

Αριθμητικά Συστήματα

1. Εισαγωγή

Όπως γνωρίζουμε, οι υπολογιστές χρησιμοποιούν το δυαδικό σύστημα για την αναπαράσταση των πληροφοριών (αριθμούς, γράμματα/χαρακτήρες). Οι άνθρωποι χρησιμοποιούν το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης για να εκφράσουν κάποιον αριθμό (η βάση είναι το 10).

Το δεκαδικό σύστημα είναι ένα σύστημα αρίθμησης αλλά όχι το μοναδικό. Κάθε αριθμητικό σύστημα για να παραστήσει τους αριθμούς χρησιμοποιεί ένα συγκεκριμένο αριθμό συμβόλων, που ονομάζονται ψηφία. Ο αριθμός αυτός λέγεται βάση του συστήματος και χαρακτηρίζει το αριθμητικό σύστημα ενώ επίσης από τον αριθμό αυτό προέρχεται και το όνομα του συστήματος.

Παραδείγματα:

- το δεκαδικό σύστημα έχει ως βάση τον αριθμό 10 και περιλαμβάνει τα ψηφία 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
- το οκταδικό σύστημα έχει ως βάση του το 8 και περιλαμβάνει 8 ψηφία (0-7).
- το δεκαεξαδικό σύστημα έχει ως βάση του τον αριθμό 16 και περιλαμβάνει τα 10 ψηφία του δεκαδικού ενώ τα υπόλοιπα 6 συμβολίζονται με A, B, C, D, E, F.
- το δυαδικό σύστημα έχει ως βάση τον αριθμό 2 και περιλαμβάνει τα ψηφία 0 και 1.

10-δικό	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2-δικό	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000
8-δικό	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17	20
16-δικό	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10

Πίνακας αντιστοιχίας αριθμητικών συστημάτων.

Κάθε αριθμός **A** ($a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0 a_{-1} a_{-2} \dots a_{m-1} a_m$) μπορεί να γραφεί σε ένα αριθμητικό σύστημα βάσης **k** ως εξής:

$$a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \dots + a_1 k^1 + a_0 k^0 + a_{-1} k^{-1} + a_{-2} k^{-2} + \dots + a_{m-1} k^{m-1} + a_m k^m$$

όπου n, m φυσικοί αριθμοί με $n \geq 1$ και $m \geq 0$

Παραδείγματα:

- ο πραγματικός αριθμός $567.824,93_{(10)}$ με βάση το 10 αναλύεται ως εξής:
$$5*10^5 + 6*10^4 + 7*10^3 + 8*10^2 + 2*10^1 + 4*10^0 + 9*10^{-1} + 3*10^{-2}$$
- ο ακέραιος αριθμός $8.678.902_{(10)}$ με βάση το 10 αναλύεται ως εξής:
$$8*10^6 + 6*10^5 + 7*10^4 + 8*10^3 + 9*10^2 + 0*10^1 + 2*10^0$$
- ο ακέραιος αριθμός $10111001_{(2)}$ με βάση το 2 αναλύεται ως εξής:
$$1*2^7 + 0*2^6 + 1*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0$$

και πρόκειται για τον $185_{(10)}$
- ο ακέραιος αριθμός $456123_{(8)}$ με βάση το 8 αναλύεται ως εξής:
$$4*8^5 + 5*8^4 + 6*8^3 + 1*8^2 + 2*8^1 + 3*8^0$$

και πρόκειται για τον $154707_{(10)}$
- ο ακέραιος αριθμός $25C53_{(16)}$ με βάση το 16 αναλύεται ως εξής ($C=12$):
$$2*16^4 + 5*16^3 + 12*16^2 + 5*16^1 + 3*16^0$$

και πρόκειται για τον $154707_{(10)}$

2. Μετατροπές Αριθμητικών Συστημάτων

Εδώ θα δούμε μερικούς τρόπους για να μετατρέψουμε αριθμούς που εκφράζονται στο 10-δικό σύστημα σε 2-δικούς αριθμούς και αντίστροφα. Θα ασχοληθούμε επίσης και με την μετατροπή των 8-δικών και των 16-δικών αριθμών σε αντίστοιχους 10-δικούς και 2-δικούς. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι 8-δικοί και οι 16-δικοί αριθμοί είναι πολύ εύκολες αναπαραστάσεις των 2-δικών αριθμών και χρησιμοποιούνται συχνότερα αντί αυτών.

2.1. Μετατροπή από οποιοδήποτε σύστημα σε δεκαδικό

Για τη μετατροπή ενός αριθμού από οποιοδήποτε σύστημα σε 10-δικό, εφαρμόζεται η παρακάτω μέθοδος. Έστω ο k -δικός αριθμός: $X_1X_2X_3...X_v_{(k)}$ (όπου k η βάση), τότε ο αντίστοιχος 10-δικός είναι:

$$X_1*k^{(v-1)} + X_2*k^{(v-2)} + X_3*k^{(v-3)} + \dots + X_{(v-1)}*k^1 + X_v*k^0$$

Παραδείγματα:

- ο 16-δικός $3AC1_{(16)}$ είναι ο 10-δικός $15041_{(10)}$:
$$3*16^3 + 10*16^2 + 12*16^1 + 1*16^0 = 15041_{(10)}$$
- ο δυαδικός 101100 είναι ο 10-δικός $44_{(10)}$:
$$1*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 0*2^0 = 44_{(10)}$$

2.2. Μετατροπή 16-δικού σε 2-δικό

Όπως παρατηρούμε από τον πίνακα αντιστοιχίας αριθμητικών συστημάτων σε κάθε 16-δικό ψηφίο αντιστοιχούν τέσσερα δυαδικά. Η μέθοδος λοιπόν είναι η ανάλυση κάθε 16-δικού ψηφίου σε τέσσερα 2-δικά.

