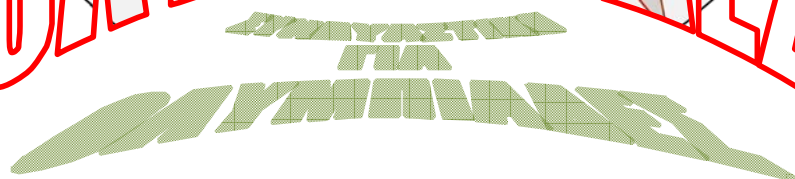


ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΓΙΑ

ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ



1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Συνδυαστική είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την καταμέτρηση (απαρίθμηση) των στοιχείων διαφόρων συνόλων. Τα τελευταία χρόνια η συνδυαστική αποτελεί τμήμα ενός ευρύτερου κλάδου των μαθηματικών που ονομάζονται “Διακριτά μαθηματικά”.

1.1 ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

✦ Αν ένα αντικείμενο α_i μπορεί να εκλεγεί με κ_i τρόπους, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ και η εκλογή του α_i αποκλείει τη ταυτόχρονη εκλογή του α_j , $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, $i \neq j$ τότε οποιοδήποτε από τα α_1 ή α_2 ή α_3 ή ή α_n μπορεί να επιλεγεί με $\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_n$ τρόπους.

1.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ (ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ)

✦ Διαθέτουμε 4 διαφορετικά τετράδια και 5 διαφορετικά στυλό. Με πόσους τρόπους κάποιος μαθητής μπορεί να διαλέξει ένα τετράδιο ή ένα στυλό;

Απάντηση

Το τετράδιο (αντικείμενο α_1), ο μαθητής μπορεί να το επιλέξει με $\kappa_1 = 4$ τρόπους και η εκλογή του αποκλείει την εκλογή στυλό (αντικείμενο α_2).

Το στυλό (αντικείμενο α_2), ο μαθητής μπορεί να το επιλέξει με $\kappa_2 = 5$ τρόπους και η εκλογή του αποκλείει την εκλογή τετραδίου (αντικείμενο α_1).

Άρα οποιοδήποτε από τα α_1 ή α_2 μπορεί να το επιλέξει με $\kappa_1 + \kappa_2 = 4 + 5 = 9$ τρόπους.

1.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑ (ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ)

✦ Τετράγωνο πλευράς μήκους 6, το χωρίζουμε με παράλληλες ευθείες σε 36 τετράγωνα πλευράς μήκους 1 (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα). Πόσα συνολικά τετράγωνα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου), ορίζονται (δημιουργούνται) μετά από αυτό το χωρισμό;

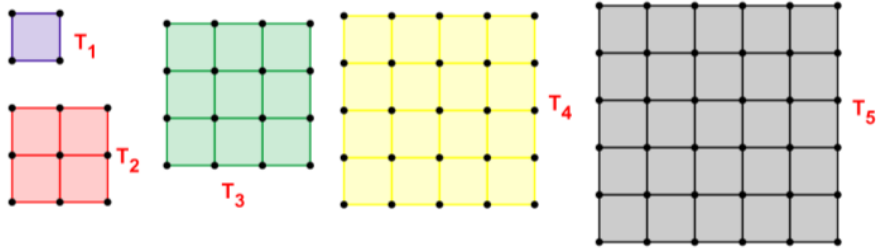


Λύση

Σε κάθε πλευρά του τετραγώνου θεωρούμε 5 σημεία που (μαζί με τις κορυφές του), τις χωρίζουν σε έξι ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Τα παράλληλα προς τις πλευρές ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται σε 25 σημεία. Έτσι στο δημιουργούμενο σχηματισμό (που ονομάζεται και “τετραγωνικό πλέγμα”) έχουμε 49 σημεία, που θα αποτελέσουν τις κορυφές των τετραγώνων.

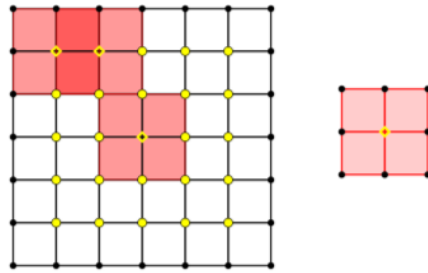
Το τετράγωνο χωρίζεται αρχικά σε τετράγωνα τύπου T_1 (που η πλευρά τους έχει μήκος 1).

Με κορυφές τα σημεία του “πλέγματος” παρατηρούμε ότι δημιουργούνται τετράγωνα τύπου T_2 (που η πλευρά τους έχει μήκος 2), τετράγωνα τύπου T_3 (που η πλευρά τους έχει μήκος 3), τετράγωνα τύπου T_4 (που η πλευρά τους έχει μήκος 4), τετράγωνα τύπου T_5 (που η πλευρά τους έχει μήκος 5) και τέλος δημιουργείται το αρχικό τετράγωνο που μπορεί να χαρακτηριστεί ως τετράγωνο τύπου T_6 (δηλαδή η πλευρά του έχει μήκος 6).

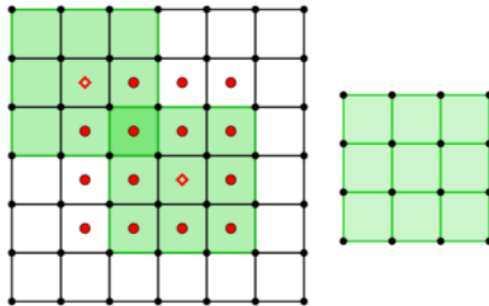


Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_1 είναι προφανώς $6^2 = 36$.

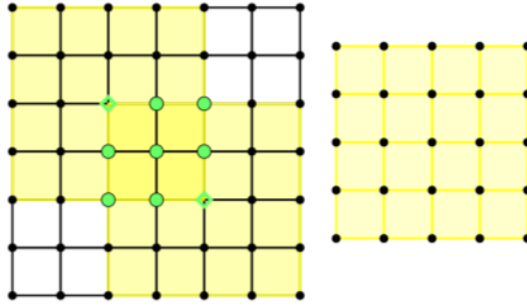
Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_2 είναι $(6-1)^2 = 5^2 = 25$. (Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούμε να τοποθετήσουμε το τετράγωνο τύπου T_2 , μέσα στο μεγάλο τετράγωνο ή μετρήστε τα σημεία που μπορεί να είναι κέντρα των τετραγώνων τύπου T_2).



Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_3 είναι $(6-2)^2 = 4^2 = 16$. (Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούμε να τοποθετήσουμε το τετράγωνο τύπου T_3 , μέσα στο μεγάλο τετράγωνο ή μετρήστε τα σημεία που μπορεί να είναι κέντρα των τετραγώνων τύπου T_3).



Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_4 είναι $(6-3)^2 = 3^2 = 9$. (Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούμε να τοποθετήσουμε το τετράγωνο τύπου T_4 , μέσα στο μεγάλο τετράγωνο ή μετρήστε τα σημεία που μπορεί να είναι κέντρα των τετραγώνων τύπου T_4).



Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_5 είναι $(6-4)^2 = 2^2 = 4$. (Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούμε να τοποθετήσουμε το τετράγωνο τύπου T_5 , μέσα στο μεγάλο τετράγωνο ή μετρήστε τα σημεία που μπορεί να είναι κέντρα των τετραγώνων τύπου T_5).

Τέλος δημιουργείται ένα μόνο τετράπλευρο τύπου T_6 (το αρχικό τετράγωνο).

Άρα δημιουργούνται συνολικά $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \frac{6(6+1)(2 \cdot 6 + 1)}{6} = 91$ το πλήθος τετράγωνα.

1.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑ (ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ)

✦ Τετράγωνο πλευράς n , το χωρίζουμε με παράλληλες ευθείες σε n^2 τετράγωνα πλευράς 1 . Πόσα συνολικά τετράγωνα ορίζονται (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου) μετά από αυτό το χωρισμό;

Απάντηση

Το τετράγωνο χωρίζεται σε τετράγωνα τύπου T_1 (που η πλευρά τους έχει μήκος 1), σε τετράγωνα τύπου T_2 (που η πλευρά τους έχει μήκος 2), σε τετράγωνα τύπου T_3 (που η πλευρά τους έχει μήκος 3) και ...σε τετράγωνα τύπου T_n (που η πλευρά τους έχει μήκος n).

Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_1 είναι n^2 .

Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_2 είναι $(n-1)^2$. (Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούμε να τοποθετήσουμε το τετράγωνο τύπου T_2 , μέσα στο μεγάλο τετράγωνο).

Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_3 είναι $(n-2)^2$. (Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούμε να τοποθετήσουμε το τετράγωνο τύπου T_3 , μέσα στο μεγάλο τετράγωνο).

Τέλος δημιουργείται ένα μόνο τετράγωνο τύπου T_n .

Άρα δημιουργούνται συνολικά $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ το πλήθος τετράγωνα.

1.5 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΑΡΧΗ

✦ Αν ένα αντικείμενο α_1 μπορεί να εκλεγεί με k_1 τρόπους και για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους ένα αντικείμενο α_2 μπορεί να εκλεγεί με k_2 τρόπουςκαι για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους ένα αντικείμενο α_n μπορεί να εκλεγεί με k_n τρόπους, τότε όλα τα

αντικείμενα α_1 και α_2 και α_3 και και α_n μπορούν να επιλεγούν με $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ τρόπους.

1.6 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΑΡΧΗ)

♦ Διαθέτουμε ένα καλάθι που περιέχει ένα πορτοκάλι, ένα μήλο και ένα αχλάδι. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε δύο φρούτα και να τα δώσουμε σε δύο παιδιά;

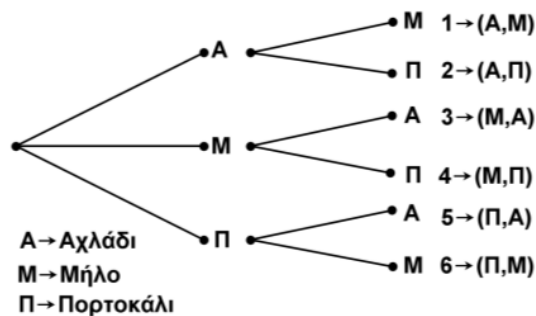
Απάντηση

Το πρώτο φρούτο (αντικείμενο α_1), μπορούμε να το διαλέξουμε με $k_1 = 3$ διαφορετικούς τρόπους (διότι υπάρχουν 3 διαφορετικά φρούτα στο καλάθι) και για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε το δεύτερο φρούτο (αντικείμενο α_2), με $k_2 = 2$ τρόπους (διότι υπάρχουν 2 διαφορετικά φρούτα στο καλάθι μετά την εκλογή του πρώτου φρούτου).

Άρα και τα δύο αντικείμενα (φρούτα) α_1 και α_2 μπορούμε να τα επιλέξουμε με $k_1 k_2 = 3 \cdot 2$ τρόπους.

Παρατήρηση

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η πολλαπλασιαστική αρχή, θα βρούμε με τη βοήθεια των δένδροδιαγραμμάτων όλους τους δυνατούς τρόπους επιλογής των φρούτων.



Συντομογραφικά, όλοι οι δυνατοί τρόποι επιλογής των φρούτων είναι: AM, AΠ, MA, ΜΠ, ΠΑ, ΠΜ.

1.7 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΑΡΧΗ)

♦ Πόσους περιττούς τριψήφιους αριθμούς (με μη επαναλαμβανόμενα ψηφία) μπορούμε να δημιουργήσουμε, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 1,2,5,6,8,9;

Απάντηση

Όλοι οι αριθμοί που διαθέτουμε είναι έξι και τρεις από αυτούς είναι περιττοί.

Το τελευταίο ψηφίο του αριθμού που θα δημιουργήσουμε μπορούμε να το επιλέξουμε με τρεις διαφορετικούς τρόπους από τους 1,5,9 (εφόσον θέλουμε ο αριθμός να είναι περιττός).

Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού μπορούμε να το διαλέξουμε με πέντε διαφορετικούς τρόπους (διότι θα απομείνουν πέντε αριθμοί προς επιλογή μετά την εκλογή του τελευταίου ψηφίου).

Το πρώτο ψηφίο του αριθμού μπορούμε να το επιλέξουμε με τέσσερεις διαφορετικούς τρόπους.

Άρα μπορούμε να δημιουργήσουμε $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ τριψήφιους περιττούς αριθμούς.

1.8 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

♦ Διατάξεις των n αντικειμένων ανά k είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k το πλήθος αντικείμενα από ένα σύνολο n αντικειμένων και να τα τοποθετήσουμε στη σειρά.

Το πλήθος των διατάξεων των n αντικειμένων ανά k είναι:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

και το συμβολίζουμε με $P(n, k)$ ή $(n)_k$.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ έχουμε:

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

1.9 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ)

♦ Πόσους τριψήφιους αριθμούς (με μη επαναλαμβανόμενα ψηφία) μπορούμε να δημιουργήσουμε, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, 5, 6$;

Απάντηση

Το πλήθος των τριψηφίων αριθμών που μπορούμε να δημιουργήσουμε, ισούται με τις διατάξεις των 6 αριθμών (που μας δίνονται) ανά 3.

$$\text{Δηλαδή: } P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120.$$

Παρατήρηση

Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί και με τη βοήθεια της πολλαπλασιαστικής αρχής.

Το πρώτο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους.

Το δεύτερο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 5 τρόπους.

Το τρίτο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους.

Άρα ο τριψήφιος αριθμός μπορεί να επιλεγεί με $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ τρόπους.

1.10 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

♦ Το πλήθος των διατάξεων n αντικειμένων ανά k με επανάληψη (χωρίς περιορισμό) το συμβολίζουμε με $E(n, k)$ και δίνεται από τη σχέση:

$$E(n, k) = n^k.$$

1.11 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ)

♦ Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να δημιουργήσουμε, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, 5, 6$;

Απάντηση

Το πλήθος των τριψηφίων αριθμών που μπορούμε να δημιουργήσουμε, ισούται με τις επαναληπτικές διατάξεις των 6 αριθμών (που μας δίνονται) ανά 3.

$$\text{Δηλαδή: } E(6, 3) = 6^3 = 216.$$

Παρατήρηση

Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί και με τη βοήθεια της πολλαπλασιαστικής αρχής.

Το πρώτο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους.

Το δεύτερο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους.

Το τρίτο ψηφίο μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους.

Άρα ο τριψηφίος αριθμός μπορεί να επιλεγεί με $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ τρόπους.
(Το δεύτερο και το τρίτο ψηφίο μπορούν να επιλεγούν με 6 τρόπους διότι δεν υπάρχει κανένας περιορισμός για τη δημιουργία του τριψηφίου αριθμού)

1.12 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ)

♦ Δέκα άτομα βρίσκονται στον ανελκυστήρα (ασανσέρ) ενός επταόροφου κτιρίου. Ο ανελκυστήρας ξεκινά από το ισόγειο και όλοι οι επιβάτες κατεβαίνουν σε κάποιο όροφο. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατεβούν οι επιβάτες στους επτά ορόφους;

Απάντηση

Το πλήθος των τρόπων ισούται με τις επαναληπτικές διατάξεις των 7 ορόφων ανά 10.

$$\text{Δηλαδή: } E(7,10) = 7^{10}.$$

Παρατήρηση

Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί και με τη βοήθεια της πολλαπλασιαστικής αρχής.

Το πρώτο άτομο μπορεί να κατεβεί με 7 διαφορετικούς τρόπους.

Το δεύτερο άτομο μπορεί να κατεβεί με 7 διαφορετικούς τρόπους.

.....

Το δέκατο άτομο μπορεί να κατεβεί με 7 διαφορετικούς τρόπους.

Άρα οι επιβάτες μπορούν να κατεβούν $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdots 7 = 7^{10}$ τρόπους.

1.13 ΠΡΟΒΛΗΜΑ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ)

♦ Με πόσους τρόπους μπορούν να καταλύσουν δέκα τουρίστες, στα επτά ξενοδοχεία μιάς πόλης;

Απάντηση

Η ίδια ακριβώς λύση με το προηγούμενο πρόβλημα.

1.14 ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

♦ Μεταθέσεις των n αντικειμένων είναι οι διατάξεις των n αντικειμένων ανά n . Δηλαδή είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε n διαφορετικά μεταξύ τους αντικείμενα.

Το πλήθος των μεταθέσεων n αντικειμένων συμβολίζεται με $P(n)$ και δίνεται από τη σχέση

$$P(n) = n!.$$

1.15 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

♦ Το πλήθος των μεταθέσεων n ειδών αντικειμένων με $k_1, k_2, \dots, k_n$ στοιχεία αντίστοιχα το συμβολίζουμε με $M(k_1, k_2, \dots, k_n)$ και δίνεται από τη σχέση:

$$M(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \cdots k_n!}.$$

1.16 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

♦ Συνδυασμοί των n αντικειμένων ανά k είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k το πλήθος αντικείμενα από ένα σύνολο n αντικειμένων.

(Στη περίπτωση των συνδυασμών δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη επιλογής ή τοποθέτησης των k επιλεγόμενων αντικειμένων).

Τους συνδυασμούς των ν αντικειμένων ανά κ , τους συμβολίζουμε με $C(\nu, \kappa)$ ή $\binom{\nu}{\kappa}$ και

δίνεται από τη σχέση: $C(\nu, \kappa) = \binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)! \kappa!}.$

1.17 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ)

★ Με πόσους τρόπους ένας προπονητής μίας ομάδας μπάσκετ μπορεί να επιλέξει την αρχική πεντάδα, από τους δώδεκα παίκτες που έχει στη διάθεσή του;

Απάντηση

Οι τρόποι με τους οποίους ο προπονητής μπορεί να επιλέξει την αρχική πεντάδα (επειδή δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία θα επιλεγούν οι παίκτες) είναι όσοι οι συνδυασμοί των 12 αντικειμένων (παίκτες) ανά 5.

Δηλαδή υπάρχουν:

$$\begin{aligned} C(12, 5) &= \binom{12}{5} = \frac{12!}{(12-5)!5!} = \frac{12!}{7!5!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \\ &= \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{5} = 3 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 12 = 72 \cdot 11 = 792 \end{aligned}$$

τρόποι επιλογής της αρχικής πεντάδας.

1.18 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

★ Συνδυασμοί των ν αντικειμένων ανά κ με επανάληψη είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε κ το πλήθος αντικείμενα από ένα σύνολο ν αντικειμένων με επανάληψη.

(Στη περίπτωση των συνδυασμών δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη επιλογής ή τοποθέτησης των κ επιλεγόμενων αντικειμένων).

Τους συνδυασμούς των ν αντικειμένων ανά κ με επανάληψη, τους συμβολίζουμε με

$CE(\nu, \kappa)$ ή $\left[\begin{smallmatrix} \nu \\ \kappa \end{smallmatrix} \right]$ και δίνεται από τη σχέση: $CE(\nu, \kappa) = \left[\begin{smallmatrix} \nu \\ \kappa \end{smallmatrix} \right] = \binom{\nu + \kappa - 1}{\kappa}.$

1.19 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ)

★ Ρίχνουμε ταυτόχρονα 3 ίδια νομίσματα. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα;

Απάντηση:

Κατά τη ρίψη νομίσματος, τα δυνατά αποτελέσματα είναι “Κ” (Κεφάλι) ή “Γ” (Γράμματα).

Προφανώς κατά τη ρίψη τριών νομισμάτων, τα δυνατά αποτελέσματα είναι:

ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΓ και ΓΓΓ.

(Δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των “Κ” και “Γ” διότι τα νομίσματα ρίχνονται ταυτόχρονα)

Δηλαδή τα δυνατά αποτελέσματα είναι 4.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις επαναληπτικές διατάξεις για να λύσουμε το πρόβλημα.

Τα δυνατά αποτελέσματα είναι όσοι οι συνδυασμοί με επανάληψη των $\nu = 2$ αντικειμένων ανά $\kappa = 3$. Τα “αντικείμενα” που επιλέγουμε είναι “Κ” ή “Γ” και οι επαναλήψεις που μπορούμε να έχουμε είναι τρεις.

Δηλαδή τα δυνατά αποτελέσματα είναι:

$$CE(2,3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4!}{3!} = 4.$$

1.20 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ)

Όταν λέμε “**αναγραμματισμό**” μιάς λέξης, εννοούμε μία καινούργια (όχι κατ ανάγκη με νόημα) λέξη που προκύπτει αν αλλάξουμε τη σειρά των γραμμάτων (αναδιατάζουμε τα γράμματα), της αρχικής λέξης.

♦ **Να βρεθεί το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης “ΘΑΛΑΣΣΑ”.**

Απάντηση

1^{ος} Τρόπος (Με Επαναληπτικές Μεταθέσεις)

Στη λέξη “ΘΑΛΑΣΣΑ” υπάρχει τρεις φορές το γράμμα “Α”, δύο φορές το γράμμα “Σ”, μία φορά το γράμμα “Θ” και μία φορά το γράμμα “Λ”.

Άρα το πλήθος των αναγραμματισμών ισούται με τις επαναληπτικές διατάξεις των τεσσάρων ειδών αντικειμένων Α, Σ, Θ, Λ (4 γράμματα συμμετέχουν) με 3, 2, 1, 1 πλήθος στοιχείων αντίστοιχα.

$$M(3,2,1,1) = \frac{(3+2+1+1)!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 420$$

2^{ος} Τρόπος (Με Συνδυασμούς και Πολλαπλασιαστική αρχή)

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε μία θήκη με επτά θέσεις στις οποίες θα τοποθετήσουμε τα γράμματα Α, Α, Α, Σ, Σ, Θ, Λ ώστε να δημιουργούνται καινούργιες λέξεις (αναγραμματισμοί της αρχικής λέξης).

$$\begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{A} & & \text{A} & & & & \\ \hline \end{array} \quad \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{X} & \text{Σ} & \text{X} & \text{Σ} & \text{X} & & \\ \hline \end{array} \quad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{X} & \text{X} & \text{X} & \text{X} & \text{Θ} & \text{X} & \\ \hline \end{array} \quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{X} & \text{X} & \text{X} & \text{X} & \text{X} & \text{X} & \text{Λ} \\ \hline \end{array} \quad \binom{1}{1} = \frac{1!}{0!1!} \end{array}$$

Τα τρία Α, Α, Α μπορούμε να τα τοποθετήσουμε στις επτά θέσεις με $\binom{7}{3}$ τρόπους.

Τα δύο Σ, Σ μπορούμε να τα τοποθετήσουμε στις τέσσερις υπόλοιπες θέσεις με $\binom{4}{2}$ τρόπους.

