

ΘΕΜΑΤΑ αντιστοιχα

1) Αρχική ΕΦΑΡΜΟΓΗ για *διαμέριση* διαστήματος

Συνδυασμένο με εναλλακτική ΛΥΣΗ θέματος

Από το σχολικό ΒΙΒΛΙΟ Γ' (Προσ / θετικής)

– Άσκηση 1 / Β' ομάδα σελ. 139 (χωρίς χρήση Παραγώγου)

Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ' όλο το $\mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2 \quad \text{για όλα τα } x, y \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η f είναι **σταθερή**.

$$\text{Θεωρούμε } x < z < y \text{ με } z = \frac{x+y}{2}$$

$$\text{ή } z - x = y - z = \frac{y-x}{2}$$

$$\text{δηλαδή } z = x + \frac{y-x}{2} = y - \frac{y-x}{2}$$

που είναι **Διαχωρισμός** του διαστήματος $[x, y]$

σε δύο ίσα διαστήματα τα $[x, z]$ & $[z, y]$,

οπότε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \leq \\ &\leq |f(z) - f(x)| + |f(y) - f(z)| \leq |z - x|^2 + |y - z|^2 = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = \frac{(y-x)^2}{2} \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα τη **διαμέριση**

$$x = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = y$$

του $[x, y]$

$$\text{όπου } t_i = x + i \cdot \frac{y-x}{n} \quad 0 \leq i \leq n$$

$$\text{δηλ. } t_i - t_{i-1} = \frac{y-x}{n} \quad .$$

Τότε θα πάρουμε

$$|f(x) - f(y)| \leq n \cdot \left(\frac{y-x}{n}\right)^2 = \frac{(y-x)^2}{n}$$

$$\text{με } \frac{(y-x)^2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } n \rightarrow +\infty \quad ,$$

$$\text{δηλαδή } f(x) = f(y) \quad .$$

Άρα f - σταθερή.