Παράδειγμα:

- για τον 16-δικό αριθμό $4A5D_{(16)}$ έχουμε:

16-δικό ψηφίο	2-δικό ψηφίο
4	0100
A	1010
5	0101
D	1101

ο αντίστοιχος δυαδικός λοιπόν αριθμός είναι ο:

$0100101001011101_{(2)}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: διατηρούνται τα μηδέν στη αρχή κάθε τετράδας.

2.3. Μετατροπή 2-δικού σε 16-δικό

Για να μετατρέψουμε τώρα ένα 2-δικό αριθμό σε 16-δικό εφαρμόζουμε το αντίστροφο. Δηλαδή μετατρέπουμε τέσσερα 2-δικά ψηφία σε ένα 16-δικό ψηφίο, ξεκινώντας από το τέλος.

Παράδειγμα:

- Έστω ο 2-δικός αριθμός $10010000111010111_{(2)}$. Τον αναλύουμε σε τετράδες αρχίζοντας από το τέλος:

$1 - 0010 - 0001 - 1101 - 0111$

Σε κάθε τετράδα τώρα αντιστοιχεί ένα 16-δικό ψηφίο:

2-δικό ψηφίο	16-δικό ψηφίο
1	1
0010	2
0001	1
1101	D
0111	7

Οπότε, ο ζητούμενος 16-δικός είναι ο $121D7_{(16)}$

2.4. Μετατροπή 8-δικού αριθμού σε 2-δικό

Δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως με την διαφορά ότι τώρα έχουμε να κάνουμε με τριάδες αντί για τετράδες. Η μέθοδος λοιπόν είναι η ανάλυση κάθε 8-δικού ψηφίου σε τρία 2-δικά.

Παράδειγμα:

- Μετατροπή του 8-δικού $64752_{(8)}$ σε δυαδικό, έχουμε:

8-δικό ψηφίο	2-δικό ψηφίο
6	110
4	100
7	111
5	101
2	010

Οπότε, ο δυαδικός αριθμός είναι:

$110100111101010_{(2)}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: διατηρούνται τα μηδέν στη αρχή κάθε τριάδας.

2.5. Μετατροπή 2-δικού αριθμού σε 8-δικό

Για να μετατρέψουμε τώρα ένα 2-δικό αριθμό σε 8-δικό εφαρμόζουμε το αντίστροφο. Δηλαδή μετατρέπουμε τρία 2-δικά ψηφία σε ένα 8-δικό ψηφίο, ξεκινώντας από το τέλος.

Παράδειγμα:

- Έστω ο δυαδικός αριθμός $110100111101010_{(2)}$. Τον αναλύουμε σε τριάδες αρχίζοντας από το τέλος:

$110 - 100 - 111 - 101 - 010$

Σε κάθε τριάδα τώρα αντιστοιχεί ένα 8-δικό ψηφίο:

2-δικό ψηφίο	8-δικό ψηφίο
110	6
100	4
111	7
101	5
010	2

Οπότε, ο ζητούμενος 8-δικός είναι ο $64752_{(8)}$.

2.6. Μετατροπή 10-δικού αριθμού δε 2-δικό

Η μετατροπή ενός 10-δικού αριθμού σε δυαδικό γίνεται με τη μέθοδο της συνεχούς διαίρεσης του δεκαδικού αριθμού με το 2 έως ότου το πηλίκο γίνει 0. Ο ζητούμενος 2-δικός αριθμός είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων αρχίζοντας αντίθετα.

Παράδειγμα:

- για τον αριθμό $78_{(10)}$

Αριθμός	Μετά τη διαίρεση με το 2 (ακέραιο μέρος)	Μετά τη διαίρεση με το 2 (υπόλοιπο)
78	39	0
39	19	1
19	9	1
9	4	1
4	2	0
2	1	0
1	0	1

Οπότε, ο αντίστοιχος δυαδικός είναι: $1001110_{(2)}$

3. Πράξεις στο δυαδικό σύστημα

Οι πράξεις στο δυαδικό σύστημα γίνονται με παρόμοιο τρόπο όπως στο δεκαδικό σύστημα. Οι κανόνες όμως φυσικά αλλάζουν. Για παράδειγμα στην πρόσθεση έχουμε:

στο 10-δικό	στο 2-δικό
$0 + 0 = 0$	$0 + 0 = 0$
$1 + 0 = 1$	$1 + 0 = 1$
$0 + 1 = 1$	$0 + 1 = 1$
$1 + 1 = 2$	$1 + 1 = 10$

Παραδείγματα:

$2 + 1 = 3$	$10 + 1 = 11$
$3 + 1 = 4$	$11 + 1 = 100$
$\begin{array}{r} 69 \\ + 15 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1000101 \\ + 1111 \\ \hline 1010100 \end{array}$