Το Θ μπορούμε να το τοποθετήσουμε στις δύο υπόλοιπες θέσεις με $\binom{2}{1}$ τρόπους.

Το Λ τέλος μπορούμε να το τοποθετήσουμε στη μία θέση με $\binom{1}{1} = 1$ τρόπους.

Άρα σύμφωνα με τη πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν :

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 420 \text{ αναγραμματισμοί.}$$

1.21 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ)

♦ Να βρεθεί το άθροισμα όλων των πενταψήφιων θετικών ακέραιων που προκύπτουν από την αναδιάταξη των ψηφίων του αριθμού 12345^ο.

Απάντηση

Το πλήθος των αριθμών που έχουν τελευταίο ψηφίο τη μονάδα (1) είναι: $4! = 24$.

(όσες είναι δηλαδή οι μεταθέσεις των τεσσάρων αριθμών που βρίσκονται στις τέσσερις πρώτες θέσεις)

Υπάρχουν λοιπόν $4! = 24$ αριθμοί που τελειώνουν σε 1, $4! = 24$ αριθμοί που τελειώνουν σε 2, $4! = 24$ αριθμοί που τελειώνουν σε 3, $4! = 24$ αριθμοί που τελειώνουν σε 4 και $4! = 24$ αριθμοί που τελειώνουν σε 5.

Άρα το άθροισμα των μονάδων όλων των αριθμών που δημιουργούνται, είναι:

$$24(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 24 \frac{5 \cdot 6}{2} = 24 \cdot 15 = 360.$$

Με ανάλογο τρόπο σκεπτόμενοι, συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα των δεκάδων όλων των αριθμών που δημιουργούνται, είναι:

$$24(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 10 = 24 \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 10 = 24 \cdot 15 \cdot 10 = 3600.$$

Με όμοιο τρόπο σκεπτόμενοι (για τις εκατοντάδες, τις χιλιάδες κ.λ.π), διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα όλων αριθμών είναι:

$$360(1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) = 360 \cdot 11111.$$

1.22 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σειρά (τη μία δίπλα στην άλλη) τρεις τελείως ίδιες μαύρες και πέντε τελείως ίδιες άσπρες σφαίρες.

Λύση

Έστω ότι διαθέτουμε μία θήκη με οκτώ θέσεις (τη μία δίπλα στην άλλη) στην οποία θα τοποθετήσουμε τις σφαίρες.



Οι τρεις μαύρες σφαίρες μπορούν να τοποθετηθούν με $\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = 56$ τρόπους στις 8 θέσεις της

θήκης. Οι πέντε λευκές σφαίρες στη συνέχεια, μπορούν να τοποθετηθούν με ένα μόνο τρόπο στις πέντε κενές θέσεις της θήκης.

Άρα υπάρχουν συνολικά 56 τρόποι τοποθέτησης των σφαιρών.

Παρατηρήσεις

1. Η “ιδιορυθμία” του προβλήματος βρίσκεται στο γεγονός ότι: η αντιμετάθεση δύο σφαιρών του ίδιου χρώματος, δεν αποτελεί διαφορετική συνολική τοποθέτηση των σφαιρών.

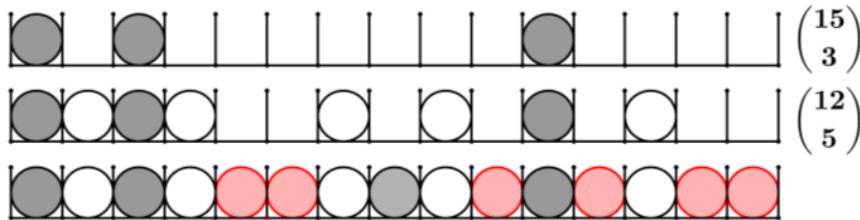
2. Αν τοποθετήσουμε πρώτα τις λευκές σφαίρες τότε οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης είναι $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = 56$. Προφανώς το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.
3. Γενικότερα ισχύει η ισότητα $\binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!}$.
4. Ανάλογους τρόπους σκέψεις εφαρμόζουμε και στους αναγραμματισμούς των λέξεων.

1.23 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σειρά (τη μία δίπλα στην άλλη) τρεις τελείως ίδιες μαύρες, πέντε τελείως ίδιες άσπρες σφαίρες και επτά τελείως ίδιες κόκινες σφαίρες;

Λύση

Έστω ότι διαθέτουμε μία θήκη με δεκαπέντε θέσεις (τη μία δίπλα στην άλλη) στην οποία θα τοποθετήσουμε τις σφαίρες.



Οι 3 μαύρες σφαίρες μπορούν να τοποθετηθούν με

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{12!3!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$$

τρόπους στις 15 θέσεις της θήκης.

Οι 5 λευκές σφαίρες στη συνέχεια, μπορούν να τοποθετηθούν με

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{7!5!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8 \cdot 9 \cdot 11 = 792$$

τρόπους στις 12 κενές θέσεις της θήκης.

Οι 7 (τέλος) κόκινες σφαίρες μπορούν να τοποθετηθούν με ένα μόνο τρόπο στις υπόλοιπες επτά κενές θέσεις της θήκης.

Άρα υπάρχουν συνολικά $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{5} = 455 \cdot 792 = 360360$ τρόποι τοποθέτησης των σφαιρών.

Παρατηρήσεις

1. Το πρόβλημα αυτό αποτελεί “μερική γενίκευση” του προηγούμενου προβλήματος.

2. Για τον υπολογισμό των τρόπων τοποθέτησης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο των επαναληπτικών μεταθέσεων.

$$M(3,5,7) = \frac{(3+5+7)!}{3!5!7!} = \frac{15!}{3!5!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)} = 360360$$

1.24 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν έντεκα θεατές στις είκοσι συνεχόμενες θέσεις ενός θεάτρου;

Λύση

Ο 1^{ος} θεατής μπορεί να καθίσει με 20 τρόπους

Ο 2^{ος} θεατής μπορεί να καθίσει με 19 τρόπους

Ο 3^{ος} θεατής μπορεί να καθίσει με 18 τρόπους

.....

Ο 11^{ος} θεατής μπορεί να καθίσει με 10 τρόπους

Άρα (σύμφωνα με τη πολλαπλασιαστική αρχή) οι δυνατοί τρόποι είναι:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 10 = \frac{20!}{(20-11)!}.$$

(Διατάξεις 20 αντικειμένων ανά 11)

1.25 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν έντεκα θεατές στις είκοσι συνεχόμενες θέσεις ενός θεάτρου, αν τρία συγκεκριμένα άτομα καθίσουν σε διαδοχικές θέσεις (ο ένας δίπλα στον άλλο);

Λύση

Τα τρία συγκεκριμένα άτομα (επειδή θα καθίσει ο ένας δίπλα στον άλλο) μπορούν να καταλάβουν τις τρεις συνεχόμενες θέσεις $\underline{1,2,3}$ ή $\underline{2,3,4}$ ή ... ή $\underline{18,19,20}$.

Δηλαδή υπάρχουν 18 τρόποι κατάληψης των τριών διαδοχικών θέσεων.

Για κάθε ένα από τους παραπάνω τρόπους, υπάρχουν $3! = 6$ τρόποι αντιμετάθεσης των τριών συγκεκριμένων ατόμων μεταξύ τους.

Άρα όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να καθίσουν τα τρία άτομα είναι:

$$6 \cdot 18 = 108.$$

Οι υπόλοιποι 8 θεατές μπορούν να καθίσουν στις 17 θέσεις με

$$\frac{17!}{(17-8)!} = \frac{17!}{9!} = 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \text{ τρόπους.}$$

Άρα όλοι οι δυνατοί τρόποι είναι $17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 108$.

1.26 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Σε μία τάξη φοιτούν 12 αγόρια και 10 κορίτσια. Πόσες πενταμελείς επιτροπές (από παιδιά της τάξης) μπορούν να δημιουργηθούν, αν:

1. Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.
2. Στην επιτροπή συμμετέχουν 3 τουλάχιστον κορίτσια.

Λύση

1. Όλα τα παιδιά της τάξης είναι $12 + 10 = 22$.

Η τελική σύνθεση της επιτροπής, δεν επηρεάζεται από τη σειρά με την οποία επιλέγουμε τα παιδιά.

Προφανώς οι επιτροπές “ΜΑΡΙΑ, ΓΙΩΡΓΟΣ, ΝΙΚΟΣ, ΔΗΜΗΤΡΑ, ΣΤΕΛΛΑ”, “ΓΙΩΡΓΟΣ, ΜΑΡΙΑ, ΝΙΚΟΣ, ΔΗΜΗΤΡΑ, ΣΤΕΛΛΑ” και “ ΜΑΡΙΑ, ΓΙΩΡΓΟΣ, ΣΤΕΛΛΑ, ΝΙΚΟΣ, ΔΗΜΗΤΡΑ ”, είναι ίδιες.

Άρα οι πενταμελείς επιτροπές που μπορούν να δημιουργηθούν είναι όσοι οι συνδυασμοί των 22 παιδιών ανά 5. Δηλαδή :

$$\binom{22}{5} = \frac{22!}{(22-5)!5!} = \frac{22!}{17!5!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 22 = 26334.$$

2. Το πλήθος των επιτροπών στις οποίες συμμετέχουν τρία κορίτσια ισούται με το άθροισμα του πλήθους των επιτροπών που περιέχουν τρία ή τέσσερα ή πέντε κορίτσια.

Τα τρία κορίτσια που θα συμμετάσχουν στην επιτροπή, μπορούμε να τα επιλέξουμε με $\binom{10}{3}$

τρόπους. Ταυτόχρονα μπορούμε να επιλέξουμε με $\binom{12}{2}$ τρόπους τα δύο αγόρια, ώστε να συμπληρωθούν τα πέντε μέλη της επιτροπής.

Άρα δημιουργούνται

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{12}{2} = \frac{10!}{7!3!} \cdot \frac{12!}{10!2!} = \frac{12!}{2!3!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 7920$$

επιτροπές στις οποίες συμμετέχουν τρία κορίτσια.

Με ανάλογο τρόπο διαπιστώνουμε ότι δημιουργούνται

$$\binom{10}{4} \cdot \binom{12}{1} = \frac{10!}{6!4!} \cdot \frac{12!}{11!1!} = \frac{12 \cdot 10!}{4!6!} = \frac{12 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 4 = 2520$$

επιτροπές στις οποίες συμμετέχουν τέσσερα κορίτσια.

Τέλος δημιουργούνται

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 9 \cdot 7 \cdot 4 = 252$$

επιτροπές στις οποίες συμμετέχουν πέντε κορίτσια.

Άρα μπορούν να δημιουργηθούν $7920 + 2520 + 252 = 10692$ επιτροπές στις οποίες συμμετέχουν τρία τουλάχιστον κορίτσια.

1.27 ΠΡΟΒΛΗΜΑ (ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ)

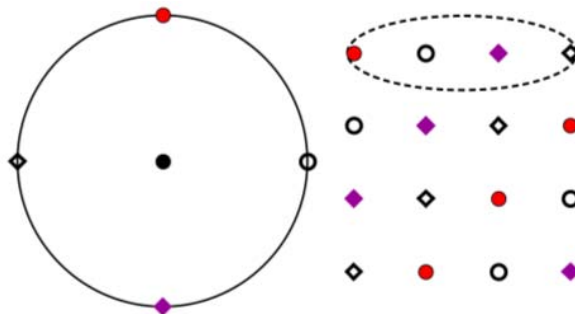
♦ Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν τέσσερα άτομα γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι;

Λύση

Συμβολίζουμε με A, B, C, D τα άτομα που θα καθίσουν γύρω από το τραπέζι.

Στο σχήμα (για εποπτικούς λόγους) συμβολίζουμε τα άτομα με σημεία.

Αν υποθέσουμε ότι τα τέσσερα άτομα τα τοποθετούμε στη σειρά (το ένα δίπλα στο άλλο), τότε στις τέσσερις παρακάτω τοποθετήσεις (μεταθέσεις) των ατόμων: $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$ και $DABC$ αντιστοιχεί μία και μόνο τοποθέτησή τους γύρω από το τραπέζι.



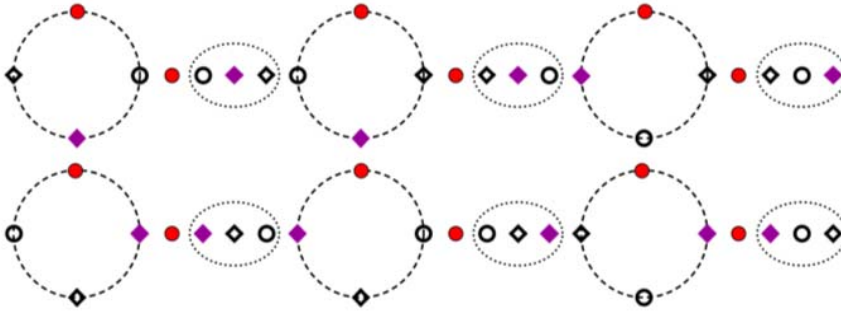
Αντίστροφα, σε κάθε τοποθέτηση των ατόμων γύρω από το τραπέζι, αντιστοιχούν τέσσερις μεταθέσεις των ατόμων (αν τους τοποθετούσαμε στη σειρά) που προκύπτουν ως εξής:

Ξεκινάμε από κάθε άτομο (που κάθεται στο τραπέζι) και κινούμενοι δεξιόστροφα καταγράφουμε (σε σειρά) αυτούς που συναντάμε στο τραπέζι.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το πλήθος των μεταθέσεων των τεσσάρων ατόμων, είναι τετραπλάσιο από το πλήθος των τρόπων που θα καθίσουν γύρω από το τραπέζι.

Άρα όλοι οι δυνατοί τρόποι που θα καθίσουν γύρω από το τραπέζι είναι: $\frac{4!}{4} = 3! = 6$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται όλοι οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης γύρω από το κυκλικό τραπέζι.



1.28 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 10 πορτοκάλια, 15 μήλα και 20 αχλάδια σε δύο παιδιά, αν:

1. Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.
2. Κάθε παιδί πρέπει να πάρει 3 τουλάχιστον πορτοκάλια, 2 τουλάχιστον μήλα και 4 τουλάχιστον αχλάδια.

Λύση

Όλα τα φρούτα θα μοιραστούν στα δύο παιδιά. Αν λοιπόν το πρώτο παιδί πάρει 4 πορτοκάλια, τότε το δεύτερο θα πάρει “αναγκαστικά” 6 πορτοκάλια. Δηλαδή σημαντικό ρόλο παίζει η κατανομή των φρούτων στο ένα από τα δύο παιδιά (διότι το άλλο θα πάρει τα υπόλοιπα).

1. Το ένα από τα δύο παιδιά μπορεί να πάρει 0 ή 1 ή 2 ή ... ή 10 πορτοκάλια.

Άρα οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τα πορτοκάλια είναι: $(10 + 1) = 11$.

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι τα μήλα μπορούν να μοιραστούν με $(15 + 1) = 16$ και τα αχλάδια με $(20 + 1) = 21$ τρόπους.

Άρα τα φρούτα μπορούν να μοιραστούν με $(10 + 1)(15 + 1)(20 + 1) = 11 \cdot 16 \cdot 21 = 3696$ τρόπους.

2. Το ένα από τα δύο παιδιά μπορεί να πάρει 3 ή 4 ή 5 ή ... ή 7 πορτοκάλια.

Άρα οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τα πορτοκάλια είναι:

$$7 - 3 + 1 = (10 - 3) - 3 + 1 = 10 - 2 \cdot 3 + 1 = 5.$$

Το ένα από τα δύο παιδιά μπορεί να πάρει 2 ή 3 ή 4 ή ... ή 13 μήλα.

Άρα οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τα μήλα είναι:

$$13 - 2 + 1 = (15 - 2) - 2 + 1 = 15 - 2 \cdot 2 + 1 = 12.$$

Το ένα από τα δύο παιδιά μπορεί να πάρει 4 ή 5 ή 6 ή ... ή 16 αχλάδια.

Άρα οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τα αχλάδια είναι:

$$16 - 4 + 1 = (20 - 4) - 4 + 1 = 20 - 2 \cdot 4 + 1 = 13.$$

Τελικά όλοι οι δυνατοί τρόποι μοιράσματος των φρούτων είναι:

$$(10 - 2 \cdot 3 + 1)(15 - 2 \cdot 2 + 1)(20 - 2 \cdot 4 + 1) = 5 \cdot 12 \cdot 13 = 780.$$

1.29 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

★ Να βρεθεί το πλήθος των διαιρετών του αριθμού 600.

Λύση

1^{ος} Τρόπος

Ο αριθμός 600 (αναλυόμενος σε γινόμενο πρώτων παραγόντων) γράφεται:

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε τρεις διαφορετικές μεταξύ τους κάρτες που έχουν γραμμένο επάνω τους τον αριθμό 2, μία κάρτα που έχει γραμμένο τον αριθμό 3 και δύο διαφορετικές μεταξύ τους κάρτες που έχουν γραμμένο τον αριθμό 5.

Μοιράζουμε όλες τις κάρτες σε δύο παιδιά και τους ζητάμε να γράψουν το γινόμενο των αριθμών που έχουν επάνω τους οι κάρτες με τη βοήθεια δυνάμεων του 2, του 3 του 5 και το τελικό αποτέλεσμα.

Αν (δηλαδή) σε ένα παιδί δοθούν δύο κάρτες με τους αριθμούς 2 και μία κάρτα με τον αριθμό 5 τότε αυτό θα πρέπει να γράψει ότι έχει τον αριθμό: $2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 20$.

Το δεύτερο παιδί αναγκαστικά θα έχει τον αριθμό $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι στα χέρια των παιδιών δημιουργούνται δύο αριθμοί που το γινόμενό τους είναι 600, οπότε οι αριθμοί αυτοί θα είναι διαιρέτες του 600.

Από τη τελευταία παρατήρηση συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των διαιρετών του 600, ταυτίζεται με το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να μοιράσουμε τις έξι κάρτες στα παιδιά.

Σκεφτόμενοι με τον τρόπο του προηγούμενου προβλήματος, καταλήγουμε ότι το πλήθος των διαιρετών του 600 είναι: $(3+1)(1+1)(2+1) = 24$.

2^{ος} Τρόπος

Ο αριθμός 600 (αναλυόμενος σε γινόμενο πρώτων παραγόντων) γράφεται: $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$.

Κάθε διαιρέτης του 600 είναι της μορφής $2^k \cdot 3^m \cdot 5^n$, όπου k, m, n είναι ακέραιοι με $0 \leq k \leq 3$, $0 \leq m \leq 1$ και $0 \leq n \leq 2$.

Το πλήθος λοιπόν των διαιρετών ταυτίζεται με το πλήθος επιλογής των εκθετών k, m, n στην παράσταση $2^k \cdot 3^m \cdot 5^n$.

Το k μπορούμε να το επιλέξουμε με 4 τρόπους, το m με 2 τρόπους και το n με 3 τρόπους.

Άρα τις τριάδες των εκθετών μπορούμε να τις επιλέξουμε με $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ τρόπους.

Παρατήρηση

1. Γενικότερα το πλήθος των διαιρετών του θετικού ακεραίου $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \cdots p_k^{n_k}$ είναι:

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1).$$

2. Αν $a = 2^4$ τότε διαιρέτες του είναι οι αριθμοί $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ και το άθροισμά τους είναι:

$$r(a) = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 31.$$

Αν $a = 2^4 \cdot 3$ τότε, επί πλέον διαιρέτες του αριθμού a (εκτός από τους $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4$) είναι και οι αριθμοί $3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, 3 \cdot 2^4$.

Εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των παρενθέσεων $(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$ και $(1 + 3)$ έχουμε:

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(1 + 3) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος του αθροίσματος είναι διαιρέτης του αριθμού $a = 2^4 \cdot 3$.

Το άθροισμα λοιπόν των διαιρετών θα είναι: $\frac{2^5 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = 124$.

3. Γενικότερα το άθροισμα των διαιρετών του θετικού ακέραιου $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \cdots p_k^{n_k}$ είναι:

$$\frac{p_1^{n_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{n_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_k^{n_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

2 ΣΥΝΘΕΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Δέκα άτομα βρίσκονται στον ανελκυστήρα (ασανσέρ) ενός επτάόροφου κτιρίου. Ο ανελκυστήρας ξεκινά από το ισόγειο και όλοι οι επιβάτες αποβιβάζονται σε κάποιο όροφο. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η αποβίβαση των επιβατών στους επτά ορόφους, αν στο πρώτο όροφο αποβιβαστούν δύο ακριβώς άτομα;

Απάντηση

Η επιλογή των 2 ατόμων (που θα αποβιβαστούν στο πρώτο όροφο), μπορεί να γίνει με

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!2!} \text{ τρόπους.}$$

Για κάθε ένα από τους παραπάνω τρόπους, οι υπόλοιποι 8 επιβάτες μπορούν να αποβιβαστούν στους 6 ορόφους με 6^8 τρόπους. (♦)

Άρα (σύμφωνα με τη πολλαπλασιαστική αρχή) όλοι οι δυνατοί τρόποι αποβίβασης των επιβατών

στους επτά ορόφους είναι: $\binom{10}{2} \cdot 6^8$.

(♦)

Το 1^ο άτομο μπορεί να αποβιβαστεί με 6 τρόπους.

Το 2^ο άτομο μπορεί να αποβιβαστεί με 6 τρόπους.

.....

Το 8^ο άτομο μπορεί να αποβιβαστεί με 6 τρόπους.

Επαναληπτικές Διατάξεις έξι ανά οκτώ $E(6,8) = 6^8$.

2.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Επάνω στη περιφέρεια ενός κύκλου δίνονται επτά διαφορετικά μεταξύ τους σημεία.

Βρείτε: (α) Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται με άκρα τα επτά αυτά σημεία;

(β) Πόσα τρίγωνα ορίζονται με κορυφές τα επτά αυτά σημεία;

(γ) Πόσες διαγωνίες έχει το δημιουργούμενο κυρτό επτάγωνο;

Απάντηση

Με δεδομένο ότι δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα, το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται ισούται με το πλήθος των συνδυασμών των επτά σημείων (αντικειμένων) ανά δύο.

$$C(7,2) = \binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21.$$

Με ανάλογες σκέψεις καταλήγουμε ότι το πλήθος των τριγώνων που δημιουργούνται είναι όσοι οι συνδυασμοί των επτά σημείων (αντικειμένων) ανά τρία.

