

1. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

2. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_1x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

3. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0) \neq 0$

4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$.

(α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Αληθή ή Ψευδή.

(β') Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη θα υπάρχουν και τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

(α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Αληθή ή Ψευδή.

(β') Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

6. Τι ονομάζεται ακολουθία.

7. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστές ή Λανθασμένες:

(α') $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$.

(β') Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$.

(γ') Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

(δ') Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και $f(x) < g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 , ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

(ε') Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

(ς') Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

(ζ') Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

(η') Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 με $k \in \mathbb{N}$ και $k > 2$.

(θ') Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ι') Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

(ια') Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

(ιβ') Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

(ιγ') Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

(ιδ') Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.

(ιε') Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

(ις') Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

(ιζ') Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

(ιη') Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

(ιθ') $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^{2\nu+1}} \right) = +\infty$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

(κ') Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^{2\nu}} \right) = -\infty$.

(κα') Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$

$$(\kappa\beta') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\nu\nu x - 1}{x} = 1$$

$$(\kappa\gamma') \text{ Ισχύει } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - l) = 0.$$

$$(\kappa\delta') \text{ Έστω μια συνάρτηση } f \text{ που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής } (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta). \\ \text{Ισχύει η ισοδυναμία: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

$$(\kappa\epsilon') \text{ Αν } 0 < \alpha < 1, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty.$$

$$(\kappa\zeta') \text{ Αν } 0 < \alpha < 1, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0.$$

$$(\kappa\eta') \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty.$$

$$(\kappa\theta') \text{ Ισχύει ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1.$$

$$(\kappa\iota') \text{ Ισχύει ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$$

$$(\lambda') \text{ Ισχύει ότι } |\eta\mu x| \leq |x| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda\alpha') \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\nu\nu x}{x} = 1.$$

$$(\lambda\beta') \text{ Ισχύει } |\eta\mu x| < |x| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

$$(\lambda\gamma') \text{ Ισχύει ότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$(\lambda\delta') \text{ Ισχύει ότι } \lim_{x \rightarrow 0} x\eta\mu \frac{1}{x} = 0.$$

$$(\lambda\epsilon') \text{ Ισχύει } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0.$$