v}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{v^3} (1^2 + 2^2 + \dots + v^2) = \frac{1}{v^3} \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} = \frac{2v^2 + 3v + 1}{6v^2}.$$

Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν E βρίσκεται μεταξύ των ε_v και E_v . Δηλαδή ισχύει

$$\varepsilon_v \leq E \leq E_v, \text{ οπότε } \lim_{v \rightarrow \infty} \varepsilon_v \leq E \leq \lim_{v \rightarrow \infty} E_v. \text{ Επειδή } \lim_{v \rightarrow \infty} \varepsilon_v = \lim_{v \rightarrow \infty} E_v = \frac{1}{3}, \text{ έχουμε } E = \frac{1}{3}.$$

81. Να δώσετε τον ορισμό του εμβαδού χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με $f(x) \geq 0$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε ως εξής:

- Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε v ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{v}$, με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v = \beta$.

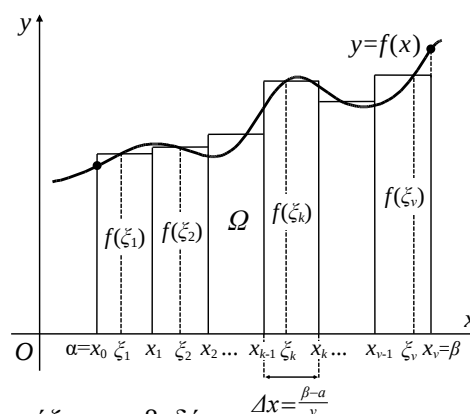
- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_k)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

$$S_v = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_v)]\Delta x$$

- Υπολογίζουμε το $\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι

ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k . Το όριο αυτό ονομάζεται εμβαδόν επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \geq 0$.



82. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$.

Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v = \beta$

χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε v ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{v}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, v\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_v = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_k)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x$ το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_v = \sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \quad (1) \text{ .Αποδεικνύεται ότι,}$$

“Το όριο του αθροίσματος S_v , δηλαδή το

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \right) \quad (1) \text{ υπάρχει στο } \mathbb{R} \text{ και είναι}$$

ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k ”.

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β , συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το

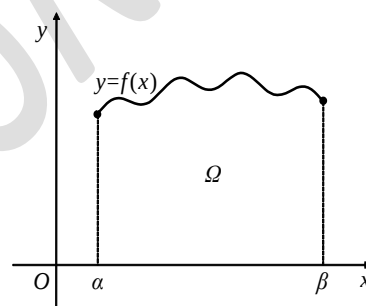
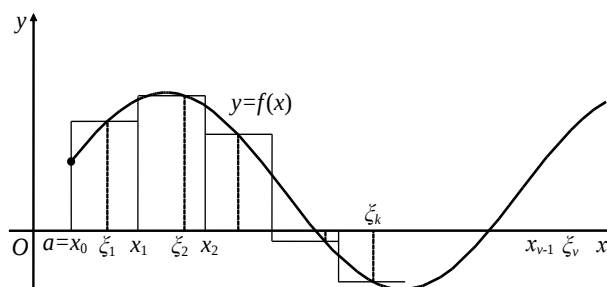
α στο β ”. Δηλαδή, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \right)$.

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Δηλαδή, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = E(\Omega)$.

Επομένως Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$



83. Ποιες οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος;

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ και γενικά
- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

84. Ποιος είναι ο τύπος της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης;

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx \text{ όπου } f', g' \text{ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο } [\alpha, \beta].$$

85. Ποιος είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής;

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(b)$.

86. Αν f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και a ένα σημείο του Δ , να

γράψετε τι γνωρίζετε για την συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Η συνάρτηση F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , δηλαδή

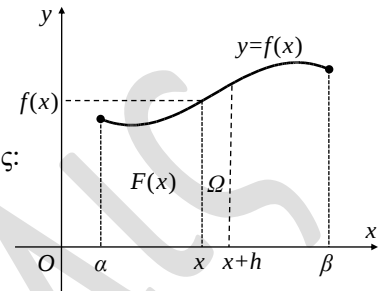
$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = \text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega \approx f(x) \cdot h, \text{ για}$$

μικρά $h > 0$. Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$, οπότε

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$



87. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού και να το αποδείξετε.

2002, 2013, 2008, 2018

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$,

τότε: $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. (1)

Από την (1), για $x = a$, έχουμε $G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(a)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(a)$ οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

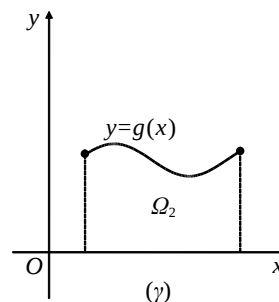
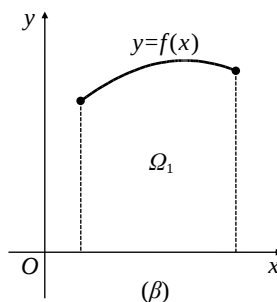
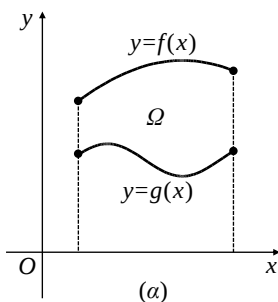
$$G(\beta) = F(\beta) + G(a) = \int_a^\beta f(t)dt + G(a) \text{ και άρα } \int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a).$$

88. Έστω, δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[a, \beta]$ με

$f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου

Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g , και τις ευθείες

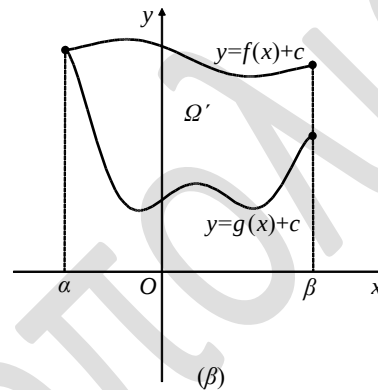
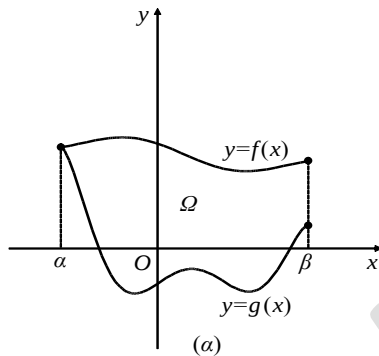
$x = a$ και $x = \beta$ είναι: $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx$



Παρατηρούμε ότι $E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$. Επομένως,
 $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$.

89. Έστω, δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \leq f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g , και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι: $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$.

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω'



Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε

$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_a^\beta [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx. \text{ Άρα } E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx.$$

90. Έστω, μια συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι: $E(\Omega) = -\int_a^\beta g(x) dx$.

Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx = \int_a^\beta [-g(x)] dx = -\int_a^\beta g(x) dx$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$,

τότε $E(\Omega) = -\int_a^\beta g(x) dx$