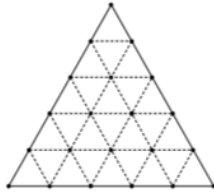
$$C(7,3) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Το πλήθος των διαγωνίων προκύπτει από το πλήθος όλων των ευθυγράμμων τμημάτων αφαιρώντας τα επτά ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν τις πλευρές του πολυγώνου. Δηλαδή το πλήθος των διαγωνίων είναι $21 - 7 = 14$.

2.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑ (ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΠΛΕΓΜΑ)

♦ Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς μήκους 5, το χωρίζουμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε 25 ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς μήκους 1 (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα).

Πόσα συνολικά ισόπλευρα τρίγωνα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τριγώνου) ορίζονται (δημιουργούνται) μετά από αυτό το χωρισμό;



Λύση

Σε κάθε πλευρά του τριγώνου θεωρούμε 4 σημεία που (μαζί με τις κορυφές του), τις χωρίζουν σε πέντε ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Τα παράλληλα προς τις πλευρές ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται σε 6 σημεία (που βρίσκονται στο εσωτερικό του μεγάλου ισόπλευρου τριγώνου). Έτσι στο δημιουργούμενο σχηματισμό (που ονομάζεται και “κανονικό τριγωνικό πλέγμα”) έχουμε 21 σημεία, που θα αποτελέσουν τις κορυφές των τριγώνων.

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο, το ορθόκεντρο, το περίκεντρο, το βαρύκεντρο και το έγκεντρο ταυτίζονται.

Το περίκεντρο του ισοπλεύρου τριγώνου, θα το ονομάζουμε **κέντρο του τριγώνου**.

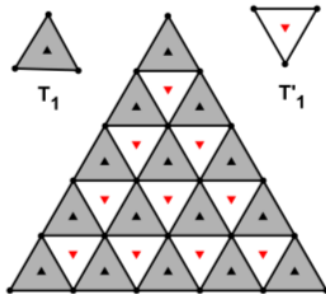
Τα κέντρα των τριγώνων που έχουν τον ίδιο προσανατολισμό με το αρχικό τρίγωνο θα τα σημειώνουμε με “▲”.

Τα κέντρα των τριγώνων που έχουν αντίθετο προσανατολισμό με το αρχικό τρίγωνο θα τα σημειώνουμε με “▼”.

Με κορυφές τα σημεία του “πλέγματος” παρατηρούμε ότι δημιουργούνται:

1. Τρίγωνα τύπου T_1 (που η πλευρά τους έχει μήκος 1) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_1 είναι $S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$.

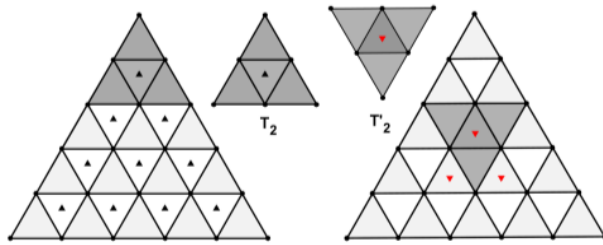


Τρίγωνα τύπου T_1' (που η πλευρά τους έχει μήκος 1) και ο προσανατολισμός τους είναι αντίθετος με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_1' είναι $S_1' = 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$.

2. Τρίγωνα τύπου T_2 (που η πλευρά τους έχει μήκος 2) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

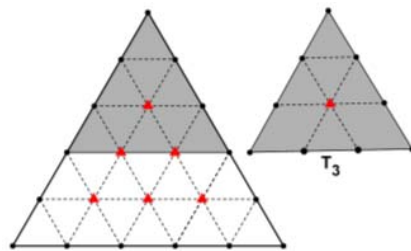
Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_2 είναι $S_2 = 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$.



Τρίγωνα τύπου T'_2 (που η πλευρά τους έχει μήκος 2) και ο προσανατολισμός τους είναι αντίθετος με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T'_2 είναι $S'_2 = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$.

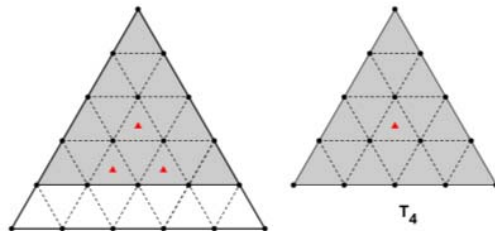
3. Τρίγωνα τύπου T_3 (που η πλευρά τους έχει μήκος 3) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.



Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_3 είναι $S_3 = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

4. Τρίγωνα τύπου T_4 (που η πλευρά τους έχει μήκος 4) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_4 είναι $S_4 = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$.



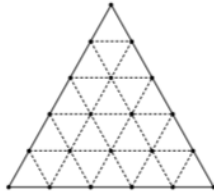
Τέλος “δημιουργείται” το τρίγωνο τύπου T_5 (που η πλευρά του έχει μήκος 5) και είναι ουσιαστικά το μεγάλο αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο.

Τελικά το πλήθος των τριγώνων είναι:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S'_1 + S'_2 + S'_3 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1 + 10 + 3 = 48.$$

2.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑ (ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ)

♦ **Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς μήκους n** (όπου n θετικός ακέραιος), το χωρίζουμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε n^2 τρίγωνα πλευράς μήκους 1 (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, για $n=5$). Πόσα συνολικά ισόπλευρα τρίγωνα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τριγώνου) ορίζονται (δημιουργούνται) μετά από αυτό το χωρισμό;



Λύση

Σε κάθε πλευρά του τριγώνου θεωρούμε $n-1$ σημεία που (μαζί με τις κορυφές του), τις χωρίζουν σε n ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Τα παράλληλα προς τις πλευρές ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται σε $1+2+3+\dots+(n-2)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ σημεία. Έτσι στο δημιουργούμενο σχηματισμό (που ονομάζεται και “κανονικό τριγωνικό πλέγμα”) έχουμε $1+2+3+\dots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ σημεία, που θα αποτελέσουν τις κορυφές των τριγώνων.

Με κορυφές τα σημεία του “πλέγματος” παρατηρούμε ότι δημιουργούνται:

Τρίγωνα τύπου T_1 (που η πλευρά τους έχει μήκος 1) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_1 είναι:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Τρίγωνα τύπου T_2 (που η πλευρά τους έχει μήκος 2) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_2 είναι:

$$S_2 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Τρίγωνα τύπου T_3 (που η πλευρά τους έχει μήκος 3) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_3 είναι:

$$S_3 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

.....

Τρίγωνα τύπου T_{n-2} (που η πλευρά τους έχει μήκος $n-2$) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_{n-2} είναι:

$$S_{n-2} = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6.$$

Τρίγωνα τύπου T_{n-1} (που η πλευρά τους έχει μήκος $n-1$) και ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T_{n-1} είναι:

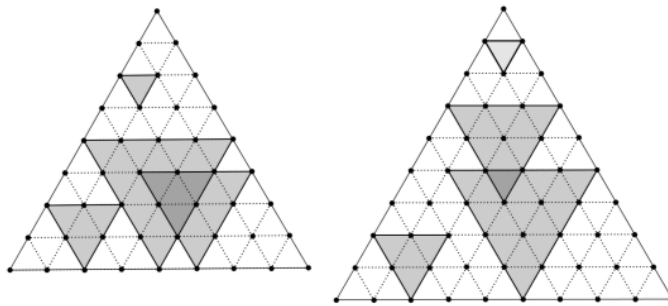
$$S_{n-1} = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3.$$

Τέλος “δημιουργείται” το τρίγωνο τύπου T_n (που η πλευρά του έχει μήκος n) και ταυτίζεται ουσιαστικά το μεγάλο αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο.

Τελικά το πλήθος των τριγώνων που ο προσανατολισμός τους ταυτίζεται με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου είναι:

$$\begin{aligned} S &= S_n + S_{n-1} + S_{n-2} + \dots + S_3 + S_2 + S_1 = \\ &= \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n^2 = \\ &= \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6} + n^2. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το πλήθος των τριγώνων που ο προσανατολισμός τους είναι αντίθετος με τον προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.



Με κορυφές τα σημεία του “πλέγματος” παρατηρούμε ότι δημιουργούνται:

Τρίγωνα τύπου T'_1 (που η πλευρά τους έχει μήκος 1) και ο προσανατολισμός τους είναι αντίθετος με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T'_1 είναι:

$$S'_1 = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Τρίγωνα τύπου T'_2 (που η πλευρά τους έχει μήκος 2) και ο προσανατολισμός τους είναι αντίθετος με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

Το πλήθος των τριγώνων τύπου T'_2 είναι:

$$S'_2 = 1 + 2 + \dots + (n-3) = \frac{(n-3)(n-2)}{2}.$$

.....

Τέλος δημιουργούνται τρίγωνα τύπου T'_k (που η πλευρά τους έχει μήκος k) και ο προσανατολισμός τους είναι αντίθετος με το προσανατολισμό του αρχικού τριγώνου.

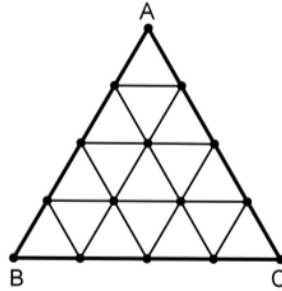
Το πλήθος των τριγώνων τύπου T'_k είναι:

$$S'_k = 1 + 2 + \dots + (n-2k+1) = \frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2}.$$

Όπου $n = 2k$ ή $n = 2k + 1$.

2.5 ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΝΕΩΝ 2011

♦ Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABC του οποίου κάθε πλευρά υποθέτουμε ότι έχει μήκος $k > 0$. Σε κάθε πλευρά του τριγώνου θεωρούμε $n-1$ σημεία που την χωρίζουν σε n ίσα τμήματα. Ενώνουμε τα $n-1$ σημεία της μίας πλευράς με τα $n-1$ σημεία της άλλης πλευράς έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα που δημιουργούνται να είναι παράλληλα με τη τρίτη πλευρά του τριγώνου. Με αυτό τον τρόπο, το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο ABC , χωρίζεται σε n^2 (μικρότερα) ισόπλευρα τρίγωνα των οποίων κάθε πλευρά έχει μήκος $\frac{k}{n}$. Το διπλανό σχήμα είναι ένα παράδειγμα για $n=4$. Θεωρούμε τώρα το σημειοσύνολο S που αποτελείται από τις κορυφές του τριγώνου ABC , από τα $n-1$ σημεία που έχουμε θεωρήσει επάνω σε κάθε πλευρά και από τα σημεία που τέμνονται τα ευθύγραμμα τμήματα. Με κορυφές τα σημεία του σημειοσυνόλου S , δημιουργούνται ρόμβοι τύπου M που οι πλευρές τους έχουν μήκος $\frac{k}{n}$ και ρόμβοι τύπου D που οι πλευρές τους έχουν μήκος $\frac{2k}{n}$. Αν m είναι το πλήθος των ρόμβων τύπου M και d το πλήθος των ρόμβων τύπου D , να βρεθεί η σχέση που εκφράζει τη διαφορά $m-d$ συναρτήσει του n (n ακέραιος μεγαλύτερος του 1).



Λύση

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\frac{k}{n}$ (που δεν ανήκει στις πλευρές του τριγώνου) είναι η διαγώνιος ενός και μόνο ρόμβου τύπου M . Για να υπολογίσουμε λοιπόν το πλήθος των ρόμβων τύπου M , αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται στο εσωτερικό του τριγώνου από την τομή των ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν τα σημεία των πλευρών. Τα τμήματα που είναι παράλληλα με τη πλευρά BC είναι:

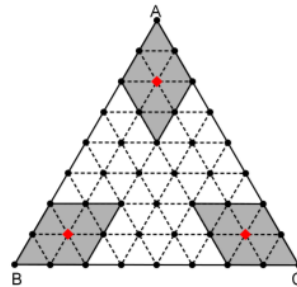
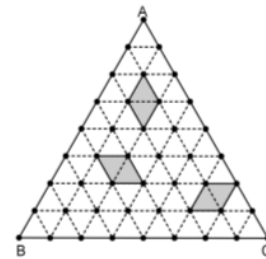
$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Αρα το συνολικό πλήθος των ρόμβων τύπου M είναι:

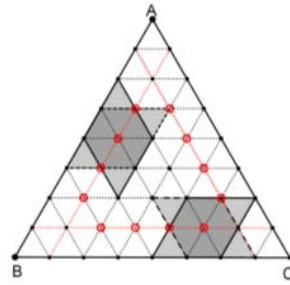
$$m = 3 \frac{n(n-1)}{2}.$$

Για την μέτρηση των ρόμβων τύπου D θα χωρίσουμε τα εσωτερικά σημεία του τριγώνου σε τρεις κατηγορίες.

Η πρώτη κατηγορία αποτελείται από εκείνα τα σημεία που είναι κέντρα ενός και μόνο ρόμβου τύπου D . Αυτά είναι πάντοτε τρία (δηλαδή είναι τρία για κάθε n). Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα σημεία αυτά για $n=8$.



Η δεύτερη κατηγορία αποτελείται από εκείνα τα σημεία που είναι κέντρα δύο και μόνο ρόμβων τύπου D . Τα σημεία αυτά βρίσκονται στα ευθύγραμμα τμήματα που είναι παράλληλα και πλησιέστερα προς τις πλευρές. Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα υπάρχουν $n-4$ σημεία. Άρα συνολικά θα έχουμε $3(n-4)$ σημεία αυτής της κατηγορίας. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα σημεία αυτά για $n=8$.

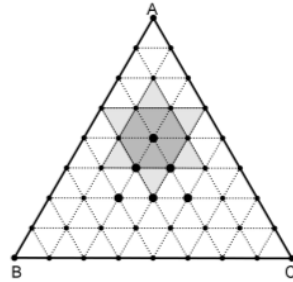


Η Τρίτη κατηγορία τέλος αποτελείται από τα υπόλοιπα σημεία που είναι κέντρα τριών ρόμβων τύπου D . Αυτά τα σημεία είναι

$$1+2+3+\dots+(n-5)=\frac{(n-5)(n-4)}{2}.$$

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα σημεία αυτά για $n=8$.

Με τη βοήθεια των προηγούμενων παρατηρήσεων, καταλήγουμε στον υπολογισμό όλων των ρόμβων τύπου D , που είναι:



$$d = 3 + 3(n-4)2 + 3\frac{(n-5)(n-4)}{2} = \frac{3}{2}(2 + (n-1)(n-4)).$$

(Προφανώς για $n=2$ και $n=3$, ισχύει $d=0$).

Εκτελώντας πράξεις, καταλήγουμε $m-d=3(2n-3)$.

2.6 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ Στο επίπεδο δίνονται n διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες. Να βρεθεί το μέγιστο πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζουν το επίπεδο οι ευθείες αυτές.

Λύση

Έστω $P(n)$ το μέγιστο πλήθος των χωρίων που δημιουργούν οι n ευθείες.

Τότε προφανώς $P(1) = 2$ (διότι μία ευθεία χωρίζει σε δύο χωρία το επίπεδο).



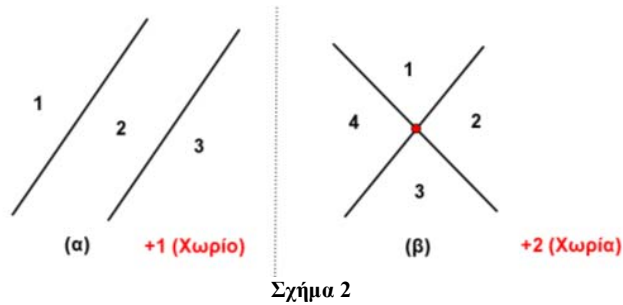
Σχήμα 1

Έστω τώρα και μία δεύτερη ευθεία στο επίπεδο. Τότε υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Αν η δεύτερη ευθεία είναι παράλληλη προς την πρώτη τότε ορίζονται τρία χωρία. Δηλαδή δημιουργείται ένα επί πλέον χωρίο από το “προηγούμενο βήμα” ($P(1)+1=2+1=3$ χωρία).

(Σχήμα 2 (α))



2^η περίπτωση

Αν η δεύτερη ευθεία τέμνει την πρώτη τότε ορίζονται τέσσερα χωρία. Δηλαδή δημιουργούνται δύο επί πλέον χωρία από το “προηγούμενο βήμα” ($P(1) + 2 = 2 + 2 = 4$). (Σχήμα 2 (β))

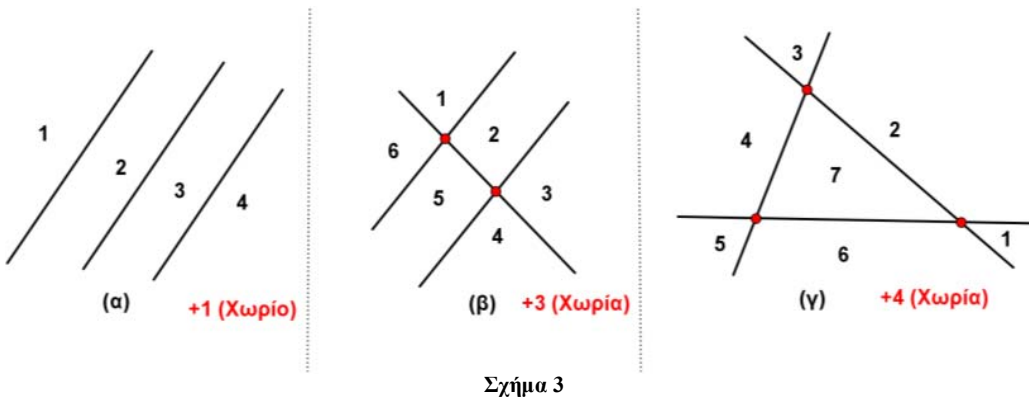
Έστω ακόμη μία τρίτη ευθεία στο επίπεδο. Τότε υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Αν η τρίτη ευθεία είναι παράλληλη προς τις άλλες δύο (προσέξτε το σχήμα 3(α) σαν συνέχεια του σχήματος 2(α)) τότε ορίζονται τέσσερα χωρία. Δηλαδή δημιουργείται ένα επί πλέον χωρίο από το “προηγούμενο βήμα” ($P(2) + 1$). (Σχήμα 3 (α))

2^η περίπτωση

Αν η τρίτη ευθεία τέμνει τις άλλες δύο (προσέξτε το σχήμα 3(β) σαν συνέχεια του σχήματος 2(α)) τότε ορίζονται έξι χωρία. Δηλαδή δημιουργούνται τρία επί πλέον χωρία από το “προηγούμενο βήμα” ($P(2) + 3$). (Σχήμα 3 (β))



3^η περίπτωση

Αν η τρίτη ευθεία τέμνει τις άλλες δύο (προσέξτε το σχήμα 3(γ) σαν συνέχεια του σχήματος 2(β)) τότε ορίζονται επτά χωρία. Δηλαδή δημιουργούνται τέσσερα επί πλέον χωρία από το “προηγούμενο βήμα” ($P(2) + 4$). (Σχήμα 3 (γ))

Σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρούμε ότι με την “είσοδο” μίας νέας ευθείας, δημιουργούνται $k + 1$ καινούργια χωρία, όπου k είναι το πλήθος των σημείων τομής της “νεοεισερχόμενης” ευθείας με τις ήδη υπάρχουσες.

Η προηγούμενη παρατήρηση, μαζί με το δεδομένο ότι “η $(n + 1)$ -οστή ευθεία μπορεί να τέμνει τις n προϋπάρχουσες ευθείες σε n το πολύ σημεία”, μας οδηγεί στη δημιουργία του παρακάτω αναγωγικού τύπου για το μέγιστο πλήθος $P(n)$ των χωρίων που δημιουργούν οι n διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες:

$$P(n + 1) \leq P(n) + n + 1.$$

Από τη προηγούμενη ανισότητα, έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} P(1) = 2 \\ P(2) \leq P(1) + 2 \\ P(3) \leq P(2) + 3 \\ \vdots \\ P(n-1) \leq P(n-2) + n-1 \\ P(n) \leq P(n-1) + n \end{array} \right\}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη, καταλήγουμε:

$$P(n) \leq \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

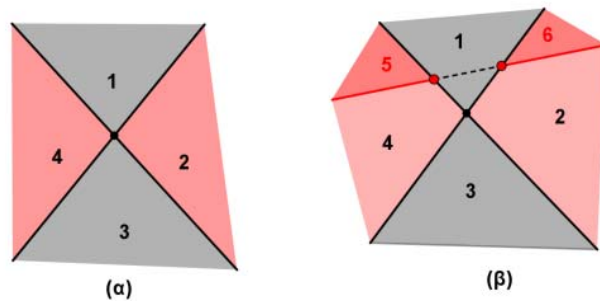
Προφανώς η ισότητα ισχύει όταν οι ευθείες τέμνονται ανά δύο και ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο.

2.7 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Στο επίπεδο δίνονται n διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες που τέμνονται ανά δύο και ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Να βρεθεί το πλήθος των φραγμένων και μη φραγμένων χωρίων που δημιουργούνται.

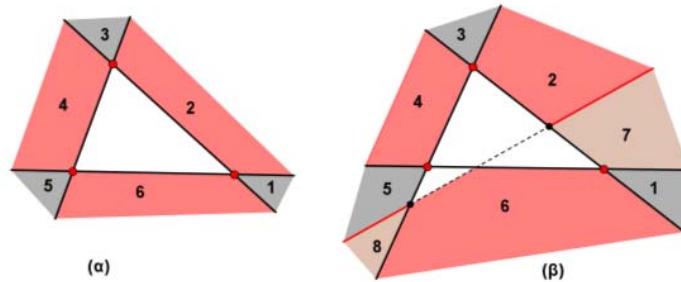
Λύση

Οποιαδήποτε δύο γειτονικά και μη φραγμένα χωρία χωρίζονται από ημιευθείες (Σχήματα 4(α) και 5(α)). Δηλαδή έχουν κοινό σύνορο ημιευθεία.



Σχήμα 4

Αν τώρα θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε ευθεία (τέμνουσα), τότε κάθε μία από τις δύο ημιευθείες που αποτελούν μέρη της, χωρίζουν δύο ακριβώς μη φραγμένα χωρία άρα τα μη φραγμένα χωρία είναι $2n$.



