

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Πεδίο ορισμού

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^3 - 5x + 6$

ii) $f(x) = 2x^2 - 7x + 13$

iii) $f(x) = \frac{x-1}{2x-8}$

iv) $f(x) = \frac{3x+2}{12+4x}$

v) $f(x) = \sqrt{3x+6}$

vi) $f(x) = \sqrt{10-5x}$

2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x-1}{2} + \frac{2x+5}{3}$

ii) $f(x) = x + \frac{1}{x^2-4}$

iii) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x}$

iv) $f(x) = \frac{2x-1}{2x^2+8x}$

v) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+3x-4}$

vi) $f(x) = \frac{x-5}{x^2+2x+3}$

3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{x}{x+3}$

ii) $f(x) = \frac{3x}{x^2-3x-10}$

iii) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+3x-4} - \frac{4}{x-3}$

iv) $f(x) = \frac{5-x}{4x^2-9} + \frac{x-3}{x^2+4x+3}$

v) $f(x) = \frac{7x-13}{x^2+5x} - \frac{21}{x^2-2x-3}$

vi) $f(x) = \frac{2x}{x^2+2x-3} + \frac{3x-1}{4x^2-4x+1}$

4. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+8}$

ii) $f(x) = \frac{x-1}{x^3-9x}$

iii) $f(x) = \frac{2x+7}{x^3-4x^2+4x}$

iv) $f(x) = \frac{5x-12}{x^3+x^2+x}$

v) $f(x) = \frac{x-5}{x^4-27x}$

vi) $f(x) = \frac{x+2}{16x^6-x^2}$

5. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x+21}{x^4-3x^2-4}$

ii) $f(x) = \frac{13-5x}{x^2-4|x|}$

iii) $f(x) = \frac{x^2-25}{2x^2-5|x|-3}$

iv) $f(x) = \frac{7-x}{x^2-7|x|+10}$

v) $f(x) = \frac{1}{x^2+4|x|+3}$

vi) $f(x) = \frac{x-3}{x^6+7x^3-8}$

6. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{9-3x}$

ii) $f(x) = \sqrt{4x+20}$

iii) $f(x) = \sqrt{|x|-6}$

iv) $f(x) = \sqrt{2-|x|}$

v) $f(x) = \sqrt{|x-2|+1}$

vi) $f(x) = \sqrt{|x+3|-2}$

7. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{14-2x}}$

ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+18}}$

iii) $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{|x|-5}}$

iv) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{3-|x|}}$

v) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{|2x-3|-5}}$

vi) $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{7-|2x+1|}}$

8. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{1}{2x-6} + \sqrt{x+2}$

ii) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{4-x}}$

iii) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{4-x}}$

iv) $f(x) = \frac{\sqrt{10-2|x|}}{x^2+3x}$

v) $f(x) = \frac{\sqrt{7-|2x-3|}}{|x-1|-2}$

vi) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \sqrt{2-|x|}$

9. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$

ii) $f(x) = \sqrt{-x^2-2x+8}$

iii) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+5}$

iv) $f(x) = \sqrt{x^2-6x+9}$

v) $f(x) = \sqrt{-x^2+2x-1}$

vi) $f(x) = \sqrt{-x^2+3x-4}$

10. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{-x^2+4x+12}$

ii) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x-2-x+5}}{\sqrt{-x^2-x+12}}$

iii) $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2-2x+3-x}}{\sqrt{x^2+2x+1}}$

iv) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{-x^2+x+12}$

11. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-2}$

ii) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x-2} - \sqrt{4-x}$

iii) $f(x) = \sqrt{|x|-2} + \sqrt{6-|x|}$

iv) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{|x^2-3x|+|x^2-9|}$

v) $f(x) = \frac{1}{x^2-2x} - \frac{\sqrt{x+6}}{x^2-9}$

vi) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \sqrt{5-|x|}$

12. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x-3}{x(|x|-2)(x^2-16)}$

ii) $f(x) = \frac{x^2-3x}{(|x+1|-3)(x^2-5x)(x^2-2|x|)}$

iii) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{(|x|-1)(x^2+2x)(x^2-9)}$

iv) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{8-x}}{(x^2+5x+6)(|x-3|-2)}$

13. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x^2+x-6)}$

ii) $f(x) = \sqrt{(x^2-4)(x^2-2x-3)}$

$$\text{iii)} f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)(x^2-2x+3)}{x^2+x-6}}$$

$$\text{iv)} f(x) = \sqrt{\frac{-x^2+4x+5}{(x-2)(x^2-6x+9)}}$$

14. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i)} f(x) = \frac{1}{|x|-x}$$

$$\text{ii)} f(x) = \frac{1}{|x|+x}$$

$$\text{iii)} f(x) = \sqrt{|x|-x}$$

$$\text{iv)} f(x) = \sqrt{x-|x|}$$

$$\text{v)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$$

$$\text{vi)} f(x) = \sqrt{|x|+x}$$

15. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i)} f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$\text{ii)} f(x) = \sqrt{-2x+3}$$

$$\text{iii)} f(x) = \sqrt{x^2-9}$$

16. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i)} f(x) = \sqrt{|x|-2}$$

$$\text{ii)} f(x) = \sqrt{x^2}$$

$$\text{iii)} f(x) = \sqrt{1-|x|}$$

17. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i)} \frac{3}{x^2-4}$$

$$\text{ii)} \frac{x^2-5}{x^2-5x}$$

$$\text{iii)} \frac{-2}{x^2+1}$$

$$\text{iv)} \frac{3}{|x|}$$

18. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i)} \frac{-2}{|x|-1}$$

$$\text{ii)} \frac{x+3}{x+|x|}$$

$$\text{iii)} \frac{3x-1}{|x-2|-3}$$

$$\text{iv)} \frac{x-1}{|x-3|+5}$$

19. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i)} \frac{-2x}{|x-1|-|3x+1|}$$

$$\text{ii)} \frac{2}{x} + \sqrt{x-1}$$

$$\text{iii)} \frac{x-1}{x+2} - \sqrt{x+3}$$

$$\text{iv)} \frac{3}{x-1} + \frac{x-1}{x+2}$$

20. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i)} \sqrt{|x|-2} + \frac{x-1}{3x-1}$$

$$\text{ii)} \sqrt{|x|+1} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{4}{|x|-2}$$

$$\text{iii)} \frac{4x-1}{|x|-2} + \sqrt{x-5}$$

21. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$\text{i)} f(x) = \sqrt{-x}$$

$$\text{ii)} g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$\text{iii)} h(x) = \sqrt{1-3x}$$

$$\text{iv)} k(x) = \sqrt{x^2}$$

$$\text{v)} s(x) = (\sqrt{x})^2$$

22. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$\text{i)} a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{ii)} \beta(x) = \frac{2x}{2x^2+3}$$

$$\text{iii)} \gamma(x) = \frac{3x^2}{x^2-2x}$$

$$\text{iv)} \delta(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x-1}}$$

$$\text{v)} \varepsilon(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2-x}}$$

23. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \sqrt{5x+3}$$

$$\text{ii) } f(x) = \sqrt{3 - \frac{x}{2}}$$

$$\text{iii) } f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$\text{iv) } f(x) = \sqrt{|x|+2}$$

$$\text{v) } f(x) = \sqrt{|x|+x}$$

24. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$\text{i) } f(x) = \frac{x}{3x+2}$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{5x+1}{x^2-5x}$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{x+5}{7x^2-x-6}$$

$$\text{iv) } f(x) = \frac{5x+1}{x^4-16}$$

$$\text{v) } f(x) = \frac{3x+1}{x^2+1}$$

$$\text{vi) } f(x) = \frac{5x+1}{|x|-2}$$

25. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{x}{|x|-3} + \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{3x}{x^2-49} - \frac{5}{x^3+1}$$

$$\text{iv) } f(x) = \sqrt{5-3x} + \frac{1}{x^2-4}$$

26. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$\text{i) } f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

$$\text{ii) } g(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-2}$$

$$\text{iii) } h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt[3]{x-1}$$

$$\text{iv) } k(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x+1}$$

$$\text{v) } s(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{vi) } t(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

27. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \sqrt{1-2x}$$

$$\text{ii) } f(x) = \sqrt{|x|-1}$$

$$\text{iii) } f(x) = \sqrt{|x|-x}$$

28. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \frac{3x+1}{x^2-1}$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{2}{5x^2-x-4}$$

$$\text{iii) } f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$$

29. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x} - \frac{1}{x-2}$$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{x-2}$$

$$\text{iii) } f(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

30. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$\text{i) } f(x) = \frac{|x|}{x-|x|}$$

$$\text{ii) } g(x) = \frac{2x+3}{|x|+1}$$

$$\text{iii) } h(x) = \frac{x}{3|x|-1}$$

$$\text{iv) } k(x) = \frac{x-1}{|x|+x}$$

$$\text{v) } s(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{|x-2|}}$$

$$\text{vi) } t(x) = \frac{\sqrt{|x-1|}}{3}$$

31. Να βρείτε το πεδίο ορισμού καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις :

$$\text{i) } f(x) = \frac{1}{x^3-x}$$

$$\text{ii) } g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\text{iii) } h(x) = \frac{1}{x-3} - \sqrt{x+1}$$

$$\text{iv)} k(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$$

$$\text{v)} a(x) = \frac{x}{3|x|-1}$$

$$\text{vi)} l(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}$$

32. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i)} f(x) = \sqrt{x-2}$$

$$\text{ii)} f(x) = \sqrt{4-3x}$$

$$\text{iii)} f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+4}$$

$$\text{iv)} f(x) = \frac{2}{x^2-1} + 4$$

$$\text{v)} f(x) = \frac{x+1}{x^3-4x}$$

$$\text{vi)} f(x) = \frac{2}{|x|-1} + 4$$

$$\text{vii)} f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x^2-1}$$

$$\text{viii)} f(x) = \begin{cases} x^3 & , \text{αν } x < 0 \\ 2x+3 & , \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

33. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i)} f(x) = \frac{x+2}{x^3-x}$$

$$\text{ii)} f(x) = \frac{3x-1}{x^5-x}$$

$$\text{iii)} f(x) = \frac{2x+1}{|x|+2}$$

$$\text{iv)} f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x^4-2x+1}$$

$$\text{v)} f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}$$

$$\text{vi)} f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1}$$

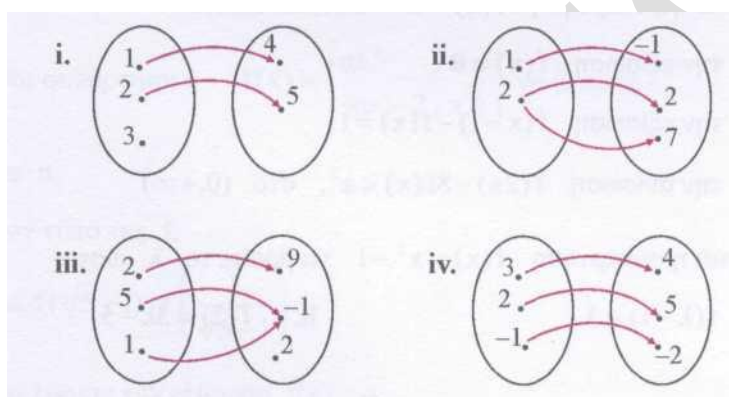
$$\text{vii)} f(x) = \begin{cases} 3x-1 & , x \in [0,6] \\ -x+2 & , x \in [6,7] \end{cases}$$

$$\text{viii)} f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \in [-3,3] \\ x-3 & , x \notin [-3,3] \end{cases}$$

$$\text{ix)} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$$

Τιμές συνάρτησης

34. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω βελοδιαγράμματα παριστάνουν συνάρτηση:

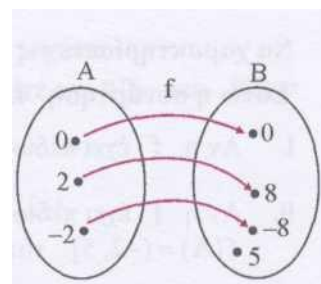


1. Έστω η συνάρτηση f που παριστάνεται με το διπλανό βελοδιάγραμμα. Να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της f .

ii) τα $f(2)$, $f(0)$.

iii) το σύνολο τιμών της f



35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii) Να βρείτε τις τιμές

α) $f(0)$, β) $f(-1)$, γ) $f(4)$,

δ) $f(5)$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -6$

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$.

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii) Να βρείτε τις τιμές

α) $f(6)$, β) $f(11)$, γ) $f\left(\frac{41}{16}\right)$, δ) $f(1)$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x^2+7, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$.

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii) Να βρείτε τις τιμές

α) $f(-3)$, β) $f\left(\frac{5}{2}\right)$, γ) $f(-1)$,
δ) $f(0)$, ε) $f\left(\frac{1}{2}\right)$, στ) $f(-\sqrt{3})$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{αν } x < 1 \\ -x+3, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$.

