

Θεωρία στα Μαθηματικά Προσανατολισμού (παράγραφος 3.5 & 3.7)

1. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού
2. Να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού
3. Έστω δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$
4. Έστω δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$
5. Έστω μία συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι $-\int_{\alpha}^{\beta} (g(x))dx$

6. Έστω δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$

7. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστές ή Λανθασμένες

(α') Αν f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

(β') Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

(γ') Ισχύει η σχέση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

(δ') Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx.$$

(ε') Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

(ς') Για κάθε ζεύγος f, g συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha, \beta]$ ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx.$$