Σχήμα 5

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $P(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$ που μας δίνει το πλήθος όλων των

χωρίων, καταλήγουμε ότι το πλήθος των φραγμένων χωρίων είναι: $\frac{n^2 - 3n + 2}{2}$.

2.8 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στο επίπεδο θεωρούμε $k + n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες οι οποίες ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο (όπου k ακέραιος με $k > 1$ και n θετικός ακέραιος). Από τις ευθείες αυτές, k είναι παράλληλες μεταξύ τους ενώ οι υπόλοιπες n δεν είναι παράλληλες μεταξύ τους (τέμνονται ανά δύο). Επίσης δεν υπάρχει κάποια ευθεία (από τις n) που να είναι παράλληλη με τις k παράλληλες ευθείες. Όλες οι παραπάνω ευθείες τεμνόμενες χωρίζουν το επίπεδο σε χωρία (πχ τριγωνικά, πολυγωνικά και μη φραγμένα).

Ένα χωρίο θα το ονομάζουμε “καλό” όταν βρίσκεται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες.

Αν σε ένα σχηματισμό, το ελάχιστο πλήθος των “καλών” χωρίων είναι 176 και το μέγιστο 221, να βρεθούν τα k, n .

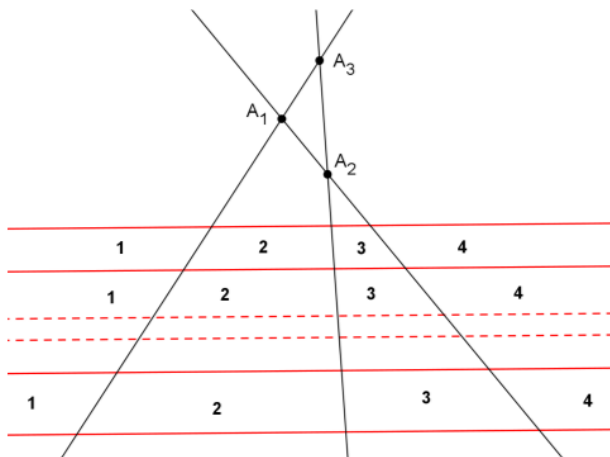
Προφανώς οι k (διαφορετικές μεταξύ τους) παράλληλες ευθείες ορίζουν $k - 1$ διαδοχικές παράλληλες “λωρίδες” στο επίπεδο.

Επίσης οι n διαφορετικές, μη παράλληλες μεταξύ τους ευθείες, τέμνονται ανά δύο σε

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ σημεία.}$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

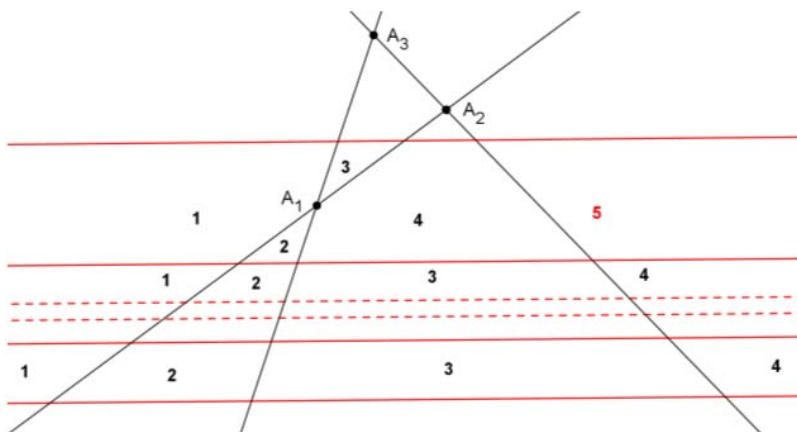
1^η Περίπτωση: Τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών (που τέμνονται ανά δύο), βρίσκονται εκτός των παράλληλων “λωρίδων”.



Σχήμα 6

Στη περίπτωση αυτή κάθε μία από τις n ευθείες ορίζει σε κάθε “λωρίδα” $n+1$ “καλά” χωρία. Οπότε ορίζονται συνολικά $(k-1)(n+1)$ συνολικά “καλά” χωρία. Στο (Σχήμα 1) βλέπουμε τα “καλά” χωρία που δημιουργούνται από $n=3$ ευθείες.

Αν τώρα ένα από τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών το θεωρήσουμε μέσα σε μία λωρίδα, τότε στη λωρίδα αυτή θα δημιουργηθεί ένα επί πλέον “καλό” χωρίο (Σχήμα 2).

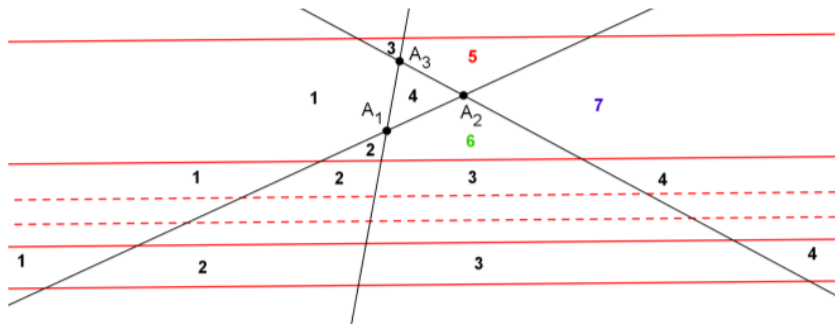


Σχήμα 7

Άρα $(k-1)(n+1)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός “καλών” χωρίων που μπορούν να δημιουργηθούν, διότι με την είσοδο καθενός από τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής στις λωρίδες, αυξάνεται ο αριθμός των “καλών” χωρίων.

2^η Περίπτωση: Τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών (που τέμνονται ανά δύο), βρίσκονται εντός των παράλληλων λωρίδων.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία εισαγωγής των σημείων τομής μέσα στις “λωρίδες”, θα προστίθεται κάθε φορά και ένα “καλό” χωρίο. Έτσι στο τέλος θα έχουμε επί πλέον $\binom{n}{2}$ “καλά” χωρία.



Σχήμα 8

Τελικά ο μέγιστος αριθμός των “καλών” χωρίων είναι:

$$(k-1)(n+1) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Εφόσον τώρα (σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος), ο ελάχιστος αριθμός των “καλών” χωρίων είναι 176 και ο μέγιστος 221, θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (k-1)(n+1) = 176 \\ (k-1)(n+1) + \frac{n(n-1)}{2} = 221 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(n+1) = 176 \\ 176 + \frac{n(n-1)}{2} = 221 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(n+1) = 176 \\ 176 + \frac{n(n-1)}{2} = 221 \end{cases}. \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $k=17, n=10$.

2^{ος} Τρόπος υπολογισμού του μέγιστου αριθμού των καλών χωρίων.

Με τη συλλογιστική που αναπτύχθηκε στον προηγούμενο τρόπο, ο μέγιστος αριθμός των καλών χωρίων επιτυγχάνεται όταν τα σημεία τομής των τεμνομένων ευθειών βρεθούν μέσα στις λωρίδες που δημιουργούν οι παράλληλες ευθείες.

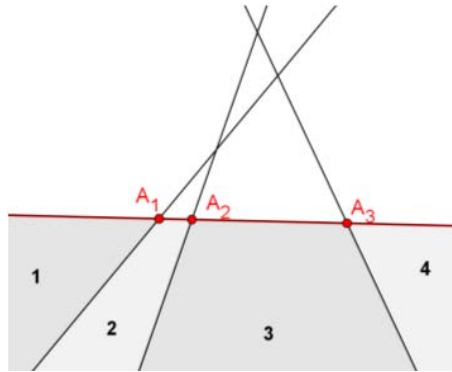
Θα υπολογίσουμε λοιπόν όλα τα χωρία που δημιουργούνται από τις $k + n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα χωρία που βρίσκονται εκτός των παραλλήλων (έχοντας πάντα υπ' όψιν ότι τα σημεία τομής των τεμνομένων ευθειών βρίσκονται μέσα στις λωρίδες που δημιουργούν οι παράλληλες ευθείες).

Έστω $p(m)$ το πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από m ευθείες οι οποίες δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο.

Προφανώς $p(1) = 2$.

Θεωρούμε τώρα ότι $p(m)$ είναι το πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από τις m ευθείες και φέρουμε μία επί πλέον ευθεία με σκοπό να υπολογίσουμε επαγωγικά το $p(m+1)$.

Προφανώς $p(m+1) = p(m) + r$. Όπου r είναι το πλήθος των επί πλέον χωρίων που “δημιουργούνται” με τη χάραξη της $m+1$ ^{ης} ευθείας.



Με τη χάραξη λοιπόν της $m+1$ ^{ης} ευθείας “δημιουργούνται” τόσα επί πλέον χωρία, όσα είναι τα σημεία τομής της με τις υπόλοιπες ευθείες αυξημένα κατά ένα.

Αν δηλαδή η $m+1$ ευθεία είναι παράλληλη με κάποια από τις προηγούμενες ευθείες, τότε τα σημεία τομής της θα είναι $m-1$ και κατά συνέπεια “δημιουργούνται” $r = m$ επί πλέον χωρία.

Αν όμως η $m+1$ ευθεία δεν είναι παράλληλη με κάποια από τις προηγούμενες ευθείες, τότε τα σημεία τομής της θα είναι m και κατά συνέπεια “δημιουργούνται” $r = m+1$ επί πλέον χωρία.

Αν λοιπόν οι ευθείες δεν είναι ανά δύο παράλληλες μεταξύ τους και δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο, μπορούμε να διατυπώσουμε την αναδρομική σχέση: $p(m) = p(m-1) + m$ και

$$p(1) = 2. \text{ Από τη σχέση αυτή προκύπτει: } p(m) = \frac{m^2 + m + 2}{2}.$$

Θεωρώντας τώρα τα δεδομένα του προβλήματος, συμπεραίνουμε ότι τα χωρία που “δημιουργούνται”, είναι: $\frac{n^2 + n + 2}{2} + k(n+1)$.

Τα καλά χωρία προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τα $2(n+1)$ που βρίσκονται εκτός των παραλλήλων ευθειών.

2.9 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

★ Στο εσωτερικό κάθε μίας από τις πλευρές τετραγώνου θεωρούμε n διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Να βρεθεί ο πλήθος όλων των τριγώνων που έχουν κορυφές τα σημεία αυτά.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Από τα $4n$ σημεία που βρίσκονται στις πλευρές του τετραγώνου μπορούμε να δημιουργήσουμε $\binom{4n}{3}$ τριάδες σημείων. Όλες βέβαια αυτές οι τριάδες σημείων, δεν ορίζουν τρίγωνα γιατί κάποιες

τριάδες αποτελούνται από συνευθειακά σημεία. Σε κάθε πλευρά υπάρχουν $\binom{n}{3}$ το πλήθος τριάδες που αποτελούνται από συνευθειακά σημεία. Άρα δημιουργούνται:

$$\binom{4n}{3} - 4\binom{n}{3} = 2n^2(5n-3) \text{ τρίγωνα.}$$

Λύση (2^{ος} τρόπος)

Τα τρίγωνα που δημιουργούνται, μπορούμε να τα χωρίσουμε σε δύο τύπους.

Σαν τρίγωνα πρώτου τύπου θεωρούμε αυτά των οποίων και οι τρεις κορυφές ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές του τετραγώνου ενώ σαν τρίγωνα δευτέρου τύπου θεωρούμε αυτά που οι δύο κορυφές ανήκουν στην ίδια πλευρά του τετραγώνου και η τρίτη κορυφή σε διαφορετική πλευρά.

Το πλήθος των τριγώνων πρώτου τύπου είναι $4n^3$ (*) και το πλήθος των τριγώνων δευτέρου τύπου είναι $3 \cdot 4n \binom{n}{2}$ (**), άρα το πλήθος των τριγώνων είναι $4n^3 + 3 \cdot 4n \binom{n}{2} = 2n^2(5n-3)$.

(*) Τις τρεις από τις τέσσερις πλευρές του τετραγώνου (επάνω στις οποίες θα βρίσκονται οι κορυφές των τριγώνων) μπορούμε να τις επιλέξουμε με $\binom{4}{3} = 4$ τρόπους. Ταυτόχρονα μπορούμε να επιλέξουμε κάθε κορυφή με n διαφορετικούς τρόπους. Άρα η εκλογή τριγώνων πρώτου τύπου μπορεί να γίνει (σύμφωνα με τη πολλαπλασιαστική αρχή) με $4n^3$ διαφορετικούς τρόπους.

(**) Τις δύο από τις τέσσερις πλευρές του τετραγώνου (επάνω στις οποίες θα βρίσκονται οι κορυφές των τριγώνων) μπορούμε να τις επιλέξουμε με $\binom{4}{2} = 3 \cdot 4$ τρόπους. Ταυτόχρονα μπορούμε να επιλέξουμε τη μία κορυφή με n διαφορετικούς τρόπους και τις δύο άλλες κορυφές (που θα ανήκουν στην ίδια πλευρά με $\binom{n}{2}$ διαφορετικούς τρόπους. Άρα (σύμφωνα με τη

πολλαπλασιαστική αρχή) η εκλογή τριγώνων δευτέρου τύπου μπορεί να γίνει με $3 \cdot 4n \binom{n}{2}$ διαφορετικούς τρόπους.

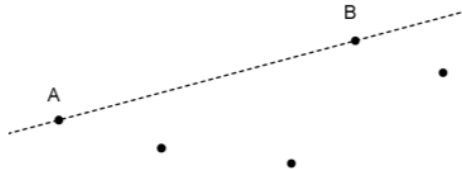
2.10 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ Δίνεται στο επίπεδο ένα σύνολο S από n το πλήθος ($n \geq 3$) διαφορετικά μεταξύ τους σημεία που ανά τρία δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\frac{n(n-2)}{3}$ τουλάχιστον τρίγωνα με κορυφές σημεία του συνόλου S , που δεν περιέχουν άλλο στοιχείο του συνόλου S .

Λύση

Ένα τρίγωνο που δεν περιέχει άλλα στοιχεία του σημειοσυνόλου S θα το ονομάζουμε “κενό”. Προσπαθούμε λοιπόν να υπολογίσουμε το ελάχιστο πλήθος των “κενών” τριγώνων που μπορούν να δημιουργηθούν.

Είναι γνωστό ότι η ευθεία που ορίζουν δύο οποιαδήποτε διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του επιπέδου, χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα. Καταχρηστικά θα λέμε ότι **το ζεύγος των σημείων χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα**.



Σχήμα 9

Στη περίπτωση μας υπάρχουν ζευγάρια σημείων που χωρίζουν (Σχήμα 10) το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα με τέτοιο τρόπο ώστε στο ένα ημιεπίπεδο να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο του σημειοσυνόλου S και στο άλλο να μην υπάρχουν σημεία του σημειοσυνόλου S . Τα ζευγάρια των σημείων του S που έχουν την προηγούμενη ιδιότητα τα ονομάζουμε “τύπου ένα”.

Ενώ τα ζευγάρια των σημείων του S που δεν έχουν την προηγούμενη ιδιότητα (δηλαδή υπάρχουν σημεία του S και στα δύο ημιεπίπεδα), τα ονομάζουμε “τύπου δύο”.

Το πλήθος s_1 των ζευγαριών “τύπου ένα” είναι το πολύ n και παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν τα σημεία του S ορίζουν κυρτό πολύγωνο. (Δηλαδή $s_1 \leq n$)

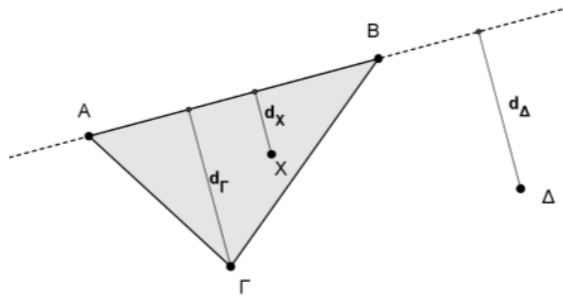
Επειδή όμως το συνολικό πλήθος των ζευγαριών είναι $\binom{n}{2}$, συμπεραίνουμε ότι το πλήθος s_2 των

ζευγαριών “τύπου δύο” θα είναι τουλάχιστον $\binom{n}{2} - n$. (Δηλαδή $s_2 \geq \binom{n}{2} - n$)

Θεωρούμε τώρα τυχόν ζευγάρι σημείων A, B “τύπου ένα” και έστω Γ το σημείο του S που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το ευθύγραμμο τμήμα AB (*). Τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι “κενό”.

Δηλαδή δεν υπάρχει άλλο σημείο του S στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$ (για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την εις άτοπο απαγωγή).

Έστω ότι υπάρχει σημείο X του S στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$ (Σχήμα 11). Τότε από την ανισότητα των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και ABX καταλήγουμε $d_X < d_\Gamma$, άτοπο διότι το σημείο Γ απέχει την ελάχιστη απόσταση από το ευθύγραμμο τμήμα AB .



Σχήμα 10

Αποδείξαμε λοιπόν ότι σε κάθε ζευγάρι “τύπου ένα” αντιστοιχεί ένα τουλάχιστον “κενό” τρίγωνο. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι σε κάθε ζευγάρι “τύπου δύο” αντιστοιχούν δύο τουλάχιστον “κενά” τρίγωνα.

Σε κάθε περίπτωση όμως, κάθε “κενό” τρίγωνο έχει προσμετρηθεί **το πολύ τρεις φορές**.

Συγκεντρώνοντας τους συμβολισμούς και τις σχέσεις που αποδείξαμε προηγουμένως, έχουμε:

s_1 : πλήθος ζευγαριών “τύπου ένα”

Ισχύει: $s_1 \leq n$

s_2 : πλήθος ζευγαριών “τύπου δύο”

Ισχύει: $s_1 + s_2 = \binom{n}{2}$ και $s_2 \geq \binom{n}{2} - n$

Άρα για το πλήθος t των κενών τριγώνων θα ισχύει:

$$t \geq \frac{s_1 + 2s_2}{3} = \frac{s_1 + s_2 + s_2}{3} = \frac{\binom{n}{2} + s_2}{3} \geq \frac{2\binom{n}{2} - n}{3} = \frac{n(n-2)}{3}.$$

(*) Στη περίπτωση που υπάρχει και δεύτερο σημείο το οποίο απέχει ελάχιστη απόσταση, διαλέγουμε ένα, χωρίς να υπάρχει πρόβλημα.

2.11 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Σε κυρτό n -γωνο οι διαγωνίες του (ανά τρεις) δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Να βρεθεί το πλήθος των τριγώνων που οι πλευρές τους βρίσκονται στις πλευρές ή στις διαγωνίες του πολυγώνου.

Λύση

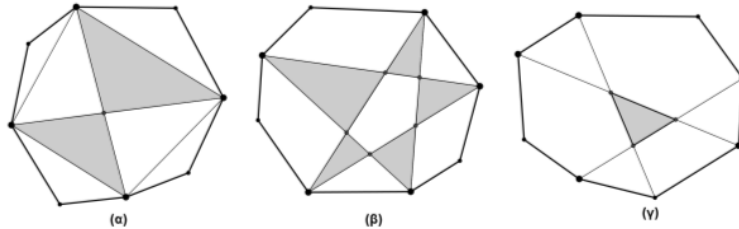
Το σύνολο των τριγώνων που δημιουργούνται το χωρίζουμε σε τέσσερις κλάσεις S_0, S_1, S_2, S_3 .

Η κλάση S_3 περιλαμβάνει τα τρίγωνα των οποίων και οι τρεις κορυφές τους είναι κορυφές του πολυγώνου.

Προφανώς $|S_3| = \binom{n}{3}$.

Η κλάση S_2 περιλαμβάνει τα τρίγωνα των οποίων οι δύο κορυφές τους είναι κορυφές του πολυγώνου.

Παρατηρούμε ότι για τέσσερα οποιαδήποτε σημεία του πολυγώνου (Σχήμα 12(α)) δημιουργούνται τέσσερα ακριβώς τρίγωνα της κλάσης S_2 . Άρα $|S_2| = 4 \cdot \binom{n}{4}$.



Σχήμα 11

Η κλάση S_1 περιλαμβάνει τα τρίγωνα των οποίων μία μόνο κορυφή τους είναι κορυφή και του πολυγώνου.

Παρατηρούμε ότι για πέντε οποιαδήποτε σημεία του πολυγώνου (Σχήμα 12(β)) δημιουργούνται πέντε ακριβώς τρίγωνα της κλάσης S_1 . Άρα $|S_1| = 5 \cdot \binom{n}{5}$.

Η κλάση τέλος S_0 περιλαμβάνει τα τρίγωνα των οποίων οι κορυφές τους δεν είναι κορυφές του πολυγώνου.

Παρατηρούμε ότι για έξι οποιαδήποτε σημεία του πολυγώνου (Σχήμα 12(γ)) δημιουργείται ένα ακριβώς τρίγωνο της κλάσης S_0 . Άρα $|S_0| = \binom{n}{6}$.

Το συνολικό πλήθος των τριγώνων δίνεται από το άθροισμα $|S_0| + |S_1| + |S_2| + |S_3|$.

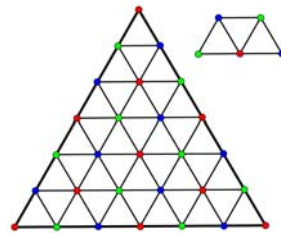
2.12 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Έστω n ακέραιος με $n = 3k$ και (k ακέραιος με $k \geq 2$).

Ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά ισόπλευρα τρίγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Στο σχήμα φαίνεται η περίπτωση για $n = 6$ ($k = 2$) καθώς και ένα “πλακίδιο” (τραπέζιο) που δημιουργείται από τρία μικρά ισόπλευρα τρίγωνα. Χρωματίζουμε τα σημεία του πλέγματος με τρία χρώματα (Κόκκινο, Μπλε και Πράσινο), με τέτοιο τρόπο ώστε δύο γειτονικά σημεία να έχουν διαφορετικό χρώμα. Τέλος, ένα “πλακίδιο” θα το λέμε: “Κόκκινο, Μπλε ή Πράσινο”, όταν το μέσο της μεγάλης βάσης του, έχει “Κόκκινο, Μπλε ή Πράσινο” χρώμα αντίστοιχα.

Να βρεθεί το πλήθος όλων των “πλακιδίων” που δημιουργούνται, καθώς και πόσα από αυτά είναι “Κόκκινα, Μπλε, Πράσινα”. Μέρος ενός πλακιδίου μπορεί να καλύπτεται από άλλο δημιουργούμενο πλακίδιο.