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii) Να διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις τιμές

α) $f(-1)$, β) $f(5)$, γ) $f\left(\frac{1}{2}\right)$, δ) $f(2)$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{αν } x < -2 \\ 4, & \text{αν } -2 \leq x < 1 \\ 3-x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$.

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii) Να βρείτε τις τιμές

α) $f(-4)$, β) $f(-2)$, γ) $f(-\sqrt{2})$, δ) $f(1)$, ε) $f(3)$,
στ) $f(3-\sqrt{3})$, ζ) $f(f(0))$, η) $f(f(-3))$, θ) $f(f(6))$

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 1, & \text{αν } x \text{ αρρητός} \end{cases}$.

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii) Να βρείτε τις τιμές

α) $f(0)$, β) $f(\sqrt{3})$, γ) $f\left(\frac{-3}{2}\right)$,
δ) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, ε) $f\left(\sqrt{\frac{25}{4}}\right)$, στ) $f(-\sqrt{5})$

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 6x, & \text{αν } |x| \leq 1 \\ x^2, & \text{αν } |x| > 1 \end{cases}$.

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii) Να βρείτε τις τιμές :

α) $f(0)$, β) $f(-1)$, γ) $f(-2)$, δ) $f(\sqrt{2})$, ε) $f\left(\frac{1}{2}\right)$,

στ) $f\left(\frac{-2}{3}\right)$ ζ) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ η) $f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ θ) $f(\sqrt{5}-1)$

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$.

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii) Να βρείτε τις τιμές :

α) $f(-2)$, β) $f(-1)$, γ) $f(0)$,
δ) $f(3)$, ε) $f(f(1))$, στ) $f(f(5))$

iii) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $f(2\alpha)$ β) $f(\alpha^2)$ γ) $f\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ δ) $f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta)$

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3x^2 + 2x$.

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii) Να βρείτε τις τιμές :

α) $f(-2)$, β) $f(-1)$, γ) $f(0)$, δ) $f\left(\frac{2}{3}\right)$,

iii) Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta) - 2(f(\alpha) + f(\beta))$

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x-1) + f(x) = -1$

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii) Να βρείτε τις τιμές :

α) $f(-2)$, β) $f(5)$, γ) $f(0)$,

iii) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $f(-3\alpha)$ β) $f(2\alpha^2)$ γ) $f(\alpha - \beta)$

iv) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 2$

v) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x+2) + f(x) \leq 22$

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - |x-1|$.

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης : $A = f(3) - f(-1)$

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 2$

iv) Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής

v) Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(4)) \cdot x^2 + f(-6) \cdot x + f(10) \geq 0$

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 16}{2x^2 + 8x}$.

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

iii) Να βρείτε τις τιμές :

α) $f(2)$, β) $f(4)$, γ) $f(-4)$ και δ) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

iv) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) \geq 0$

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x - 1$. Να υπολογίσετε τα $f(0)$, $f(-\sqrt{2})$, $f(a+1)$, $f(2x)$, $f(f(0))$.

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \alpha \nu \ x \leq 0 \\ -x + 1, & \alpha \nu \ x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε τα $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(2)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \alpha \nu \ x \in \mathbb{Z} \\ -2, & \alpha \nu \ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$. Να βρείτε τα $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$, $f(-2)$ και $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4$. Να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$, τα οποία μέσω της f αντιστοιχούν στον αριθμό 5.

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2, & x < 0 \\ x - 3, & x \geq 0 \end{cases}$. Να υπολογιστούν οι τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.

52. Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$. Να υπολογιστούν οι τιμές:

i) $f(\alpha + \beta)$, ii) $f(\alpha^2)$, iii) $f(2\alpha)$, iv) $f(3\alpha^2 + 1)$

53. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 0 \\ \alpha x + 3, & 0 \leq x < 3 \\ \beta x^2 + 2, & x \geq 3 \end{cases}$. Να βρεθούν τα α , β αν είναι $f(-1) = f(1)$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \alpha \nu \ x \geq 0 \\ -x^2, & \alpha \nu \ x < 0 \end{cases}$. Υπολογίστε το $f(-2) - 2f(-2)$ και $f(\alpha^2) + f(\beta^2) - 2f(-3)$.

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \alpha \nu \ x \in (-\infty, 1] \\ 3x - 1, & \alpha \nu \ x \in (1, +\infty) \end{cases}$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
ii) Να βρείτε τα $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(1)$, $f(\pi)$

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - 1, & \alpha \nu \ -2 < x < 0 \\ \alpha x^3 + \beta, & \alpha \nu \ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
ii) Να βρείτε τα α , β ώστε $f(-1) = 2$ και $f(1) = 3$.

