

Διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών στις συναρτήσεις

Θέμα Α

A1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

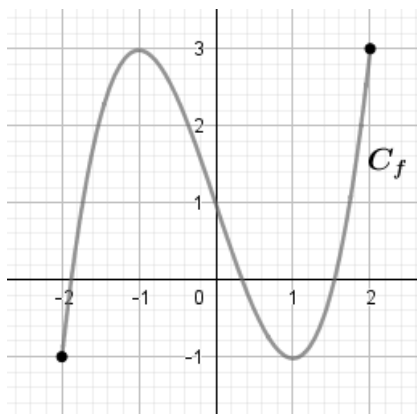
« Οποιαδήποτε καμπύλη κωνικής τομής δεν παριστάνει συνάρτηση »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

A2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



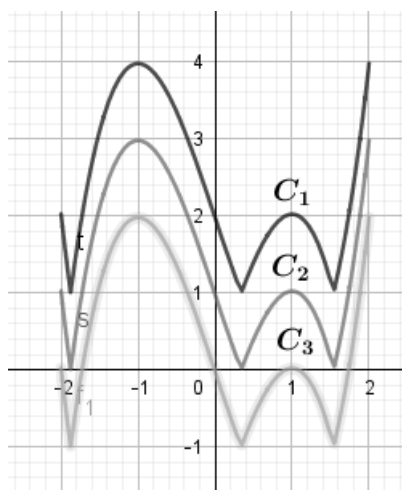
α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

β) Με βάση το σχήμα :

i. να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a , αν γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $f(x) = a$ έχει δύο ακριβώς λύσεις.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(f(1)) = 4 + f(f(0))$.



γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων.

Να βρείτε ποια από αυτές παριστάνει την γραφική παράσταση της $|f|$ και να βρείτε ποια σχέση έχουν οι άλλες δύο γραφικές παραστάσεις με αυτή. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

μονάδες 2+6+6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι συναρτήσεις $g \circ f, f \circ g$ τότε ισχύει πάντα $g \circ f \neq f \circ g$

- β) Μία πολωνυμική συνάρτηση πρώτου βαθμού είναι πάντα περιττή.
γ) Μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση είναι 1-1.

μονάδες 6

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(\ln x)$ και $g(x) = \ln x$.

B1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

B2. Να ορίσετε τη συνάρτηση $m(x) = f \circ g$ και να βρείτε τον τύπο της.

B3. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x)$.

B4. Δίνεται η συνάρτηση $k: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ισχύει $h(x) = k(x) + \ln k(x)$, όπου h η συνάρτηση του ερωτήματος B3, να δείξετε ότι οι συναρτήσεις k, g είναι ίσες.

μονάδες 2+9+8+6

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

- $f(g(x)) = 2x - 1$.
- $g(x) = x + 1$
- $g(h(x)) = x^3 + 2$

Γ1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Γ2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h .

Αν $f(x) = 2x - 3, h(x) = x^3 + 1$

Γ3. α) Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται

β) Να ορίσετε την h^{-1} και να βρείτε τον τύπο της.

Γ4. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης K , αν γνωρίζουμε ότι $2K(1-x) + K(x) = g(f(x))$.

μονάδες 6+6+7(2+5)+6

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\frac{f(x)}{e^x} \leq e^{x^3} \leq \frac{f(3x)}{e^{26x^3+3x}} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της f .

Αν $f(x) = e^{x^3+x}$:

Δ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε τους αριθμούς $f^{-1}(1)$ και $f^{-1}(e^{-2})$.

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x) + 2) \leq e^2$

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\eta\mu x) = \lambda, \lambda < 1$ δεν έχει πραγματικές λύσεις για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

μονάδες 7+6+6+6

Καλή τύχη!

Δημήτρης Πατσιμάς

Λύσεις

Θέμα Α

A1.α) Ψευδής

β) Η παραβολή $y = x^2$ παριστάνει συνάρτηση.

A2. α) $D_f = [-2, 2]$, $f(A) = [-1, 3]$

β) i. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2, -1]$, $[1, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$

ii. $\alpha = -1$ ή $\alpha = 3$.

iii. $f(f(1)) = f(-1) = 3$, $f(f(0)) = f(1) = -1$ άρα $f(f(1)) = 3 = 4 - 1 = 4 + f(f(0))$.

γ) Η C_3 είναι η γραφική παράσταση της $|f|$ αφού αποτελείται από τα σημεία της γραφικής παράστασης της f που δεν βρίσκονται κάτω από τον $x'x$ καθώς και από τα συμμετρικά σημεία της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον $x'x$. Οι C_1 , C_2 προκύπτουν από κατακόρυφη μετατόπιση της C_3 κατά δύο μονάδες, μία μονάδα προς τα πάνω αντίστοιχα.

Αν g η συνάρτηση που παριστάνει τη C_1 , η h η συνάρτηση που παριστάνει τη C_2 τότε $g(x) = |f(x)| + 2$ και $h(x) = |f(x)| + 1$.

A3. α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ

Θέμα Β

B1. Για να ορίζεται η f πρέπει: $x > 0$ και $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$ οπότε $D_f = (1, +\infty)$.

Για να ορίζεται η g πρέπει: $x > 0$, άρα $D_g = (0, +\infty)$.