Λύση



Το μέσο της μεγάλης βάσης του πλακιδίου θα το ονομάζουμε (για συντομία) “κέντρο” του πλακιδίου.

Κάθε σημείο που βρίσκεται στις πλευρές του τριγώνου (εκτός από τις κορυφές του) είναι το κέντρο ενός και μόνο πλακιδίου. Σε κάθε πλευρά υπάρχουν $n-1$ σημεία που μπορούν να είναι κέντρα πλακιδίων. Έτσι υπάρχουν $3(n-1)$ πλακίδια που τα κέντρα τους βρίσκονται στις πλευρές του τριγώνου (στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη περίπτωση για $n=6$).

Κάθε άλλο σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου είναι το κέντρο έξι πλακιδίων. Στο εσωτερικό του τριγώνου υπάρχουν

$$1+2+3+\dots+(n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \text{ σημεία. Άρα υπάρχουν } 6 \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2} = 3(n-1)(n-2)$$

πλακίδια.

Προσθέτοντας βρίσκουμε ότι υπάρχουν συνολικά $3(n-1)^2$ πλακίδια.

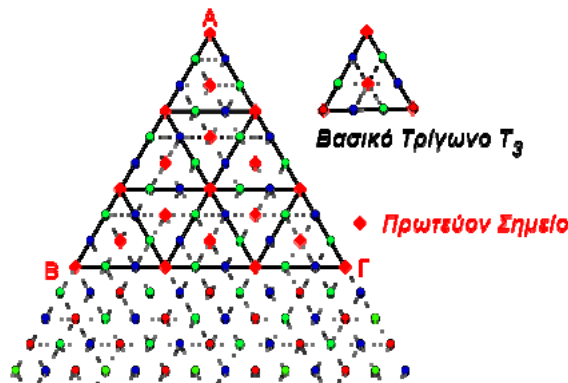
Για να υπολογίσουμε τώρα το πλήθος των κόκκινων-μπλε-πράσινων πλακιδίων, αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος των κόκκινων-μπλε-πράσινων σημείων που βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του μεγάλου τριγώνου.

Το χρώμα με το οποίο ξεκινάμε και χρωματίζουμε την κορυφή A του μεγάλου ισόπλευρου τριγώνου, το ονομάζουμε “πρωτεύον χρώμα” και τα άλλα δύο “δευτερεύοντα χρώματα”.

Αν υποθέσουμε ότι $n=3$ ($k=1$), τότε δημιουργείτε ένα “βασικό ισόπλευρο τρίγωνο”, το οποίο συμβολίζουμε με T_3 .

Αν χρωματίσουμε με το πρωτεύον χρώμα μία κορυφή του τριγώνου T_3 , τότε και οι δύο άλλες κορυφές του (καθώς και το περικέντρό του) θα έχουν το ίδιο χρώμα.

Κάθε μεγάλο ισόπλευρο τρίγωνο αποτελείται από $1+3+\dots+(2k-1)=k^2$ βασικά ισόπλευρα τρίγωνα T_3 των οποίων οι κορυφές και τα περικέντρα έχουν το “πρωτεύον χρώμα”.



Από τον τρόπο χρωματισμού των σημείων (τα γειτονικά σημεία έχουν διαφορετικό χρώμα) προκύπτει ότι τα σημεία B και Γ έχουν το “πρωτεύον χρώμα”.

Σε κάθε πλευρά του τριγώνου $AB\Gamma$, υπάρχουν $k-1$ σημεία που έχουν το “πρωτεύον χρώμα” και $2k$ σημεία που έχουν τα “δευτερεύοντα χρώματα”.

Άρα δημιουργούνται $3(k-1)$ κόκκινα πλακίδια (αν βέβαια το “πρωτεύον χρώμα” είναι το κόκκινο).

Το πλήθος των μπλε σημείων ισούται με το πλήθος των πράσινων σημείων, οπότε δημιουργούνται $3k$ μπλε και $3k$ πράσινα πλακίδια.

Στο εσωτερικό του τριγώνου υπάρχουν k^2 σημεία που είναι τα περίκεντρα των βασικών τριγώνων T_3 και κατά συνέπεια έχουν το “πρωτεύον χρώμα”.

Υπάρχουν επίσης $1+2+\dots+(k-2)=\frac{(k-2)(k-1)}{2}$ που δεν είναι τα περίκεντρα βασικών τριγώνων, αλλά έχουν το “πρωτεύον χρώμα”.

Άρα έχουμε τελικά: $6k^2 + 6\frac{(k-2)(k-1)}{2} + 3(k-1) = 3(3k^2 - 2k + 1)$ κόκκινα πλακίδια.

Στο εσωτερικό του τριγώνου, υπάρχουν συνολικά $1+2+\dots+(3k-2)=\frac{(3k-2)(3k-1)}{2}$ σημεία.

Αν από αυτά αφαιρέσουμε τα $k^2 + \frac{(k-2)(k-1)}{2} = \frac{3k^2 - 3k + 2}{2}$ που έχουν το “πρωτεύον χρώμα”, μένουν $3k(k-1)$ σημεία που έχουν τα “δευτερεύοντα χρώματα”.

Έτσι θα έχουμε $\frac{3k(k-1)}{2}$ μπλε και $\frac{3k(k-1)}{2}$ πράσινα σημεία στο εσωτερικό του τριγώνου.

Τελικά έχουμε: $3(3k^2 - 2k + 1)$ κόκκινα πλακίδια, $3k(3k-2)$ μπλε και $3k(3k-2)$ πράσινα πλακίδια.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ως “πρωτεύον χρώμα” το μπλε ή το πράσινο, οπότε προκύπτουν ανάλογες απαντήσεις.

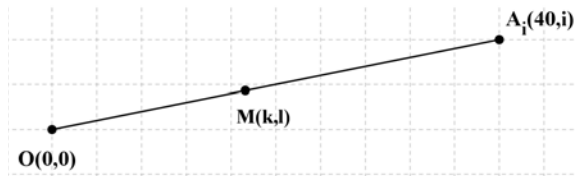
2.13 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A_1(40,1), A_2(40,2), \dots, A_{40}(40,40)$ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1, OA_2, \dots, OA_{40}$. Ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy θα το ονομάζουμε “καλό” όταν οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί και βρίσκεται στο εσωτερικό (δηλ. δεν ταυτίζεται με τα άκρα) ενός ευθυγράμμου τμήματος OA_i $i=1,2,3,\dots,40$. Ένα από τα παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα, θα το ονομάζουμε επίσης “καλό”, όταν περιέχει ένα τουλάχιστον “καλό” σημείο.

Να υπολογισθεί το πλήθος των “καλών” σημείων και το πλήθος των “καλών” ευθυγράμμων τμημάτων.

Λύση

Στη λύση που ακολουθεί, θα συμβολίζουμε με $MK\Delta(k,l)$, το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακεραίων αριθμών k,l .



Ένα σημείο $M(k,l)$ θα ανήκει στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος OA_i , αν και μόνο αν, τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{OA_i}$ έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0 < k \leq 40$).

Δηλαδή πρέπει να ισχύει $\frac{i}{40} = \frac{l}{k}$ (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0 < k \leq 40$).

Για να είναι τώρα το ευθύγραμμο τμήμα OA_i “καλό”, θα πρέπει το κλάσμα $\frac{i}{40}$ να μην είναι ανάγωγο (ώστε να δημιουργούνται ισοδύναμα με το $\frac{i}{40}$ κλάσματα με ακέραιους όρους που θα δημιουργούν το συντελεστή διεύθυνσης $\frac{l}{k}$ και τις αντίστοιχες συντεταγμένες του “καλού” σημείου $M(k,l)$).

Για να υπάρχει λοιπόν “καλό” σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα OA_i (ώστε να χαρακτηριστεί και το ίδιο ως “καλό”) θα πρέπει $MKA(40,i) > 1$.

Αν τώρα $MKA(40,i) > 1$, τότε θα υπάρχουν $MKA(40,i) - 1$ “καλά” σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα OA_i .

Στο σημείο $A_2(40,2)$ αντιστοιχεί το “καλό” ευθύγραμμο τμήμα OA_2 , στο οποίο ανήκει το “καλό” σημείο $(20,1)$.

Στο σημείο $A_4(40,4)$ αντιστοιχεί το “καλό” ευθύγραμμο τμήμα OA_4 , στο οποίο ανήκουν τα “καλά” σημεία $(10,1)$ $(20,2)$ $(30,3)$.

Με αυτό τον τρόπο δημιουργούμε τον πίνακα:

$A_2(40,2)$	$MKA(40,2)=2$	1	$A_{40}(40,40)$	$MKA(40,40)=40$	39
$A_4(40,4)$	$MKA(40,4)=4$	3	$A_{38}(40,38)$	$MKA(40,38)=2$	1
$A_5(40,5)$	$MKA(40,5)=5$	4	$A_{36}(40,36)$	$MKA(40,36)=4$	3
$A_6(40,6)$	$MKA(40,6)=2$	1	$A_{35}(40,35)$	$MKA(40,35)=5$	4
$A_8(40,8)$	$MKA(40,8)=8$	7	$A_{34}(40,34)$	$MKA(40,34)=2$	1
$A_{10}(40,10)$	$MKA(40,10)=10$	9	$A_{32}(40,32)$	$MKA(40,32)=8$	7
$A_{12}(40,12)$	$MKA(40,12)=4$	3	$A_{30}(40,30)$	$MKA(40,30)=10$	9
$A_{14}(40,14)$	$MKA(40,14)=2$	1	$A_{28}(40,28)$	$MKA(40,28)=4$	3
$A_{15}(40,15)$	$MKA(40,15)=5$	4	$A_{26}(40,26)$	$MKA(40,26)=2$	1
$A_{16}(40,16)$	$MKA(40,16)=8$	7	$A_{25}(40,25)$	$MKA(40,25)=5$	4
$A_{18}(40,18)$	$MKA(40,18)=2$	1	$A_{24}(40,24)$	$MKA(40,24)=8$	7
$A_{20}(40,20)$	$MKA(40,20)=20$	19	$A_{22}(40,22)$	$MKA(40,22)=2$	1
		60			80

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των “καλών” τμημάτων είναι 24 και το πλήθος των καλών σημείων 140.

Παρατηρήσεις

1. Ο παραπάνω πίνακας έχει ευρεία ανάπτυξη για διδακτικούς λόγους.
2. Ο υπολογισμός του πίνακα διευκολύνεται σημαντικά με τη χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων του μέγιστου κοινού διαιρέτη: $MKA(k,l) = MKA(l,k) = MKA(l-k,k) = MKA(|l-k|,|k|)$.

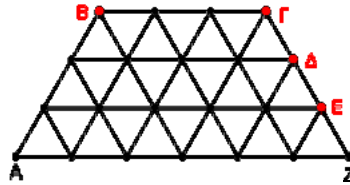
3. Το πλήθος των “καλών” χωρίων μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης φ του EULER. Είναι γνωστό ότι $n - \varphi(n)$ παριστά το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με τον n και δεν είναι πρώτοι προς αυτόν.

$$\text{Επειδή όμως } 40 = 5 \cdot 2^3, \text{ έχουμε: } \varphi(40) = 40 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 16.$$

Άρα το πλήθος των “καλών” τμημάτων είναι $40 - \varphi(40) = 24$.

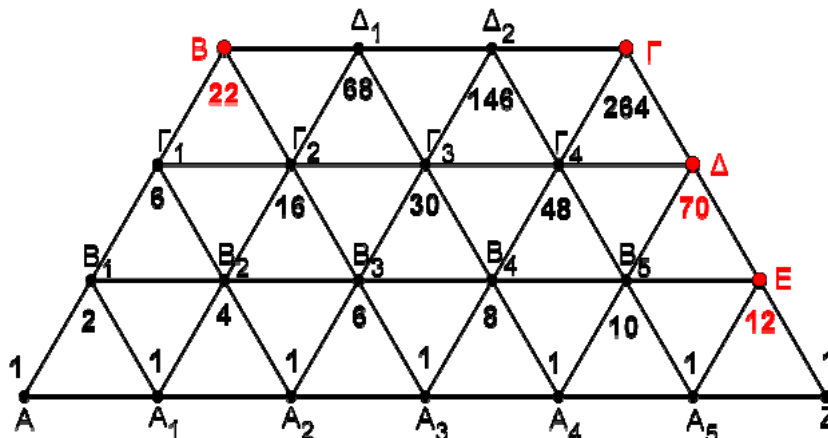
2.14 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Το ισοσκελές τραπέζιο που αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα) είναι το σχεδιάγραμμα μιας πόλης. Όλα τα ευθύγραμμα τμήματα είναι δρόμοι. Οι επισκέπτες της πόλης ξεκινούν από το σημείο A και μπορούν να κινούνται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή λοξά δεξιά). Πόσες είναι οι δυνατές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει ένας επισκέπτης (ξεκινώντας από το σημείο A) για να φτάσει στα σημεία B, Γ, Δ, E που βρίσκονται τα αξιοθέατα της πόλης.



Λύση

Θα συμβολίζουμε με μικρά (πεζά) γράμματα το πλήθος των τρόπων με τους οποίους ένας επισκέπτης μπορεί να προσεγγίσει τα αντίστοιχα σημεία (που συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα).



Πχ: Με β_i συμβολίζουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους ένας επισκέπτης μπορεί να προσεγγίσει το σημείο (διασταύρωση) B_i .

Προφανώς $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = z = 1$, διότι τα αντίστοιχα σημεία μπορούν να προσεγγιστούν με ένα μόνο τρόπο (δεδομένου ότι ο επισκέπτης μπορεί να κινηθεί μόνο προς τα δεξιά για την προσέγγισή τους).

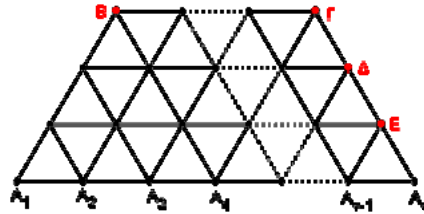
Σε κάθε άλλη περίπτωση, οι τρόποι προσέγγισης προκύπτουν από το άθροισμα των τρόπων προσέγγισης σημείων γειτονικών προς τα αριστερά και προς τα κάτω (κάτω αριστερά και κάτω δεξιά).

Έτσι έχουμε: $\beta_1 = \alpha + \alpha_1 = 2$, $\beta_2 = \beta_1 + \alpha_1 + \alpha_2 = 4$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τους τρόπους προσέγγισης που φαίνονται παραστατικότερα στο σχήμα.

2.15 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Το ισοσκελές τραπέζιο (που φαίνεται στο διπλανό σχήμα) αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα που οι πλευρές τους έχουν μήκος 1. Η πλευρά A_1B έχει μήκος 3 και η μεγάλη βάση του A_1A_v έχει μήκος $v-1$. Ξεκινάμε από το σημείο A_1 και κινούμαστε κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή λοξά δεξιά). Υπολογίστε (συναρτήσει του v ή ανεξάρτητα από αυτό) το πλήθος όλων των δυνατών διαδρομών που μπορούμε να ακολουθήσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε στα σημεία B, Γ, Δ, E . Όπου v ακέραιος μεγαλύτερος του 3.

Λύση

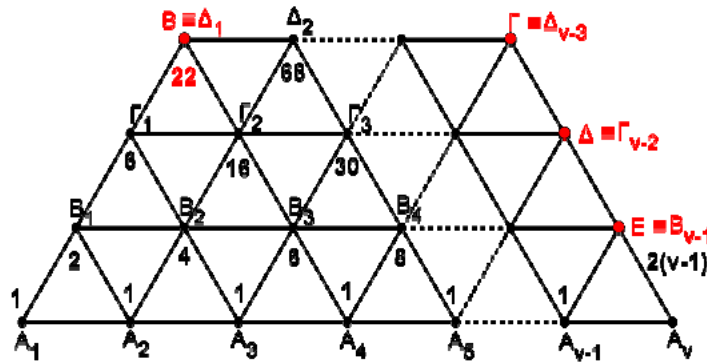
Στη μεγάλη βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $A_1, A_2, A_3, \dots, A_v$.

Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{v-1} \equiv E$.

Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{v-2} \equiv \Delta$.

Στη μικρή τέλος βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $B \equiv A_1, A_2, A_3, \dots, A_{v-3} \equiv \Gamma$.

Θα συμβολίζουμε με μικρά (πεζά) γράμματα το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε τα αντίστοιχα σημεία (που συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα).



Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τους τρόπους προσέγγισης των σημείων της τρίτης από κάτω γραμμής και της μικρής βάσης.

$$\begin{aligned}\gamma_i &= 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_{i+1}) - (\beta_i + \beta_{i+1}) = \\ &= 2(2 + 4 + \dots + 2(i+1)) - (2 + 2i + 2) = \\ &= 4(1 + 2 + \dots + (i+1)) - (4 + 2i) = \\ &= 2(i+1)(i+2) - 2(i+2) = \\ &= 2i(i+2) \quad i = 1, 2, 3, \dots, (v-2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_m &= 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{m+1}) - (\gamma_m + \gamma_{m+1}) = \\ &= 4(\underbrace{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + (m+1)(m+3)}_S) - 2(1 \cdot 3 + (m+1)(m+3)) = \\ &= 4 \frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6} - 2(1 \cdot 3 + (m+1)(m+3)) = \\ &\quad (\dots \text{ και μετά από πράξεις, καταλήγουμε } \dots) \\ &= \frac{2}{3} m(2m^2 + 12m + 19) \quad m = 1, 2, 3, \dots, (v-3).\end{aligned}$$

Τελικά έχουμε: $\beta = 22$, $\gamma = \frac{2}{3}(v-3)(2v^2 + 1)$, $\delta = 2v(v-2)$ και $\varepsilon = 2(v-1)$.

Υπολογισμός του αθροίσματος: $S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + (m+1)(m+3)$.

Χρησιμοποιώντας την ισότητα $x(x+2) = x^2 + 2x$ για $x = 1, x = 2, \dots, x = m$, έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \cdot 3 = 1^2 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 = 2^2 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 = 3^2 + 2 \cdot 3 \\ \vdots \\ m(m+2) = m^2 + 2m \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + 2 \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(2m+7)}{6}.$$

Θέτουμε όπου m το $m+1$ και έχουμε $S = \frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}$.

3 ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ.....	2
1.1 Αρχή Του Αθροίσματος.....	2
1.2 Πρόβλημα (Αρχή Του Αθροίσματος).....	2
1.3 Πρόβλημα (Αρχή Του Αθροίσματος).....	2
1.4 Πρόβλημα (Αρχή Του Αθροίσματος).....	4
1.5 Πολλαπλασιαστική Αρχή.....	4
1.6 Παραδειγμα (Πολλαπλασιαστική Αρχή).....	5
1.7 Παραδειγμα (Πολλαπλασιαστική Αρχή).....	5
1.8 Διατάξεις.....	6
1.9 Παραδειγμα (Διατάξεις).....	6
1.10 Επαναληπτικές Διατάξεις.....	6
1.11 Παραδειγμα (Επαναληπτικές Διατάξεις).....	6
1.12 Παραδειγμα (Επαναληπτικές Διατάξεις).....	7
1.13 Πρόβλημα (Επαναληπτικές Διατάξεις).....	7
1.14 Μεταθέσεις.....	7
1.15 Επαναληπτικές Μεταθέσεις.....	7
1.16 Συνδυασμοί.....	7
1.17 Παραδειγμα (Συνδυασμοί).....	8
1.18 Επαναληπτικοί Συνδυασμοί.....	8
1.19 Παραδειγμα (Επαναληπτικοί Συνδυασμοί).....	8
1.20 Παραδειγμα (Επαναληπτικές Μεταθέσεις).....	9
1.21 Παραδειγμα (Επαναληπτικές Μεταθέσεις).....	10
2 ΣΥΝΘΕΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.....	17
2.1 Πρόβλημα.....	17
2.2 Πρόβλημα.....	17
2.3 Πρόβλημα (Τριγωνικό Πλέγμα).....	17
2.4 Πρόβλημα (Γενίκευση Τριγωνικού Πλέγματος).....	19
2.5 Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων 2011.....	22
2.6 Πρόβλημα.....	23
2.7 Πρόβλημα.....	25
2.8 πρόβλημα.....	26
2.9 Πρόβλημα.....	30
2.10 Πρόβλημα.....	31
2.11 Πρόβλημα.....	32
2.12 Πρόβλημα.....	33
2.13 Πρόβλημα.....	35
2.14 Πρόβλημα.....	37
2.15 Πρόβλημα.....	38

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

(Σημειώσεις Προετοιμασίας για Μαθηματικούς Διαγωνισμούς)

Κοντοκώστας Δημήτρης

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	1
1.1 Η Αρχή της Απαρίθμησης: Πως μετράμε πόσα αντικείμενα υπάρχουν σε ένα σύνολο;	1
1.2 Η Προσθετική Αρχή	2
1.3 Η Πολλαπλασιαστική Αρχή	3
1.4 Η Αρχή της Διπλής Μέτρησης	5
1.5 Η Αρχή του Χρωματισμού	6
1.6 Υποσύνολα και Διωνυμικοί Συντελεστές	6
1.7 Το Θεώρημα του Νεύτωνα και το τρίγωνο του Pascal	9
1.8 Επιλογές : διατάξεις και συνδυασμοί	11
1.9 Η Αρχή της Εισαγωγής - Εξαγωγής	14
1.10 Η Αρχή του Dirichlet ή της περιστεροφωλίας	16
1.10.1 Λίγη Θεωρία	16
1.10.2 Παραδείγματα	18
1.11 Ασκήσεις Κεφαλαίου	27

ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Woman lives but in her lord;
Count to ten, and man is bored.
With this the gist and sum of it,
What earthly good can come of it?

"General Review of the Sex Situation" (1937)
Dorothy Parker (1893-1967)
(Αμερικανίδα κριτικός και ευθυμογράφος)

1.1 Η Αρχή της Απαρίθμησης: Πως μετράμε πόσα αντικείμενα υπάρχουν σε ένα σύνολο;

Εντελώς συνοπτικά, η **Συνδυαστική** είναι ένα κομμάτι των Μαθηματικών που επικεντρώνεται στη "μέτρηση" του πλήθους των αντικειμένων ενός συνόλου. Η Συνδυαστική ασχολείται τόσο με την εξεύρεση χρήσιμων τρόπων μέτρησης, όσο και με την πραγματοποίηση των μετρήσεων καθ'αυτών.