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x - 1, & \alpha \nu \ x \leq 1 \\ \alpha x^2, & \alpha \nu \ x \geq 1 \end{cases}$

- i) Να βρείτε το α .

- ii) Να βρείτε την f .
 iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε:

- i) την εξίσωση $f(x) = -2$
 ii) την ανίσωση $f(2x) - f(x+1) < 3x^2$

59. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τη μορφή: $f(\dots) = 2 \cdot (\dots)^2 - 3 \cdot (\dots) + 2$ να βρείτε τα $f(-2)$ και $f(0)$

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - x - 1$. Να υπολογίσετε τα: $f(0)$, $f(1)$, $f(1 - \sqrt{2})$, $f(t-2)$, $f(3x^2)$, $f(-x)$.

61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - 1$.

- i) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{f(3) - f(-1)}{4}$

β) $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

- ii) Να λυθεί η εξίσωση: $x^6 - f(1) - f(30) = f(3)$

- iii) Να βρείτε το a ώστε: $f(a^2) = 2$

62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x$. Να λύσετε:

- i) την εξίσωση $f(x) = 0$
 ii) την εξίσωση $f(x-1) - f(x) = 1$
 iii) ανίσωση $f(2x) - 8f(x) < x^2$, στο $(0, +\infty)$

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$ να βρείτε το λ ώστε:

- i) $f(\lambda - 1) = 3$ ii. $f(2) = 3\lambda - 5$

64. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \in (-\infty, 2) \\ 2, & x \in [2, 5) \\ x^2 - 1, & x \in [5, 10) \end{cases}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

- ii) Να βρείτε αν υπάρχουν τα: $f(-1)$, $f(5 + \sqrt{2})$, $f(3)$, $f(12)$

- iii) Να λύσετε την εξίσωση: $x^{f(2)} + 3f(0) = 0$

65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{2} - 1, & x \leq 1 \\ ax^4 - \beta, & x > 1 \end{cases}$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

- ii) Να βρείτε τα α , β ώστε: $f(0) + f(1) = 0$ και $f(2) = 64$.

- iii) Για $\alpha = 4$ και $\beta = 0$ να λύσετε την εξίσωση: $|f(-1) - x| = f\left(\frac{3}{2}\right)$

66. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τους αριθμούς $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(-2)$, $f(-\sqrt{2})$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f(1)$

67. Αν είναι συνάρτηση η $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 1 \\ 3ax - 2, & x \geq 1 \end{cases}$ να βρείτε:

iv) το a ,

v) τον τύπο της f ,

vi) τα $f(\sqrt{5} - 1)$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)$

vii) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$.

68. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3ax + 1, & x \leq -1 \\ \beta x^3 + \sqrt{x+2}, & x \geq -1 \end{cases}$. Αν $f(2) = 10$, να βρείτε τα a και β .

Προσδιορισμός παραμέτρου

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + a$ για την οποία ισχύει $f(4) = 6$

i) Να βρείτε τον αριθμό a

ii) Να βρείτε τις τιμές $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$ και $f(2)$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 12$

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 6$

70. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax - \sqrt{x+3}$ για την οποία ισχύει $f(6) = 9$

i) Να βρείτε τον αριθμό a και το πεδίο ορισμού της f

ii) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$ και $f(13)$

71. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax - \sqrt{x+3}$ για την οποία ισχύει $f(6) = 9$

i) Να βρείτε τον αριθμό a και το πεδίο ορισμού της f

ii) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$ και $f(13)$

72. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax-3}{|x-1|-2}$ για την οποία ισχύει $f(2) = -1$

i) Να βρείτε τον αριθμό a και το πεδίο ορισμού της f

ii) Να βρείτε τις τιμές $f(4)$ και $f(-6)$

73. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+a}{x^3+3x-4}$ για την οποία ισχύει $f(-5) = -2$

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f

ii) Να βρείτε τον αριθμό a

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$

74. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax+5, & \text{αν } x \leq 2 \\ x^2 + \beta x, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ για την οποία ισχύει $f(-1) = 3$ και $f(5) = 10$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς a και β

ii) Να βρείτε τις τιμές $f\left(-\frac{5}{2}\right)$, $f(2)$, $f(3)$ και $f(4)$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $|f(1) \cdot x - f(f(1))| + f(-20) = 0$

75. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x + 3$ για την οποία ισχύει $f(2) + f(5) = 7$.