B2. Για να ορίζεται η $f \circ g$ πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > \ln e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > e \end{cases} \Leftrightarrow x > e.$$

Επομένως η $m = f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού $D_m = D_{f \circ g} = (e, +\infty)$ και τύπο

$$m(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(\ln(\ln x)).$$

B3. Είναι $D_h = D_{f+g} = D_f \cap D_g = (1, +\infty)$ και $h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \ln(\ln(x)) + \ln x$.

Έστω $x_1, x_2 \in D_h$ με $x_1 < x_2$. Τότε :

$$\ln x_1 < \ln x_2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \ln(\ln x_1) < \ln(\ln x_2) \quad (2).$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε $h(x_1) < h(x_2)$ οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

B4. $h(x) = k(x) + \ln k(x) \Leftrightarrow h(x) = h(e^{k(x)}) \stackrel{h'}{\Leftrightarrow} x = e^{k(x)} \Leftrightarrow k(x) = \ln x = g(x), x > 1$. Άρα οι συναρτήσεις k, g είναι ίσες.

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $f(g(x)) = 2x - 1 \Leftrightarrow f(x+1) = 2x - 1$.

Αν θέσουμε όπου $x+1$ το x έχουμε $f(x) = 2(x-1) - 1 \Leftrightarrow f(x) = 2x - 2 - 1 \Leftrightarrow f(x) = 2x - 3$.

Γ2. Στον τύπο της g θέτουμε όπου x το $h(x)$ οπότε

$$g(h(x)) = h(x) + 1 \Leftrightarrow x^3 + 2 = h(x) + 1 \Leftrightarrow h(x) = x^3 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Γ3. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in D_h$ με $x_1 < x_2$ ισχύει :

$x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 + 1 < x_2^3 + 1 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

β) Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow x^3 + 1 = y \Leftrightarrow x^3 = y - 1$. (1)

Αν $y \geq 1$ τότε η (1) γίνεται: $x = \sqrt[3]{y-1}$.

Αν $y < 1$ τότε η (1) γίνεται: $x = -\sqrt[3]{-y+1}$.

$$\text{Άρα } f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y-1} & , y \geq 1 \\ -\sqrt[3]{-y+1} & , y < 1 \end{cases} \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt[3]{x}+1) & , x \geq 1 \\ \ln(1-\sqrt[3]{-x}) & , x < 1 \end{cases}.$$

Γ4. Είναι $g(f(x)) = f(x) + 1 \Leftrightarrow g(f(x)) = 2x - 3 + 1 \Leftrightarrow g(f(x)) = 2x - 2$.

Επομένως $2K(1-x) + K(x) = g(f(x)) \Leftrightarrow 2K(1-x) + K(x) = 2x - 2$ (Α).

αν θέσουμε στη σχέση (Α) όπου $1-x$ το x έχουμε :

$$2K(x) + K(1-x) = 2(1-x) - 2 \Leftrightarrow 2K(x) + K(1-x) = -2x \Leftrightarrow K(1-x) = -2x - 2K(x) \text{ (Γ)}.$$

Από τη σχέση (Γ) μέσω της (Α) έχουμε

$$2(-2x - 2K(x)) + K(x) = 2x - 2 \Leftrightarrow -4x - 4K(x) + K(x) = 2x - 2 \Leftrightarrow$$

$$-3K(x) = 6x - 2 \Leftrightarrow K(x) = -2x + \frac{2}{3}.$$

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $\frac{f(x)}{e^x} \leq e^{x^3} \Leftrightarrow f(x) \leq e^{x^3} \cdot e^x \Leftrightarrow f(x) \leq e^{x^3+x}$ (1).

Επίσης $e^{x^3} \leq \frac{f(3x)}{e^{26x^3+3x}} \Leftrightarrow f(3x) \geq e^{x^3} \cdot e^{26x^3+3x} \Leftrightarrow f(3x) \geq e^{27x^3+3x} \Leftrightarrow f(3x) \geq e^{(3x)^3+3x}$ (2).

Αν στη (2) θέσουμε όπου $3x$ το x έχουμε $f(x) \geq e^{x^3+x}$ (3).

Από τις σχέσεις (1),(3) προκύπτει $f(x) = e^{x^3+x}, x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ (Α) ισχύει :

$x_1^3 < x_2^3$ (Β). Με πρόσθεση των σχέσεων (Α) και (Β) έχουμε

$x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \Leftrightarrow e^{x_1^3+x_1} < e^{x_2^3+x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Είναι $f^{-1}(1) = \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(\alpha) = 1 \Leftrightarrow f(\alpha) = f(0) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} \alpha = 0$ οπότε :

$$f^{-1}(1) = 0.$$

$$\text{Επίσης } f^{-1}(e^{-2}) = \beta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(\beta) = e^{-2} \Leftrightarrow f(\beta) = f(-1) \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} \beta = -1 \text{ οπότε :}$$

$$f^{-1}(e^{-2}) = -1.$$

$$\Delta 3. \text{ Είναι } f(f^{-1}(x) + 2) \leq e^2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x) + 2) \leq f(1) \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x) + 2 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(x) \leq -1 \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x)) \leq f(-1) \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} x \leq \frac{1}{e^2}.$$

$$\Delta 4. \text{ Είναι } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \eta\mu x \leq 1 \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} f(0) \leq f(\eta\mu x) \leq f(1) \Leftrightarrow 1 \leq f(\eta\mu x) \leq e^2 \text{ οπότε } f(\eta\mu x) > \lambda \text{ για}$$

κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα η εξίσωση $f(\eta\mu x) = \lambda$ είναι αδύνατη.