Για παράδειγμα, αν μπορούμε να μεταβούμε από την Αθήνα στη Κατερίνη με δύο μεταφορικά μέσα (αυτοκίνητο και λεωφορείο), και από την Κατερίνη στη Θεσσαλονίκη με τρία μεταφορικά μέσα (αυτοκίνητο, λεωφορείο και ταξί), μπορεί να αναρωτηθούμε για το πλήθος των τρόπων που υπάρχουν για να μεταβούμε από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη διαμέσου Κατερίνης. Το ερώτημα αυτό εμπίπτει αμέσως στην αρμοδιότητα της Συνδυαστικής. Θα απαντηθεί λίγο πιο κάτω παράγραφο, αλλά αξίζει να σκεφτείτε από τώρα την απάντηση μόνοι σας.

Πως μετράμε λοιπόν π.χ. τα αντικείμενα σε έναν σωρό; Ο απλούστερος τρόπος είναι απλώς να απαριθμήσουμε ένα προς ένα τα αντικείμενα του σωρού. Δείχνουμε δηλαδή κάθε ένα αντικείμενο διαδοχικά και αυξάνουμε κατά ένα το πλήθος των μετρημένων ως εκείνη τη στιγμή αντικειμένων, έως ότου δείξουμε (και μετρήσουμε) όλα τα αντικείμενα του σωρού ακριβώς από μια φορά το καθένα τους. Αυτή η μέθοδος είναι η απλούστερη δυνατή, αλλά και η βασικότερη όλων. Κάθε άλλη μέθοδος μέτρησης εξαρτάται από αυτή άμεσα ή έμμεσα. Την ονομάζουμε **Αρχή της Απαρίθμησης** και μια σχετικώς αυστηρή μορφή της με το όνομα **Προσθετική Αρχή** δίνεται λίγο πιο κάτω.

Ας συμφωνήσουμε πως στο εξής θα ενδιαφερόμαστε για μετρήσεις σε σωρούς με πεπερασμένο πλήθος ανατικειμένων. Η μαθηματική ορολογία για τους σωρούς είναι **σύνολα**, και για τα αντικείμενα είναι **στοιχεία**. Εμείς θα χρησιμοποιούμε αδιακρίτως και τη μαθηματική ορολογία αλλά και τους ανεπίσημους χαρακτηρισμούς (σωροί, αντικείμενα). Θα υποθέσουμε πως τα πολύ στοιχειώδη για τα σύνολα είναι γνωστά (όπως π.χ. ο συμβολισμός τους, οι πράξεις μεταξύ συνόλων κτλ). Είναι βολικό να συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου S με $|S|$, που μας θυμίζει την απόλυτη τιμή των πραγματικών αριθμών. Ο αριθμός $|S|$ ονομάζεται **πληθικότητα** ή **πληθικός αριθμός** του S και για τα πεπερασμένα σύνολα S είναι ένας φυσικός αριθμός. Αν το σύνολο S δεν έχει στοιχεία θα το συμβολίζουμε ως συνήθως $\emptyset$ και τότε φυσικά θα είναι $|S| = |\emptyset| = 0$. Ας σημειώσουμε πως θα συναντήσουμε καταστάσεις όπου ένα σύνολο

S θα **διαμερίζεται** σε πεπερασμένο πλήθος άλλων συνόλων $S_1, S_2, \dots, S_n$. Αυτό θα σημαίνει πως ανά δύο τα σύνολα $S_1, S_2, \dots, S_n$ δε θα έχουν κοινά στοιχεία (θα είναι δηλαδή **ξένα μεταξύ τους** όπως λέμε αλλιώς) και ταυτόχρονα η ένωσή όλων τους θα είναι το S .

Στη συνέχεια παραθέτουμε τους βασικότερους τρόπους μέτρησης καθώς και μερικά παραδείγματα εξοικειώσης με αυτούς. Το υλικό αυτό αποτελεί μια σύντομη και ήπια εισαγωγή στις μεθόδους και το περιεχόμενο της Συνδυαστικής. Αλλά δεν θα πρέπει να ξεγελαστείτε. Παρότι ο μέθοδοι θα φανούν μάλλον ταπεινές, στην πραγματικότητα είναι πανίσχυρες, και δίχως πιθανώς να το αντιληφθείτε θα βρεθείτε σε θέση να ασχολείστε με εκπληκτικά ερωτήματα μέτρησης. Οι πιο προχωρημένες μέθοδοι της Συνδυαστικής που αποτελούν αντικείμενο μεταπτυχιακών Σπουδών στα Μαθηματικά βασίζονται στα λίγα που θα παραθέσουμε πιο κάτω.

1.2 Η Προσθετική Αρχή

Η μορφή της Προσθετικής Αρχής που μας ενδιαφέρει να διατυπώσουμε επισήμως, αναφέρεται στη μικρή γενίκευση της Αρχής της Απαρίθμησης όπου υπάρχουν δύο ή περισσότεροι σωροί από διαφορετικά αντικείμενα και θέλουμε να μετρήσουμε συνολικά πόσα αντικείμενα υπάρχουν σε όλους τους σωρούς:

Προσθετική Αρχή. Αν ένα πεπερασμένο σύνολο αντικειμένων S διαμερίζεται σε (θυμηθείτε: ξένα μεταξύ τους) υποσύνολα $S_1, S_2, \dots, S_n$, τότε το πλήθος των αντικειμένων του S ισούται με το άθροισμα των πληθών των αντικειμένων στα $S_1, S_2, \dots, S_n$, δηλαδή

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_n|$$

Με την ευκαιρία, εξηγήστε το γιατί θεωρούμε την Προσθετική Αρχή ως γενίκευση του απλού τρόπου απαρίθμησης των αντικειμένων ενός μοναδικού σωρού;

Μερικά παραδείγματα θα μας βοηθήσουν:

Παράδειγμα 1.1 Ένας μαθητής έχει να επιλέξει για κάποιο Σαββατιάτικο απόγευμα μεταξύ της ανάγνωσης ενός από τα τρία σχολικά μαθήματα στα οποία θα εξεταστεί τη Δευτέρα, ή της συμμετοχής του στον καθιερωμένο αγώνα ποδοσφαίρου της γειτονιάς του ή στον αγώνα καλαθοσφαίρισης των συμμαθητών του στην αυλή του σχολείου.

Μας ενδιαφέρει να βρούμε (να μετρήσουμε) το πλήθος των διαφορετικών αντικειμένων απασχόλησης του μαθητή για το συγκεκριμένο Σαββατιάτικο απόγευμα.

Το ερώτημα είναι τόσο απλό που η απάντηση δίνεται αμέσως: 5. Αν θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε την Προσθετική Αρχή επισήμως, θα μπορούσαμε να το κάνουμε κάπως έτσι: τα αντικείμενα απασχόλησης διαμερίζονται στα σχολικά μαθήματα (τα οποία είναι 3) και στις αθλοπαιδιές (οι οποίες είναι 2). Συνεπώς το ζητούμενο πλήθος είναι $3 + 2 = 5$. $\square$

Ένα μεγάλο πρόβλημα στην προσπάθειά μας να προβούμε σε τέτοιες μετρήσεις προκύπτει από το γεγονός πως δεν έχουμε πάντοτε ξεκάθαρο στο μυαλό μας το τι ακριβώς θέλουμε να μετρήσουμε. Π.χ. στο τελευταίο παράδειγμα μπορεί εύκολα να προκύψει πρόβλημα αν δεν ξεκαθαρίσουμε το τι εννοούμε λέγοντας "αντικείμενο απασχόλησης". Αν λοιπόν θεωρήσουμε πως διαφορετικά αντικείμενα απασχόλησης είναι μονάχα το "διάβασμα" και η "αθλοπαιδιά", τότε προφανώς η σωστή απάντηση στο ερώτημα είναι $1 + 1 = 2$.

Το σημείο αυτό είναι αρκετά πιο "λεπτό" από ότι ίσως φαίνεται εδώ. Θα ήταν λοιπόν εξαιρετικά χρήσιμο σε ότι ακολουθεί να ξεκαθαρίζουμε πρώτα στο μυαλό μας το τι ακριβώς επιθυμούμε να μετρήσουμε.

Παράδειγμα 1.2 Μια σακούλα περιέχει 5 καραμέλες και μια άλλη 6 μπισκότα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα γλύκισμα από τις δύο αυτές σακούλες;

Φανερά οι δυνατές επιλογές μας είναι όσες και το πλήθος των αντικειμένων που περιέχουν οι δύο αυτές σακούλες. Δηλαδή σύμφωνα με την προσθετική αρχή κατά $5 + 6 = 11$ τρόπους. $\square$

Ας σκεφτούμε τώρα για το αν αυτό είναι που θέλουμε να μετρήσουμε. Αν δεν ενδιαφερόμαστε να διακρίνουμε τις 5 καραμέλες ως ξεχωριστά αντικείμενα και ομοίως για τα 6 μπισκότα, τότε το ενδιαφέρον μας περιορίζεται στο αν η επιλογή μας θα είναι καραμέλα ή μπισκότο, δηλαδή τότε έχουμε μόνο $1 + 1 = 2$ επιλογές. Αν πάλι δεν ενδιαφερόμαστε να διακρίνουμε μεταξύ καραμέλας ή μπισκότου και απλώς τα θεωρήσουμε αμφότερα ως "γλύκισμα", τότε ασφαλώς έχουμε μία μοναδική επιλογή!

Θα πρέπει λοιπόν πάντοτε να ξεκαθαρίζουμε το τι ακριβώς επιθυμούμε να μετρήσουμε. . .

1.3 Η Πολλαπλασιαστική Αρχή

Υπάρχουν διάφορες γενικεύσεις της Προσθετικής Αρχής. Η πλέον ενδιαφέρουσα γενίκευση έχει δικό της όνομα:

Πολλαπλασιαστική Αρχή. Αν $S_1, S_2, \dots, S_n$ είναι κάποια πεπερασμένα σύνολα αντικειμένων ξένα μεταξύ τους ανά δύο, τότε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους επιλέγουμε ένα αντικείμενο από *κάθε ένα* σύνολο από τα S_i ισούται με

$$|S_1| \cdot |S_2| \cdots |S_n|.$$

Παρατηρήστε πως στη διατύπωση της Πολλαπλασιαστικής Αρχής χρησιμοποιήσαμε τις λέξεις και φράσεις "πλήθος τρόπων", "επιλογή". Αυτή είναι συνηθισμένη ορολογία όταν εκτελούμε μετρήσεις αντικειμένων σε σύνολα. Σύντομα θα μας γίνει συνήθεια. Ένας άλλος τρόπος παρουσίασης της Αρχής αυτής θα ήταν να δώσουμε όνομα στο σύνολο που περιέχει όλους τους τρόπους επιλογής ενός αντικειμένου από καθένα από τα S_i και να μιλήσουμε για το πλήθος των αντικειμένων αυτού του συνόλου. Δηλαδή στην πραγματικότητα, και η Πολλαπλασιαστική Αρχή αναφέρεται όπως και η Προσθετική στο πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου· όπως ακριβώς θα περιμέναμε από τις γενικές εξαγγελίες στην αρχή των σημειώσεων σχετικά με την έννοια της Συνδυαστικής.

Με την ευκαιρία, με ποια έννοια νομίζετε πως η Πολλαπλασιαστική Αρχή αποτελεί γενίκευση της Προσθετικής;

Ορίστε μια ακόμη διατύπωση της πολλαπλασιαστικής αρχής όταν περιοριζόμαστε σε δύο μόνο σύνολα:

Αν μια επιλογή μπορεί να γίνει κατά m τρόπους και μια επόμενη επιλογή κατά n τρόπους, τότε υπάρχουν $n \cdot m$ τρόποι με τους οποίους οι επιλογές αυτές μπορούν να γίνουν διαδοχικά.

Διατυπώστε μια γενικότερη μορφή της πολλαπλασιαστικής αρχής με παρόμοιο τρόπο. Να και μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.3 Αν υπάρχουν δύο μεταφορικά μέσα για να μεταβούμε από την Αθήνα στην Κατερίνη (αυτοκίνητο και λεωφορείο), και τρία μεταφορικά μέσα για να μεταβούμε από την Κατερίνη στη Θεσσαλονίκη (αυτοκίνητο, λεωφορείο και ταξί), πόσοι τρόποι υπάρχουν για να μεταβούμε από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη διαμέσου Κατερίνης;

Θα θεωρήσουμε πως οι τρόποι είναι διαφορετικοί όταν σε κάποιο τμήμα της διαδρομής είτε από την Αθήνα προς την Κατερίνη είτε από την Κατερίνη προς τη Θεσσαλονίκη χρησιμοποιούμε διαφορετικό μεταφορικό μέσο.

Ουσιαστικά μας ζητείται να υπολογίσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα μεταφορικό μέσο για το πρώτο μέρος της διαδρομής και ένα μεταφορικό μέσο για το δεύτερο μέρος της διαδρομής. Γνωρίζουμε πως υπάρχουν 2 επιλογές για το πρώτο μέρος της διαδρομής και 3 επιλογές για το δεύτερο μέρος της. Τότε σύμφωνα με την Πολλαπλασιαστική Αρχή έχουμε συνολικά $2 \cdot 3 = 6$ διαφορετικές επιλογές για να μεταβούμε από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη διαμέσου Κατερίνης. $\square$

Στο παράδειγμα αυτό μπορούμε να μετρήσουμε το ζητούμενο πλήθος των διαφορετικών τρόπων μετάβασης από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη με μια απλή καταγραφή όλων αυτών των τρόπων:

αυτ/το, αυτ/το	αυτ/το, λεωφορείο	αυτ/το, ταξί
λεωφορείο, αυτ/το	λεωφορείο, λεωφορείο	λεωφορείο, ταξί

Βρίσκουμε λοιπόν πάλι πως οι διαφορετικοί τρόποι είναι 6. Η δύναμη της Πολλαπλασιαστικής Αρχής έγκειται στο γεγονός πως δεν είναι απαραίτητο να καταγράψουμε όλους τους δυνατούς τρόπους έναν προς έναν. Φανταστείτε να ήταν αυτοί συνολικά 10.000! Δε συμφωνείτε πως το να βρούμε το πλήθος των τρόπων δίχως απαραίτητως να τους καταγράψουμε όλους αποτελεί σαφές πλεονέκτημα; Αν συμφωνείτε, τότε έχετε αντιληφθεί και το λόγο ύπαρξης της Συνδυαστικής!

Αλλά γιατί νομίζετε πως χρησιμοποιήσαμε την Πολλαπλασιαστική Αρχή στο παράδειγμα αντί της Προσθετικής; Θα βοηθήσει ίσως να επαναδιατυπώσουμε την Προσθετική Αρχή με παρόμοια φρασεολογία με αυτή της Πολλαπλασιαστικής, ώστε να αναφέρεται και αυτή σε πλήθος επιλογών που επιθυμούμε να πραγματοποιήσουμε· π.χ. κάπως έτσι:

Προσθετική Αρχή (δεύτερη διατύπωση). Αν $S_1, S_2, \dots, S_n$ είναι κάποια πεπερασμένα σύνολα αντικειμένων ξένα μεταξύ τους ανά δύο, τότε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους επιλέγουμε ένα αντικείμενο από κάποιο σύνολο από τα S_i ισούται με

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_n|$$

Την Πολλαπλασιαστική αρχή τη χρησιμοποιούμε όταν επιλέγουμε ένα αντικείμενο από κάθε ένα σύνολο από τα S_i : δηλαδή ένα από το S_1 και ένα από το S_2 κ.ο.κ. και ένα από το S_n . Από την άλλη, την Προσθετική Αρχή τη χρησιμοποιούμε όταν πιλέγουμε ένα αντικείμενο από κάποιο σύνολο από τα S_i : δηλαδή ένα από το S_1 ή ένα από το S_2 κ.ο.κ. ή ένα από το S_n . Αντιλαμβάνεστε τώρα το λόγο που στο Παράδειγμα 1.3 χρησιμοποιούμε την Πολλαπλασιαστική Αρχή αντί της Προσθετικής;

Ας σημειώσουμε επίσης πως και στις δύο αρχές είναι σημαντικό να θεωρούμε τα σύνολα S_i ξένα μεταξύ τους, ώστε επιλέγοντας ένα αντικείμενο (στοιχείο) σε κάποιο από αυτά, να μην σημαίνει τούτο πως επιλέξαμε ταυτόχρονα και κάποιο στοιχείο ενός από τα υπόλοιπα σύνολα! Π.χ. στο Παράδειγμα 1.3, αν S_1 και S_2 είναι τα σύνολα των μεταφορικών μέσων μετάβασης από την Αθήνα στη Νάουσα και από τη Νάουσα στη Θεσσαλονίκη αντιστοίχως τότε $S_1 = \{\text{αυτοκίνητο, λεωφορείο}\}$, $S_2 = \{\text{αυτοκίνητο, λεωφορείο, ταξί}\}$. Επιλέγοντας το αυτοκίνητο του S_1 για να μεταβούμε από την Αθήνα στη Νάουσα, ασφαλώς δεν σημαίνει πως έχουμε επιλέξει ταυτόχρονα και το αυτοκίνητο του S_2 για τη μετάβαση από τη Νάουσα στη Θεσσαλονίκη! Το ότι συμβολίσαμε ως "αυτοκίνητο" ένα στοιχείο τόσο του S_1 όσο και του S_2 είναι προφανώς κακή επιλογή μας. Θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει πολύ καλύτερο συμβολισμό για τα στοιχεία των S_1, S_2 ώστε να γίνεται φανερό πως επιλέγοντας ένα στοιχείο του S_1 για το πρώτο τμήμα της διαδρομής μας αυτό δεν επιβάλλει την επιλογή ενός συγκεκριμένου στοιχείου του S_2 για το δεύτερο τμήμα της. Τέτοιες λεπτομέρειες γίνονται συχνά αιτία λάθους υπολογισμών. Πρέπει λοιπόν να δείχνετε τη δέουσα προσοχή.

Παράδειγμα 1.4 Μια κοπέλα ετοιμάζεται για τη βραδυνή της έξοδο. Έχει να επιλέξει μεταξύ 6 ζευγαριών παπουτσιών για τα παπούτσια που θα φορέσει. Επίσης, έχει να επιλέξει μεταξύ 7 φορεμάτων για τη φούστα της, 12 μπλουζών, 3 ζευγαριών σκουλαρικών, 2 ρολογιών, 4 αλυσίδων λαιμού και 12 σετ εσώρουχων.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να ντυθεί η κοπέλα για τη βραδυνή της έξοδο;

Ασφαλώς θα θεωρήσουμε πως η κοπέλα θα επιλέξει 1 φούστα, 1 μπλούζα, 1 ζευγάρι σκουλαρίκια κτλ. Και θα θεωρήσουμε πως δύο ενδυμασίες είναι διαφορετικές όταν μία τουλάχιστον από τις επιμέρους επιλογές είναι διαφορετικές.

Για τη ζητούμενη απάντηση θα χρησιμοποιήσουμε φυσικά την Πολλαπλασιαστική Αρχή (βλέπετε το γιατί;) που μας δίνει $6 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 12 = 725.740$ διαφορετικούς τρόπους βραδυνης ένδυσης! $\square$

Ας σημειώσουμε πως οι διαδοχικές επιλογές στις οποίες αναφέρεται η Πολλαπλασιαστική αρχή είναι δυνατόν να είναι αλληλοεξαρτόμενες. Αυτό δε φάνηκε στα προηγούμενα Παραδείγματα. Ας δουλέψουμε λοιπόν ένα ακόμη:

Παράδειγμα 1.5 Θέλουμε να τοποθετήσουμε τα τρία παιδιά μιας οικογένειας στη σειρά (από δεξιά προς τα αριστερά) ώστε να τα φωτογραφίσουμε. Αν A, B, Γ τα τρία παιδιά, τότε όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τα διατάξουμε στη σειρά είναι οι εξής 6: $(A, B, \Gamma), (A, \Gamma, B), (B, A, \Gamma), (B, \Gamma, A), (\Gamma, A, B), (\Gamma, B, A)$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής: Θέλουμε να τοποθετήσουμε τα τρία παιδιά σε τρεις θέσεις (αριστερή, μεσαία, δεξιά). Μία οποιαδήποτε τοποθέτηση μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας ένα παιδί για την αριστερή θέση, κατόπιν ένα άλλο παιδί για τη μεσαία θέση και τέλος ένα άλλο παιδί για τη δεξιά θέση. Η πρώτη επιλογή μπορεί να γίνει κατά 3 τρόπους αφού στην αριστερή θέση μπορούμε να τοποθετήσουμε οποιοδήποτε από τα αδέρφια. Όμως η επόμενη επιλογή για τη μεσαία θέση, μπορεί πλέον να γίνει κατά 2 μόνο τρόπους αφού το ένα από τα αδέρφια έχει ήδη τοποθετηθεί στην αριστερή θέση. Και τέλος η επόμενη επιλογή για τη δεξιά θέση μπορεί να γίνει κατά 1 μόνο τρόπο αφού δύο από τα αδέρφια έχουν ήδη τοποθετηθεί στην αριστερή και τη μεσαία θέση. Οπότε η (γενικευμένη) πολλαπλασιαστική αρχή (για τρεις συνεχόμενες επιλογές) μας βεβαιώνει πως οι αυτές οι διαδοχικές επιλογές, δηλαδή οι τοποθετήσεις που μας ενδιαφέρουν, μπορούν να γίνουν κατά $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ τρόπους, όπως ήδη γνωρίζουμε.

Παρατηρήστε πως στο παράδειγμα αυτό, κάθε επόμενη επιλογή (οπότε και το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί) εξαρτάται από τις επιλογές που έχουν ήδη γίνει. Στα επόμενα θα συναντήσουμε συχνά την κατάσταση αυτή. $\square$

Την Πολλαπλασιαστική Αρχή θα τη συναντήσουμε ξανά πιο κάτω. Πρώτα όμως αξίζει να δούμε μια ακόμη εκπληκτικά απλή Αρχή μέτρησης με εκπληκτικά αποτελέσματα.

1.4 Η Αρχή της Διπλής Μέτρησης

Η Αρχή της Διπλής Μέτρησης. Μετρώντας τα στοιχεία ενός συνόλου με δύο διαφορετικούς τρόπους, τα αποτελέσματα είναι τα ίδια.