- Να βρείτε την τιμή του αριθμού λ
- Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 8 και -2 ανήκουν στο σύνολο τιμών της f
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 15$

76. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + a$ για την οποία ισχύει $f(-3) = 6$.

- Να βρείτε τον αριθμό a
- Θεωρούμε αριθμό β για τον οποίο ισχύει : $f(\beta - \sqrt{3}) = f(\beta + \sqrt{3}) + 4\sqrt{12}$
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x+\beta) + f(x-4) \leq \beta$.

77. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ για την οποία ισχύει $f(0) = 6$ και $f(-2) = 2$.

- Να βρείτε τους αριθμούς α και β
- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{f(2\kappa + \lambda) - f(\kappa + 2\lambda)}{\kappa - \lambda}$
- Να λύσετε την ανίσωση $\frac{2f(x)}{x^2 + 5x} \leq f(f(-5))$.

78. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & , \alpha \nu \ x \geq 2 \\ ax - 8 & , \alpha \nu \ x \leq 2 \end{cases}$ για την οποία ισχύει $f(-1) = 3$ και $f(5) = 10$.

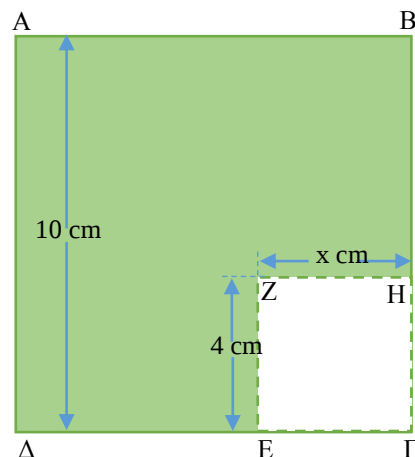
Να βρείτε τον αριθμό a .

Προσδιορισμός τύπου συνάρτησης

79. Η εκτύπωση ευχετηρίων καρτών συμπεριλαμβάνει σταθερή χρέωση 0,90€ καθώς και 0,20€ για κάθε κάρτα που τυπώνεται. Σύμφωνα με τα παραπάνω ,να βρείτε τη συνάρτηση που αποδίδει κάθε φορά το κόστος της εκτύπωσης σε σχέση με τον αριθμό των καρτών.

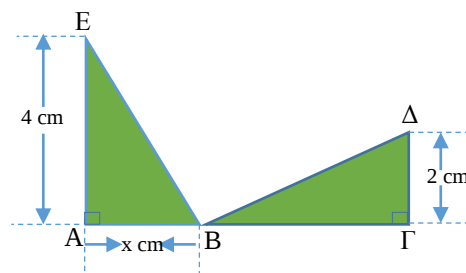
80. Από ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 10cm κόβουμε ένα κομμάτι ΓΕΖΗ σχήματος ορθογωνίου ,με διαστάσεις 4cm και x cm , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- Να εκφράσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου σαν συνάρτηση του x
- να βρείτε το x , ώστε το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου να είναι 68 cm^2 .



81. Στο επόμενο σχήμα είναι $AE = 4 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 2 \text{ cm}$, ενώ το τμήμα ΑΓ έχει μήκος 8 cm και το σημείο Β κινείται πάνω σ' αυτό. Να εκφράσετε σαν συνάρτηση του x :

- το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου
- Το μήκος $EB + B\Delta$



82. Σε μια κοινότητα όλοι οι καταναλωτές νερού πληρώνουν 6 € πάγιο κάθε μήνα ,ανεξαρτήτως αν καταναλώνουν ή όχι νερό .Για τα πρώτα 12 m³ νερού πληρώνουν 0,60€/ m³ .Για κάθε m³ επιπλέον από τα 12 m³ πληρώνουν 0,80€/ m³ .Να βρεθεί συνάρτηση $y=f(x)$ που να δίνει το κόστος (y) του νερού ,αν σε έναν μήνα καταναλωθούν x m³ νερό.

Αποδεικτικές ασκήσεις

83. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2|x-1| - |x+2|$. Να γραφεί ο τύπος χωρίς τη χρήση απολύτων τιμών.

84. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-5| - 2|x|}{3|x|}$. Να γραφεί ο τύπος χωρίς τη χρήση απολύτων τιμών

85. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x-5$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(\alpha + \beta) - f(\alpha) = f(\beta) + 5$

ii) $f(\alpha^2) + f(\beta^2) \geq 2f(\alpha\beta)$

86. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3x+2$. Να αποδείξετε ότι: $f(2\alpha) + f(4\beta) = 2f(\alpha + 2\beta)$

87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta) = 2[f(\alpha) + f(\beta)]$

ii) $2f(\alpha) + 8f(\beta) - f(\alpha + 2\beta) \geq 0$

88. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x$. Να αποδείξετε ότι: $f(2\alpha) + f(2\beta) \geq 2f(\alpha + \beta)$.

89. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $\alpha \neq 0$. Να δείξετε ότι: $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$

90. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x$. Να αποδείξετε ότι: $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \geq 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$.

91. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$,
για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

92. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha < 0$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}$,
για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Συναρτησιακές σχέσεις

93. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(3x-2) = 5x-8-f(x+2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή $f(4)$.

94. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(-1)=6$ και η σχέση : $3f(x+1) = 2f(x)+3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(1)$.

95. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=-1$ και η σχέση : $f(2x+5) = 4x+\alpha$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- i) τον αριθμό α
- ii) τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης

96. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x+2) = 3f(2) - 2(x-3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- i) την τιμή $f(2)$
- ii) τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης

97. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(2x-1) = 4x^2 - 6x - f(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- i) την τιμή $f(3)$
- ii) τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης

98. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(3x-1) = 2x+3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(x)$.

99. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(\alpha) = 3$ και $f(f(\alpha)) = 7$, να βρείτε το $f(3)$.

100. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(1-x) = 2x - 6 - f(1997)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i) να βρείτε το $f(1997)$
- ii) να βρείτε τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης.

101. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+1) = 4x - 5 - 2f(3)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i) να βρείτε το $f(3)$
- ii) να βρείτε τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης.

102. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i) $f(1) = 0$
- ii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, για κάθε $x \neq 0$.

103. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $3f(x) - f(1-x) = x-1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $f(0)$ και $f(1)$.

104. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση: $f(\alpha \cdot \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- i. Να εκφράσετε συναρτήσει του $f(\alpha)$ τους αριθμούς: $f(\alpha^2)$, $f(\alpha^3)$, $f(\sqrt{\alpha})$.
- ii. Να δείξετε ότι $f(1) = 0$
- iii. Να εκφράσετε συναρτήσει του $f(\alpha)$ το $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$
- iv. Αν $f(10)=1$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(100)$, $f(0,1)$, $f(1000)$, $f(\sqrt{10})$

105. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $xf(x+2) + (x+2)f(2x+1) = x^2 + x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3,1)$.

106. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $(x-1)f(x) + xf(x-1) = x^2 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

107. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Συνδυαστικά θέματα

108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - a|x|}{|x| - 3}$ για την οποία ισχύει $f(2)=2$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να βρείτε τον αριθμό a
- iii) Να γράψετε τον τύπο $f(x)$ με πιο απλή μορφή
- iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 5$.

109. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 6|x| + a}{x^2 - 9}$ για την οποία ισχύει $f(5) = \frac{1}{4}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να βρείτε τον αριθμό a
- iii) Να γράψετε τον τύπο $f(x)$ με πιο απλή μορφή
- iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$
- v) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \frac{1}{3}$

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + a|x| + 1}{|x| - 1}$ για την οποία ισχύει $f(-3)=2$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να βρείτε τον αριθμό a
- iii) Να γράψετε τον τύπο $f(x)$ με πιο απλή μορφή
- iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq f(-2)$

111. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax - \sqrt{x-2}$ για την οποία ισχύει $f(11)-f(6)=14$.

- ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να βρείτε τον αριθμό a
- iii) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{17}{f(2)-f(4)}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή

112. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{(x-2)^2} + 1$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να γράψετε τον τύπο $f(x)$ με πιο απλή μορφή
- iii) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

113. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - |x|}$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii) Να απλοποιηθεί ο τύπος της f .
- iii) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$.

114. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$

- i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A της f .
- ii) Να απλοποιηθεί ο τύπος της f .
- iii) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 3$.

115. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 2|x|}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

ii) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = \frac{1}{2}$.

iii) Να βρείτε το $f(-\sqrt{3})$ με ρητό παρονομαστή.

116. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + (6 - \lambda)x + \lambda$ για την οποία ισχύει $f(\lambda) = 14$.

i) Να βρείτε τον αριθμό λ.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $-1 \leq f(x) \leq 7$.

iii) Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β, να αποδείξετε ότι ισχύει $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$, αν και μόνο αν οι α και β είναι αντίστροφοι.

117. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + \lambda x - 8$ για την οποία ισχύει $f(f(-1)) = 55$.

i) Να βρείτε τον αριθμό λ.

ii) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της f(x) για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $K = f(2011) \cdot f(0) \cdot f(-2012)$

iv) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} \leq 1$.

118. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 + \lambda|x| - \lambda - 1}{|x| - 1}$ για την οποία ισχύει $f(-4) = 7$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f και τον αριθμό λ.

ii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $f(x-4)$,

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x-4) \leq 5$.

119. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 2|x| + 1}{x^2 - 1}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

ii) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in A$, $f(x) = \frac{|x| - 1}{|x| + 1}$

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = \frac{1}{3}$

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 2^{-1}$

120. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta, & \alpha \nu x < 1 \\ 2x + \alpha, & \alpha \nu x \geq 1 \end{cases}$, για την οποία ισχύει $f(1) = -3$ και $f(f(2)) = 3$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $f(x) = 11$

iii) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + f(0) \cdot x - f(6) \leq f(f(-1))$

121. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x + \alpha, & \alpha \nu x \geq -2 \\ x^2 + \beta x + \alpha, & \alpha \nu x < -2 \end{cases}$, για την οποία ισχύει $f(-1) = -7$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -8$

iii) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{2}{f(-\sqrt{6}) + f(\sqrt{6})}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $x(x+1) \leq f(f(-6))$.

122. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x-4}, & \alpha \forall x \in [-10, 3) \\ x^2 - 2, & \alpha \forall x \in [3, 15] \end{cases}$. Οι αριθμοί $f(\sqrt{10})$ και $f(-4)$ είναι αντίστροφοι.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

ii) Να βρείτε τον αριθμό α

iii) Να γράψετε την τιμή $f(\sqrt{7})$ σαν κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

123. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & x < 2 \\ x^2 - 3, & x \geq 2 \end{cases}$

i) Να βρείτε το $f(\sqrt{3})$ και να το γράψετε με ρητό παρονομαστή.

ii) Να βρείτε το $f\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $a > 0$.

iii) Αν $f(f(2)) = \lambda^{2005}$, τότε να βρείτε το λ .

124. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \alpha \forall x \in (-5, -1) \\ x^2 - x, & \alpha \forall x \in [1, 4) \\ 4x - 12, & \alpha \forall x \in [4, 8) \end{cases}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $|f(5) - |x + f(0)|| = f(2)$

β) $x^2 + f(-1) \cdot |x| + f(3) = 0$

γ) $x^{f(4)} + [f(-4) + f(3)] \cdot x^2 + f(4) = f(1)$

125. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x}{x^2 + a}$ και η εξίσωση $x^2 - 3x + 1 = 0$ (1). Ισχύει: $f(\Delta) = \frac{1}{6}$, όπου Δ η

διακρίνουσα της εξίσωσης (1)

i) Να βρείτε τον αριθμό a και το πεδίο ορισμού A της f .

ii) Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού, που να έχει ρίζες τους αριθμούς: $f(x_1)$ και $f(x_2)$

126. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + \lambda x + \lambda - 5$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε για τις ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης $f(x) = 0$ να ισχύει: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}$

iii) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (ii), να λύσετε τις ανισώσεις

α) $f(x+2) + f(x) > -2$

β) $\frac{f(x-1)}{f(x)-2} \leq 1$

127. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \alpha \nu x \geq 1 \\ \beta x + 1, & \alpha \nu x < 1 \end{cases}$, για την οποία ισχύουν $f(-1)=3$ και $f(1)=1$.

- i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $: 3|f(x)| = 4x - 1$.

128. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & \alpha \nu x \leq 1 \\ \frac{x+a}{8}, & \alpha \nu x > 1 \end{cases}$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση :

$$x^2 + f(-1) \cdot x + f(75) = 0 \quad (1) \text{ έχει μοναδική ρίζα.}$$

- i) Να αποδείξετε ότι $a = -3$.
- ii) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν:
 $P(A \cap B) = f(4)$, $f(P(A)) = 0$ και $f(P(A \cup B)) = 1$. Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.