

Θεωρία στα Μαθηματικά Προσανατολισμού (παράγραφος 2.3)

1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x/\sin x = 0\}$ ισχύει: $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$.
4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$.

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

7. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστές ή Λανθασμένες:

- (α') Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0).$$

- (β') Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (γ') $(\sin x)' = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

- (δ') Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x/\sin x = 0\}$ ισχύει: $(\varepsilon \varphi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

- (ε') Η συνάρτηση $f(x) = \sigma \varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x/\eta \mu x = 0\}$ και ισχύει $(\sigma \varphi x)' = -\frac{1}{\eta \mu^2 x}$.

- (ς') $(\sigma \varphi x)' = \frac{1}{\eta \mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x/\eta \mu x = 0\}$.

- (ζ') Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$.

- (η') $(\ln(|x|))' = -\frac{1}{x}$, για κάθε $x < 0$.

- (θ') Αν $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$.

- (ι') Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει ότι $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

- (ια') Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0).$$

- (ιβ') Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$ τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

- (ιγ') Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Θεωρία στα Μαθηματικά Προσανατολισμού (παράγραφοι 2.4 & 2.5)

1. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 .
2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle.
3. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Rolle.
4. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής.
5. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.
6. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστές ή Λανθασμένες:
 - (α') Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
 - (β') Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
 - (γ') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0, 1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.