Ένα παράδειγμα θα ρίξει φως στον τρόπο εφαρμογής της Αρχής.

Παράδειγμα 1.6 (Το Λήμμα των χειραψιών) Σε κάθε συγκέντρωση, το πλήθος των ατόμων που χαιρετούν με χειραψία ένα περιττό πλήθος άλλων ατόμων, είναι άρτιο. $\square$

Απόδειξη. Ας είναι $A_1, A_2, \dots, A_n$ τα άτομα στη συγκέντρωση. Ας συμβολίσουμε με x_i το πλήθος των χειραψιών του τυχαίου A_i . Θέλουμε να δείξουμε πως μεταξύ των x_i υπάρχει άρτιο πλήθος περιττών αριθμών.

Αν οι A_i, A_j αντάλλαξαν χειραψία θα λέμε πως τα διατεταγμένα ζεύγη $(A_i, A_j), (A_j, A_i)$ συναιύθησαν. Θα δείξουμε το ζητούμενο μετρώντας με δύο διαφορετικούς τρόπους το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών που συναιύθησαν:

1η μέτρηση: Αφού για κάθε άτομο A_i υπάρχουν x_i άλλα άτομα με τα οποία αντάλλαξε χειραψία, υπάρχουν συνολικά $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$ διατεταγμένα ζεύγη που συναιύθησαν.

2η μέτρηση: Υποθέτοντας πως συνολικά ανταλλάχθηκαν y κανονικές χειραψίες (δηλαδή μη-διατεταγμένες), ας παρατηρήσουμε πως κάθε μία από αυτές γεννά ακριβώς δύο διατεταγμένα ζεύγη που συναιύθησαν (π.χ. μια χειραψία μεταξύ των A_2 και A_3 γεννά τα διατεταγμένα ζεύγη (A_2, A_3) και (A_3, A_2)). Οπότε υπάρχουν ακριβώς $2y$ διατεταγμένα ζεύγη που συναιύθησαν. Αυτό αληθεύει ακόμη κι όταν $y = 0$.

Αφού σύμφωνα με την Αρχή της Διπλής Μέτρησης τα δύο αποτελέσματα είναι ίδια, έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 2y.$$

Συνεπώς το άθροισμα των x_i είναι άρτιο. Αυτό σημαίνει πως άρτιο πλήθος από αυτούς είναι περιττοί αριθμοί όπως ζητούσαμε να δείξουμε.

(Αν δε βλέπετε αμέσως το γιατί, συμπεράνετε πρώτα πως όλοι μαζί οι περιττοί x_i πρέπει να έχουν άρτιο άθροισμα, οπότε πράγματι θα πρέπει να υπάρχουν άρτιοι σε πλήθος περιττοί). $\square$

Στην πορεία θα δούμε κι άλλες εφαρμογές της Αρχής της Διπλής Μέτρησης.

1.5 Η Αρχή του Χρωματισμού

Η αρχή αυτή δεν έχει επίσημο κανόνα. Συνίσταται στο να μετράμε το πλήθος κάποιων γεωμετρικών συνήθως αντικειμένων προσδίδοντάς τους καταλλήλως ορισμένα χρώματα. Έτσι στο Παράδειγμα 1.7 που ακολουθεί, χρωματίζουμε με έναν ιδιαίτερο τρόπο τα τετραγώνια ενός τετραγωνισμένου πίνακα. Για περισσότερη εξοικείωση με την "Αρχή" του χρωματισμού καλείστε να ασχοληθείτε με τις Ασκήσεις 1.38 - 1.41.

Ας σταθεροποιήσουμε την ορολογία μας τόσο για το Παράδειγμα όσο και για τις Ασκήσεις ονομάζοντας $n \times m$ **τετραγωνισμένο πίνακα** ή στο εξής απλώς **πίνακα**, ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων n και m το οποίο διαιρέθηκε σε $n \times m$ ίσα τετράγωνα, τα οποία στο εξής θα ονομάζουμε και **κουτάκια** ή **κουτιά**, με ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Ας ονομάσουμε ιδιαίτερα **ντόμινο** έναν πίνακα 2×1 . Στο εξής όποτε ντόμινο και πίνακας αναφέρονται μαζί, θα υποθέτουμε πως τα κουτάκια τους είναι ίσα. Δύο ντόμινο τοποθετημένα στο επίπεδο θα τα ονομάζουμε **επικαλυπτόμενα** ακριβώς όταν έχουν κάποιο κοινό εσωτερικό σημείο. Οπότε αν για παράδειγμα δύο ντόμινο στο επίπεδο μοιράζονται μια πλευρά τους και τίποτε άλλο, αυτά δεν θα είναι επικαλυπτόμενα. Μία τοποθέτηση μη επικαλυπτόμενων ντόμινο επάνω σε έναν πίνακα ώστε να τον καλύπτουν πλήρως δίχως κάποιο μέρος τους να βρίσκεται στο εξωτερικό του πίνακα, την ονομάζουμε **κάλυψη** του πίνακα (από ντόμινο). Την έννοια της κάλυψης τη γενικεύουμε και για κάθε υποσύνολο ενός πίνακα που προκύπτει με αφαίρεση κάποιων κουτιών του (κρατούμε όμως όσα μέρη του συνόρου των κουτιών είναι απαραίτητα ώστε ο κομμένος πίνακας να γίνεται χωρίο με σύνορο κάποιες κλειστές πολυγωνικές γραμμές).

Παράδειγμα 1.7 Από έναν 8×8 πίνακα αφαιρούμε δύο γωνιακά του κουτάκια που ανήκουν στην ίδια διαγώνιο. Δείξτε πως είναι αδύνατο να καλύψουμε τον κομμένο πίνακα με μη επικαλυπτόμενα ντόμινο. $\square$

Λύση. Χρωματίζουμε τα 64 κουτάκια του αρχικού πίνακα εναλλάξ με τα χρώματα άσπρο και μαύρο όπως σε μια σκακιάρα. Οπότε ο πίνακας θα έχει 32 άσπρα και 32 μαύρα κουτάκια.

Παρατηρήστε πως τα δύο γωνιακά κουτάκια οποιασδήποτε διαγώνιου του έχουν το ίδιο χρώμα, άσπρο για τη μια διαγώνιο και μαύρο για την άλλη. Συνεπώς αφαιρώντας τα, ο νέος κομμένος πίνακας θα έχει είτε 30 άσπρα και 32 μαύρα κουτάκια, είτε 32 μαύρα και 30 άσπρα.

Ας υποθέσουμε προς στιγμήν πως σε αντίθεση με ότι μας ζητείται να αποδείξουμε, πως είναι δυνατό να καλύψουμε τον κομμένο πίνακα με ντόμινο· θα χρειαστούμε φυσικά 31 από αυτά. Ας παρατηρήσουμε όμως πως όπως κι αν τοποθετηθεί το οποιοδήποτε από τα ντόμινο πάνω στον κομμένο πίνακα, θα καλύπτει δύο διαδοχικά κουτάκια του αρχικού, οπότε το ένα κουτάκι του χρωματίζεται άσπρο και το άλλο μαύρο. Δηλαδή τα 31 ντόμινο της κάλυψης του κομμένου πίνακα πρέπει να καλύπτουν συνολικά 31 άσπρα και 31 μαύρα κουτάκια, άτοπο αφού γνωρίζουμε πως ο πίνακας αυτός έχει περίσσεια κουτιών του ενός χρώματος και έλλειμμα του άλλου. Οπότε το ζητούμενο ισχύει. $\square$

Άσκηση 1.8 Γενικεύστε το τελευταίο Παράδειγμα. $\square$

1.6 Υποσύνολα και Διωνυμικοί Συντελεστές

Ας αρχίσουμε με ένα Παράδειγμα με τη μορφή Προβλήματος.

Παράδειγμα 1.9 Πόσα υποσύνολα έχει ένα σύνολο n στοιχείων; (Απάντηση: 2^n) $\square$

Λύση. Δημιουργώντας υποσύνολα του δοσμένου συνόλου πρέπει για κάθε ένα από τα n στοιχεία του να κάνουμε την επιλογή αν θα το βάλουμε στο υποσύνολο ή όχι. Για κάθε στοιχείο του δοσμένου έχουμε 2 επιλογές, οπότε η Πολλαπλασιαστική Αρχή μας δίνει συνολικά $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$ επιλογές, δηλαδή 2^n υποσύνολα.

Αν θέλουμε να το σκεφτείτε πιο αναλυτικά, πείτε πως σε κάθε ένα από τα n στοιχεία a_i του δοσμένου συνόλου προσαρτούμε το σύνολο $S_i = \{\text{ναι}, \text{όχι}\}$. Για να δημιουργήσουμε ένα τυχαίο υποσύνολο του δοσμένου συνόλου, πρέπει να κάνουμε μια επιλογή από καθένα από τα S_i και σύμφωνα με την επιλογή αυτή να βάλουμε ή να μην βάλουμε το a_i στο υποσύνολο που δημιουργούμε. Το πλήθος των υποσυνόλων θα ισούται λοιπόν με το πλήθος των επιλογών που μπορούμε να κάνουμε επιλέγοντας ένα στοιχείο από κάθε ένα από τα S_i . Σύμφωνα με την Πολλαπλασιαστική Αρχή, το ζητούμενο πλήθος των δυνατών επιλογών ισούται με $|S_1| \cdot |S_2| \cdot \dots \cdot |S_n| = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$. $\square$

Φυσικά κάθε σύνολο n στοιχείων έχει το ίδιο πλήθος υποσυνόλων, 2^n . Τι αξία δίνετε στην παρατήρηση αυτή;

Ας υπολογίσουμε τώρα το πλήθος των υποσυνόλων με k στοιχεία ενός συνόλου n στοιχείων.

Αρχικά παραφράζουμε ελαφρώς το πρόβλημα στο ισοδύναμό του: δεδομένου ενός συνόλου n στοιχείων με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k από αυτά; Σε αυτή τη μορφή το πρόβλημα αναφέρεται σε πλήθος επιλογών, και έχουμε ήδη δει κάποιες Αρχές μέτρησης που αναφέρονται σε πλήθος επιλογών και που μπορεί να μας βοηθήσουν. Πράγματι ας σκεφτούμε ως εξής:

Για το "πρώτο" στοιχείο που επιλέγουμε υπάρχουν φανερά n επιλογές. Οπότε για το "δεύτερο" στοιχείο που επιλέγουμε υπάρχουν μόνο $n - 1$ επιλογές, κ.ο.κ., οπότε για το " k -στό" στοιχείο που επιλέγουμε υπάρχουν μόνο $n - (k - 1)$ επιλογές. Η Πολλαπλασιαστική Αρχή μας βεβαιώνει πως υπάρχουν συνολικά $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$ επιλογές k στοιχείων μεταξύ των δοσμένων n στοιχείων του αρχικού συνόλου. Όμως θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Τις λέξεις "πρώτο", "δεύτερο" κτλ. τις σημειώσαμε μέσα σε εισαγωγικά αφού στην πραγματικότητα τα στοιχεία του υποσυνόλου που δημιουργούμε δεν διατάσσονται σε "πρώτο", "δεύτερο" κτλ. Δηλαδή, αν επιλέγαμε τα ίδια k σε πλήθος στοιχεία αλλά με διαφορετική σειρά, θα δημιουργούσαμε και πάλι το ίδιο υποσύνολο του αρχικού. Θα πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε για k στοιχεία με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τα τοποθετήσουμε στη σειρά (να τα διατάξουμε) και κατόπιν να διαιρέσουμε με αυτό τον αριθμό τον $n(n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$ ώστε να βρούμε το σωστό πλήθος των υποσυνόλων με k στοιχεία που ζητάμε.

Έχουμε λοιπόν (όπως και πριν): Δοσμένων k στοιχείων, τα τοποθετούμε στη σειρά σε k θέσεις, με k επιλογές για το στοιχείο της πρώτης θέσης, οπότε με $k - 1$ επιλογές για το στοιχείο της δεύτερης θέσης, κ.ο.κ. με 2 επιλογές για το στοιχείο της προτελευταίας θέσης και με 1 μόνο επιλογή για το στοιχείο της τελευταίας θέσης. Η Πολλαπλασιαστική Αρχή δίνει λοιπόν πως υπάρχουν $k(k - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ τρόποι για να τοποθετήσουμε k στοιχεία στη σειρά. Οπότε:

Πρόταση 1.10 Το πλήθος των υποσυνόλων με k στοιχεία ενός συνόλου n στοιχείων ισούται με

$$\frac{n(n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{k(k - 1) \cdot \dots \cdot 1}.$$

Εδώ είναι $0 \leq k \leq n$ και n, k φυσικοί αριθμοί. $\square$

Για συμβολική ευκολία έχουμε επινοήσει το συμβολισμό $\binom{n}{k}$ για το κλάσμα στην Πρόταση αυτή. Το σύμβολο αυτό το ονομάζουμε **διωνυμικό συντελεστή** για λόγους που θα φανούν λίγο αργότερα, και το διαβάζουμε "**n** ανά **k**". Επίσης, για τα μεγάλα γινόμενα των διαδοχικών φυσικών στον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος έχουμε επινοήσει το συμβολισμό $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$ όπου n φυσικός αριθμός. Διαβάζουμε "**n παραγοντικό**". Για $n = 0$ είναι βολικό να ορίσουμε $0! = 1$. Με τους συμβολισμούς αυτούς η Πρότασή μας γράφεται ως

Πρόταση 1.10 Το πλήθος των υποσυνόλων με k στοιχεία ενός συνόλου n στοιχείων ισούται με

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{k(k - 1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

□

Δικαιολογήστε την τελευταία ισότητα.

Οι διωνυμικοί συντελεστές έχουν πλήθος ιδιοτήτων και εμφανίζονται πολύ συχνά σε όλους τους κλάδους των Μαθηματικών. Αξίζει λοιπόν να δούμε ορισμένες από τις ιδιότητές τους. Όπως εξάλλου αξίζει να τονίσουμε για μια ακόμη φορά το τι ακριβώς δείχνουν:

Μεταξύ n αντικειμένων μπορούμε να επιλέξουμε k από αυτά κατά

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k(k-1) \cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

τρόπους. (Η σειρά με την οποία επιλέγουμε τα αντικείμενα δε μας ενδιαφέρει).

Πρόταση 1.11 Τα ακόλουθα αληθεύουν:

1.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2.

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

3.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

4.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

5.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

□

Απόδειξη. Για την απόδειξη τέτοιου είδους σχέσεων υπάρχουν σχεδόν πάντοτε δύο τρόποι απόδειξης. Ο ένας είναι αλγεβρικός με τη χρήση του τύπου που εξ' ορισμού εκφράζει τους διωνυμικούς συντελεστές ως κλάσματα. Ο άλλος είναι με τη χρήση του γεγονότος πως οι διωνυμικοί συντελεστές $\binom{n}{k}$ δίνουν ακριβώς το πλήθος των επιλογών k αντικειμένων μεταξύ n δοσμένων. Εδώ θα ακολουθήσουμε το δεύτερο τρόπο. Μάλιστα συχνά αυτός είναι και ο μόνος πρακτικά δυνατός τρόπος αφού ο αλγεβρικός έχει το μειονέκτημα πως πρέπει να δουλέψουμε με εξαιρετικά μεγάλους τύπους.

1. Το να επιλέξουμε k άτομα μεταξύ n δοσμένων για να τα κρατήσουμε, είναι ακριβώς το ίδιο με το να επιλέξουμε τα υπόλοιπα $n - k$ άτομα ώστε να τα αποβάλλουμε.
2. Ας μετρήσουμε πόσες ομάδες k ατόμων μπορούμε να δημιουργήσουμε επιλέγοντας μεταξύ n δοσμένων ατόμων, στις οποίες ομάδες έχουμε επιλέξει και έναν αρχηγό. Θα μετρήσουμε με δύο τρόπους.

1η μέτρηση: Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ δυνατές ομάδες k ατόμων μεταξύ των n δοσμένων, και για κάθε ομάδα υπάρχουν k δυνατές επιλογές αρχηγού. Οπότε η Πολλαπλασιαστική Αρχή δίνει $\binom{n}{k} \times k$ ομάδες k ατόμων με αρχηγό.

2η μέτρηση: Επιλέγουμε πρώτα τον αρχηγό. Αυτό γίνεται φυσικά με n τρόπους. Τώρα για οποιονδήποτε επιλεγμένο αρχηγό, θέλουμε να δημιουργήσουμε μια ομάδα με k άτομα που τον περιέχει ως αρχηγό. Θα πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε άλλα $k - 1$ άτομα από τα εναπομείναντα $n - 1$. Αυτό γίνεται $\binom{n-1}{k-1}$ τρόπους. Οπότε η Πολλαπλασιαστική Αρχή δίνει $n \binom{n-1}{k-1}$ ομάδες k ατόμων με αρχηγό.

Σύμφωνα με την Αρχή της Διπλής Μέτρησης τα αποτελέσματα των δύο μετρήσεων είναι τα ίδια οπότε προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

3. Μεταξύ $n + 1$ δοσμένων ατόμων υπάρχουν $\binom{n+1}{k}$ τρόποι για να επιλέξουμε μια ομάδα με k από αυτούς.

Θα ξαναμετρήσουμε το πλήθος των τρόπων, αφού πρώτα ονομάσουμε ένα συγκεκριμένο από τα άτομα ως αρχηγό. Για να επιλέξουμε λοιπόν k από τα δοσμένα $n + 1$ άτομα, μπορούμε είτε να έχουμε επιλέξει και τον αρχηγό, είτε όχι. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχουν $\binom{n}{k-1}$ τρόποι αφού ουσιαστικά ζητάμε να επιλέξουμε τους υπόλοιπους $k - 1$ της ομάδας από τους εναπομείναντες $(n + 1) - 1 = n$ εκτός του αρχηγού. Στη δεύτερη περίπτωση υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι αφού ουσιαστικά ζητάμε να επιλέξουμε όλους τους k της ομάδας από τους εναπομείναντες $(n + 1) - 1 = n$ εκτός του αρχηγού. οπότε συνολικά υπάρχουν (Προσθετική Αρχή) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ τρόποι για να επιλέξουμε μια ομάδα k ατόμων από τα δοσμένα $n + 1$.

Το ζητούμενο τώρα προκύπτει εξαιτίας της Αρχής της Διπλής Μέτρησης.

4. Στο Παράδειγμα 1.9 είδαμε πως υπάρχουν 2^n υποσύνολα ενός συνόλου n στοιχείων.

Όμως ένα υποσύνολο του συνόλου αυτού θα έχει είτε 0, είτε 1, ..., είτε n στοιχεία, και στην Πρόταση 1.10 είδαμε πως υπάρχουν αντιστοίχως $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ τέτοια υποσύνολα. Οπότε (Προσθετική Αρχή) υπάρχουν $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$ υποσύνολα του αρχικού συνόλου.

Άρα λοιπόν (Αρχή Διπλής Μέτρησης) ισχύει η ζητούμενη ισότητα.

5. Ας μετρήσουμε με δύο τρόπους το πλήθος των ομάδων με n άτομα που μπορούμε να επιλέξουμε από ένα σύνολο $2n$ ατόμων εκ των οποίων οι n είναι άντρες και n γυναίκες.

1η μέτρηση: Κατά τα γνωστά υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ επιλογές.

2η μέτρηση: Η ομάδα των n ατόμων θα περιέχει k άντρες και $n - k$ γυναίκες για κάποιο $k = 0, 1, \dots, n$. Τους k άντρες τους επιλέγουμε μεταξύ των n δοσμένων αντρών κατά $\binom{n}{k}$ τρόπους και ομοίως τις $n - k$ γυναίκες τις επιλέγουμε μεταξύ των n δοσμένων γυναικών κατά $\binom{n}{n-k}$ τρόπους που σύμφωνα με το 1 της τρέχουσας Πρότασης ισοούνται με $\binom{n}{k}$. Οπότε σύμφωνα με την Πολλαπλασιαστική Αρχή υπάρχουν $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2$ επιλογές n ατόμων με k άντρες και $n - k$ γυναίκες μεταξύ των $2n$ δοσμένων. Οπότε υπάρχουν (Προσθετική Αρχή) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$ επιλογές n ατόμων μεταξύ των $2n$ δοσμένων.

Τώρα η Αρχή της Διπλής Μέτρησης μας δίνει το ζητούμενο. $\square$

1.7 Το Θεώρημα του Νεύτωνα και το τρίγωνο του Pascal

Διωνύμιο είναι ένα πολυώνυμο $ax + b$ με δύο όρους, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και x μεταβλητή. Εδώ θα ασχοληθούμε με την ειδική μορφή $x + 1$ του διωνύμιου και συγκεκριμένα με φυσικές δυνάμεις αυτού: $(x + 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Η Πρόταση που ακολουθεί συνδέει τους διωνυμικούς συντελεστές με το ... διώνυμο και φέρει το όνομα του Νεύτωνα.

Πρόταση 1.12 (Διωνυμικό Θεώρημα ή Θεώρημα του Νεύτωνα) Ο συντελεστής της δύναμης x^k στο ανάπτυγμα του διωνύμιου $(x + 1)^n$ είναι ο $\binom{n}{k}$, δηλαδή

$$(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n. \quad (1.1)$$

Εδώ είναι $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq n$ και $n, k \in \mathbb{N}$. $\square$

Απόδειξη. Το πολυώνυμο $(x + 1)^n = \underbrace{(1 + x)(1 + x) \cdots (1 + x)}_{n \text{ παράγοντες}}$ αναπτύσσεται (α) επιλέγοντας

είτε τον όρο x είτε τον όρο 1 από κάθε έναν από τους n παράγοντες (β) πολλαπλασιάζοντας τους επιλεγμένους όρους και (γ) προσθέτοντας όλα αυτά τα γινόμενα.

Με τα βήματα (α) και (β) προκύπτουν όροι της μορφής $1 \cdot x^k$. Μάλιστα για συγκεκριμένο k , ο όρος $1 \cdot x^k$ προκύπτει όταν στο βήμα (α) επιλεγεί ο όρος x σε ακριβώς k από τους παράγοντες

$x + 1$. Όμως οι παράγοντες $x + 1$ είναι n σε πλήθος. Οπότε μπορούμε να επιλέξουμε τον x σε k από αυτούς κατά $\binom{n}{k}$ τρόπους.

Τότε με το βήμα (γ) ο συντελεστής που προκύπτει για το x^k ισούται με $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\binom{n}{k} \text{ παράγοντες}} = \binom{n}{k}$

□

Μια άλλη συχνή μορφή του Θεωρήματος του Διωνύμου στη βιβλιογραφία, αναφέρεται στις δυνάμεις του πολυωνύμου $x + y$ των 2 μεταβλητών x και y και είναι η ακόλουθη:

Πρόταση 1.13 Για $x, y \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq n$ και $n, k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n} x^n.$$

□

Ακολουθεί ένα παράδειγμα χρήσης του Διωνυμικού Θεωρήματος.

Παράδειγμα 1.14 Για κάθε σύνολο n στοιχείων, υπάρχουν 2^{n-1} υποσύνολα με άρτια πληθικότητα και 2^{n-1} υποσύνολα με περιττή πληθικότητα. □

Απόδειξη. Θέτοντας $x = -1$ στην εξίσωση 1.1 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (1 - 1)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \Rightarrow \\ 0 &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} (-1)^{n-1} + \binom{n}{n} (-1)^n \Rightarrow \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots &= \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots \end{aligned}$$

Όμως εξαιτίας της Πρότασης 1.10 το αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας δίνει το πλήθος των υποσυνόλων άρτιας πληθικότητας ενός οποιουδήποτε συνόλου n στοιχείων, ενώ το δεξί μέλος δίνει το πλήθος των υποσυνόλων του περιττής αρτιότητας. Οπότε το Παράδειγμα 1.9 δίνει πως το καθένα από αυτά τα δύο ίσα πλήθη υποσυνόλων είναι ίσα με $2^n/2 = 2^{n-1}$ όπως ζητείται. □

Οι διωνυμικοί συντελεστές για τις δυνάμεις $(x+1)^1, (x+1)^2, (x+1)^3, \dots$ γράφονται συνοπτικά με τη μορφή ενός άπειρα εκτεινομένου τριγώνου ως εξής:

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\ & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & \ddots \end{array}$$

Το τρίγωνο αυτό ονομάζεται τρίγωνο του Pascal παρότι ήταν γνωστό πριν το χρησιμοποιήσει ο Pascal για πρώτη φορά. Αυτό που οπωσδήποτε πρέπει να παρατηρήσουμε στο τρίγωνο είναι πως κάθε αριθμός ισούται με το άθροισμα των δύο αριθμών που βρίσκονται στην προηγούμενη γραμμή δεξιά και αριστερά του. Η ισότητα αυτή είναι ακριβώς το περιεχόμενο της ιδιότητας 3 της Πρότασης 1.11 που δείξαμε νωρίτερα.

Το τρίγωνο αυτό μας δίνει την ευκαιρία να εξερευνήσουμε πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες των διωνυμικών συντελεστών, αρκεί να επιδείξουμε υπομονή και παρατηρητικότητα. Αθροίστε για παράδειγμα τους αριθμούς σε οποιαδήποτε γραμμή. Τι παρατηρείτε;

1.8 Επιλογές : διατάξεις και συνδυασμοί

Συχνά επιθυμούμε να απαντήσουμε στο ακόλουθο ερώτημα :

Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k αντικείμενα μεταξύ n δοσμένων αντικειμένων;

Φυσικά είναι $0 \leq k \leq n$ με n, k φυσικούς αριθμούς. Το ερώτημα το συναντήσαμε ξανά στην παράγραφο 1.6 και η απάντηση που δώσαμε ήταν: με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Όμως στην απάντηση αυτή δεν μας ενδιέφερε η σειρά με την οποία επιλέγαμε τα αντικείμενα. Φυσικά τα πράγματα αλλάζουν αν μας ενδιαφέρει και η σειρά επιλογής. Για παράδειγμα αν είναι να επιλέξουμε 3 μαθητές από μια τάξη 10 μαθητών χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, τότε μπορούμε να πραγματοποιήσουμε την επιλογή μας κατά $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$ τρόπους. Αν όμως θέλουμε να ονομάσουμε τον πρώτο που επιλέγουμε ως πρόεδρο της τάξης, τον δεύτερο ως γραμματέα και τον τρίτο ως ταμία, τότε προφανώς μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής των τριών μαθητών. Καθώς οποιαδήποτε τριάδα επιλεγμένων μαθητών μπορούμε να τη διατάξουμε κατά $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ τρόπους (γιατί:), συμπεραίνουμε πως υπάρχουν $120 \cdot 6 = 720$ τρόποι επιλογής τριών μαθητών από τους δέκα της τάξης ώστε να τους ονομάσουμε πρόεδρο, γραμματέα και ταμία.

Φυσικά υποπευδύμαστε πως θα πρέπει να υπάρχει γενικός τύπος για τούτο το είδος των επιλογών. Πράγματι υπάρχει και δίνεται πιο κάτω στην Πρόταση 1.16.

Όμως πιο πριν αξίζει να παρατηρήσουμε πως υπάρχουν και άλλοι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k αντικείμενα μεταξύ n δοσμένων. Πραγματικά, αν για παράδειγμα θέλουμε να επιλέξουμε 3 χαρτιά από μια τράπουλα 52 φύλλων, ένα φύλλο τη φορά ώστε μετά από κάθε επιλογή φύλλου να το επανατοποθετούμε στην τράπουλα, τότε προφανώς δεν μπορεί να έχουμε μόνο $\binom{52}{3}$ επιλογές σαν να επρόκειτο για απλή επιλογή τριών διαφορετικών φύλλων της τράπουλας! Αν μάλιστα μας ενδιαφέρει και η σειρά εμφάνισης των τριών φύλλων τότε προφανώς έχουμε μπροστά μας ένα νέο πρόβλημα. Τους τρόπους επιλογής του τελευταίου προβλήματος τους ονομάζουμε **επιλογές με επανάληψη**.

Για να καθορίσουμε την ορολογία ως ανακεφαλαιώσουμε:

Ορισμός 1.15 Όταν επιλέγουμε k αντικείμενα από n δοσμένα διακεκριμένα, μπορεί να μην ενδιαφερόμαστε για τη σειρά της επιλογής τους, οπότε μιλάμε για **πλήθος συνδυασμών**, μπορεί όμως και να ενδιαφερόμαστε για τη σειρά επιλογής τους, οπότε μιλάμε για **πλήθος διατάξεων**. Αν μάλιστα σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις επιθυμούμε να μπορεί το κάθε αντικείμενο να επιλεγεί επανειλημμένα έως και το μέγιστο πλήθος φορών k , μιλάμε για **πλήθος επαναληπτικών συνδυασμών** και **επαναληπτικών διατάξεων** αντιστοίχως. Στην περίπτωση των απλών διατάξεων, όταν το πλήθος k των αντικειμένων που επιλέγουμε ισούται με το πλήθος n των δοσμένων αντικειμένων, μιλάμε για **πλήθος μεταθέσεων**.

Πρόταση 1.16 Το πλήθος των επιλογών k αντικειμένων μεταξύ n δοσμένων διακεκριμένων αντικειμένων ισούται με:

	Συνδυασμοί (Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά)	Διατάξεις (Μας ενδιαφέρει η σειρά)
Χωρίς επαναλήψεις	$\binom{n}{k}$	$n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))$
Με επαναλήψεις	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

Στην πρώτη γραμμή είναι $0 \leq k \leq n$ με $n, k \in \mathbb{N}$. Στη δεύτερη γραμμή όμως είναι $n, k \in \mathbb{N}$. $\square$

Απόδειξη. Τα αποτελέσματα της δεύτερης στήλης τα παρέχει αμέσως η Πολλαπλασιαστική Αρχή (εξηγήστε εκτενέστερα). Το πρώτο αποτέλεσμα της πρώτης στήλης είναι το περιεχόμενο

της Πρότασης 1.10. Το δεύτερο αποτέλεσμα της δεύτερης στήλης προκύπτει π.χ. άμεσα από την εξαιρετικά ενδιαφέρουσα πρόταση που ακολουθεί. $\square$

Πρόταση 1.17 1. Το πλήθος των επιλογών k αντικειμένων με επανάληψη μεταξύ n δοσμένων διακεκριμένων όταν δε μας ενδιαφέρει η σειρά της επιλογής τους, ισούται με το πλήθος των διατεταγμένων n -άδων $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ από φυσικούς (δηλαδή μη αρνητικούς ακέραιους) x_i για τους οποίους $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$.

2. Το πλήθος των διατεταγμένων n -άδων $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ από φυσικούς (δηλαδή μη αρνητικούς ακέραιους) x_i για τους οποίους $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ ισούται με $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ $\square$

Απόδειξη. 1. Έστω πως δίνονται n σε πλήθος αντικείμενα με τα ονόματα $A_1, A_2, \dots, A_n$. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο δείχνοντας πως υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία των επιλογών k αντικειμένων με επανάληψη μεταξύ των n δοσμένων όπου δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, με τις διατεταγμένες n -άδες $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μη αρνητικών ακεραίων x_i με $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$. Πραγματικά:

Θεωρώντας μια επιλογή με επανάληψη k αντικειμένων από τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ και δίχως να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής τους, ας ονομάσουμε $x_1, x_2, \dots, x_n$ το πλήθος των εμφανίσεων των $A_1, A_2, \dots, A_n$ αντιστοίχως στην επιλογή αυτή. Τότε φυσικά είναι x_i μη αρνητικοί ακέραιοι και $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$. Δηλαδή μια επιλογή k αντικειμένων από τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ παράγει τη μοναδική διατεταγμένη n -άδα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μη αρνητικών αριθμών x_i με $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$.

Αντιστρόφως η διατεταγμένη n -άδα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ των μη αρνητικών αριθμών x_i με $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ παράγει μια μοναδική επιλογή k αντικειμένων από τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ ως εξής: επιλέγουμε x_1 φορές το A_1 , επιλέγουμε x_2 φορές το A_2 , ..., επιλέγουμε x_n φορές το A_n .

2. Ας θεωρήσουμε $n + k - 1$ θέσεις στη σειρά και ας τοποθετήσουμε σε $n - 1$ από αυτές από μία μπάλα. Υπάρχουν ασφαλώς $\binom{n+k-1}{n-1}$ τέτοιες τοποθετήσεις μπαλών.

Μπορούμε όμως να μετρήσουμε το πλήθος των τοποθετήσεων των μπαλών και με άλλο τρόπο:

Καθορίζουμε μια κατεύθυνση από τη μία ακριανή θέση ως την άλλη και για μια οποιαδήποτε τοποθέτηση μετακινούμαστε κατά την κατεύθυνση αυτή και ονομάζουμε x_1 το πλήθος των άδειων θέσεων πριν την πρώτη μπάλα, x_2 το πλήθος των άδειων θέσεων μετά την πρώτη μπάλα και πριν τη δεύτερη, ..., x_{n-1} το πλήθος των άδειων θέσεων μετά την $(n-2)$ -στή μπάλα και πριν την $(n-1)$ -στή μπάλα και x_n το πλήθος των άδειων θέσεων μετά την n -στή μπάλα. Φυσικά οι x_i είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $x_1 + x_2 + \dots + x_n = (n+k-1) - (n-1) = k$. Δηλαδή μια τοποθέτηση μπαλών παράγει μια n -άδα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μη αρνητικών ακεραίων x_i με $x_1 + x_2 + \dots + x_n = (n+k-1) - (n-1) = k$. Αλλά και αντίστροφα, μία τέτοια n -άδα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μη αρνητικών ακεραίων x_i με $x_1 + x_2 + \dots + x_n = (n+k-1) - (n-1) = k$ παράγει μια τοποθέτηση μπαλών ως εξής: Κινούμενοι κατά την επιλεγμένη κατεύθυνση μετρούμε x_1 θέσεις τις οποίες αφήνουμε κενές, κατόπιν τοποθετούμε στην επόμενη θέση μία μπάλα, μετά μετρούμε x_2 θέσεις τις οποίες αφήνουμε κενές, κατόπιν τοποθετούμε στην επόμενη θέση μία μπάλα, κ.ο.κ. Αφού το πλήθος των κενών θέσεων ισούται με $x_1 + x_2 + \dots + x_n = (n+k-1) - (n-1) = k$ και το πλήθος των θέσεων στις οποίες αφήσαμε από μία μπάλα ισούται με $n-1$, συνολικά καλύψαμε από την αρχή έως το τέλος $k + (n-1)$ θέσεις δηλαδή όσο το δοσμένο πλήθος των θέσεων. Οπότε το πλήθος των τοποθετήσεων των μπαλών ισούται με το πλήθος των n -άδων $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μη αρνητικών ακεραίων x_i με $x_1 + x_2 + \dots + x_n = (n+k-1) - (n-1) = k$

Τότε όμως (Αρχή της Διπλής Μέτρησης) το πλήθος των n -άδων $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μη αρνητικών ακεραίων x_i με $x_1 + x_2 + \dots + x_n = (n+k-1) - (n-1) = k$ ισούται με

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} \text{ όπως ζητούσαμε (εξηγήστε την τελευταία ισότητα). } \square$$

Τα είδη επιλογών στα οποία αναφερθήκαμε, μπορούμε συχνά να τα σκεφτόμαστε και με άλλους πιο βολικούς τρόπους. Για παράδειγμα, πορούμε να σκεφτόμαστε πως τοποθετούμε μπάλες σε κουτιά. Έτσι:

- Το πλήθος των επιλογών k αντικειμένων μεταξύ n δοσμένων όπου δε μας ενδιαφέρει η διάταξη, ισούται με το πλήθος των τοποθετήσεων k *ιδίων* μπαλών σε n διαφορετικά κουτιά όπου κάθε κουτί χωράει *μία το πολύ* μπάλα. Αυτό το πλήθος ισούται με $\binom{n}{k}$.
- Το πλήθος των επιλογών k αντικειμένων μεταξύ n δοσμένων όπου μας ενδιαφέρει η διάταξη, ισούται με το πλήθος των τοποθετήσεων k *διαφορετικών* (ή αν θέλετε αριθμημένων από το 1 ως το k) μπαλών σε n διαφορετικά κουτιά όπου κάθε κουτί χωράει *μία το πολύ* μπάλα. Αυτό το πλήθος ισούται με $n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))$.
- Το πλήθος των επαναληπτικών επιλογών k αντικειμένων μεταξύ n δοσμένων όπου δε μας ενδιαφέρει η διάταξη, ισούται με το πλήθος των τοποθετήσεων k *ιδίων* μπαλών σε n διαφορετικά κουτιά όπου κάθε κουτί χωράει *όσες μπάλες θέλουμε*. Αυτό το πλήθος ισούται με $\binom{n+k-1}{k}$.
- Το πλήθος των επαναληπτικών επιλογών k αντικειμένων μεταξύ n δοσμένων όπου μας ενδιαφέρει η διάταξη, ισούται με το πλήθος των τοποθετήσεων k *διαφορετικών* (ή αν θέλετε αριθμημένων από το 1 ως το k) μπαλών σε n διαφορετικά κουτιά όπου κάθε κουτί χωράει *όσες μπάλες θέλουμε*. Αυτό το πλήθος ισούται με n^k .

Στην ξένη βιβλιογραφία συνηθίζονται οι συμβολισμοί $C(n, k) = \binom{n}{k}$ και $P(n, k) = n(n-1)\dots(n-(k-1))$ από τις λέξεις Combination και Permutation που σημαίνουν Συνδυασμός και Μετάθεση αντιστοίχως.

Μερικά παραδείγματα θα μας βοηθήσουν να αφομοιώσουμε καλύτερα τους τύπους.

Παράδειγμα 1.18 Επάνω σε δύο παράλληλες ευθείες βρίσκονται 10 και 8 σημεία αντιστοίχως. Για τα τμήματα που έχουν το ένα τους άκρο στην μια ευθεία και το άλλο στην άλλη να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων τομής τους που βρίσκονται στο εσωτερικό τους όταν γνωρίζετε πως δεν υπάρχουν τρία τέτοια τμήματα με κοινό εσωτερικό σημείο. (Η παραλληλία των ευθειών δεν είναι πραγματικά απαραίτητη). $\square$

Λύση. Για κάθε επιλογή ενός ζεύγος σημείων στην πρώτη ευθεία και ενός ζεύγος σημείων στη δεύτερη, μετράμε ακριβώς ένα από τα ζητούμενα σημεία τομής (δικαιολογήστε εκτενέστερα).

Μπορούμε να επιλέξουμε 2 σημεία από τα 10 δοσμένα της πρώτης ευθείας κατά $\binom{10}{2}$ τρόπους και ομοίως μπορούμε να επιλέξουμε 2 σημεία από τα 8 δοσμένα της δεύτερης κατά $\binom{8}{2}$ τρόπους. Οπότε μπορούμε να επιλέξουμε δύο σημεία στην πρώτη και δύο σημεία στη δεύτερη κατά (Πολλαπλασιαστική Αρχή) $\binom{10}{2} \binom{8}{2} = \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{8!}{2!6!} = 2520$ τρόπους.

Συνεπώς το ζητούμενο πλήθος σημείων τομής ισούται με 2520. $\square$

Παράδειγμα 1.19 Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί υπάρχουν στους οποίους όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά; $\square$

Λύση. Θέλουμε να τοποθετήσουμε στη σειρά (να διατάξουμε) 4 από τα 10 ψηφία 1, 2, 3, ..., 9 ώστε το 0 να μην εμφανίζεται στην πρώτη θέση.

Τα 10 ψηφία τα διατάσσουμε σε 4 θέσεις κατά (απλές διατάξεις 4 αντικειμένων από 10 δοσμένα) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ τρόπους.

Για να επιλεγεί το 0 στην πρώτη θέση θα πρέπει στις υπόλοιπες 3 θέσεις να επιλεγούν μονάχα τα 9 ψηφία 1, 2, ..., 9 και αυτό ομοίως μπορεί να συμβεί κατά $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ τρόπους.

Οπότε υπάρχουν $5040 - 504 = 4536$ αριθμοί με τα ζητούμενα χαρακτηριστικά.

Να λύσετε το Πρόβλημα πιο γρήγορα με χρήση Πολλαπλασιαστικής Αρχής. $\square$

Παράδειγμα 1.20 Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα παίρνουμε όταν ρίχνουμε ταυτόχρονα τρία ζάρια;

Λύση. Με την ταυτόχρονη ρίψη των τριών ζαριών παίρνουμε τρεις φυσικούς αριθμούς, ο καθένας τους από 1 έως 6. Καθώς δεν ενδιαφερόμαστε για τη σειρά (οπότε μιλάμε για συνδυασμούς) με την οποία παίρνουμε τους αριθμούς αυτούς, αλλά και επειδή ο καθένας από τους $1, 2, \dots, 6$ μπορεί να εμφανιστεί επανειλημμένα, ψάχνουμε ουσιαστικά για το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών 3 αντικειμένων από 6 δοσμένα. Δηλαδή το πλήθος ισούται με $\binom{6+3-1}{3} = \dots = 56$.

1.9 Η Αρχή της Εισαγωγής - Εξαγωγής

Στην §1.2 αναφερθήκαμε στο πασίγνωστο γεγονός πως το πλήθος των στοιχείων της ένωσης S των ξένων ανά δύο συνόλων $S_1, S_2, \dots, S_n$ ισούται με το άθροισμα των πληθών όλων των S_i . Δηλαδή

$$|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_n|$$

Εδώ θα αναφερθούμε σε έναν τύπο που δίνει το πλήθος των στοιχείων της ένωσης S των συνόλων $S_1, S_2, \dots, S_n$, όπου τα S_i δεν είναι απαραίτητως ξένα ανά δύο.

Για παράδειγμα αν δίνονται δύο μόνο σύνολα S_1 και S_2 , τότε είτε με παραδείγματα, είτε με ελαφρώς πιο οργανωμένη αυστηρή σχέση, δεν θα έχουμε δυσκολίες να διαπιστώσουμε πως το $S_1 \cup S_2$ έχει τόσα στοιχεία όσα το άθροισμα των $|S_1|$ και $|S_2|$ αφαιρώντας όμως το πλήθος των στοιχείων που μετρήσαμε δύο φορές, δηλαδή των κοινών στοιχείων των δύο συνόλων. Με άλλα λόγια:

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|.$$

Η **Αρχή της Εισαγωγής-Εξαγωγής** ή του **Εγκλεισμού-Αποκλεισμού** γενικεύει τον τελευταίο τύπο ως εξής:

Πρόταση 1.21 (Αρχή Εισαγωγής-Εξαγωγής) Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. (1η μορφή) Αν $S_1, S_2, \dots, S_n$ είναι πεπερασμένα σύνολα, τότε

$$\begin{aligned} |S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n| &= \sum_{1 \leq i \leq n} |S_i| \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j| \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |S_i \cap S_j \cap S_k| \\ &\quad \vdots \\ &\quad (-1)^{n+1} \sum |S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n|. \end{aligned}$$

2. (2η μορφή) Για ένα πεπερασμένο πλήθος αντικειμένων και n δοσμένες ιδιότητες $1, 2, \dots, n$, ας είναι $N(i_1, i_2, \dots, i_r)$ το πλήθος αυτών που ικανοποιούν τουλάχιστον τις ιδιότητες $i_1, i_2, \dots, i_r$. Τότε το πλήθος των αντικειμένων με μία τουλάχιστον από τις ιδιότητες ισούται με

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq i \leq n} N(i) \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(i, j) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(i, j, k) \\ &\quad \vdots \\ &\quad (-1)^{n+1} \sum N(1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

3. (3η μορφή) Έστω $S_1, S_2, \dots, S_n$ μια συλλογή υποσυνόλων ενός συνόλου S . Τότε το πλήθος των στοιχείων του S που δεν ανήκει σε κανένα από τα S_i ισούται με

$$\sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|} |A_I|$$

όπου

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i \text{ και } A_\emptyset = S.$$

Όλες οι μορφές είναι ισοδύναμες. Τα αθροίσματα με περισσότερους από έναν δείκτες στις δύο πρώτες μορφές αναφέρονται σε διακεκριμένους μεταξύ τους τέτοιους δείκτες. $\square$

Για παράδειγμα, για τρία σύνολα S_1, S_2, S_3 η πρώτη μορφή της Εισαγωγής-Εξαγωγής βεβαιώνει πως

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |S_1| + |S_2| + |S_3| - |S_1 \cap S_2| - |S_2 \cap S_3| - |S_3 \cap S_1| + |S_1 \cap S_2 \cap S_3|.$$

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των μορφών δεν είναι δύσκολη και αφήνεται ως Άσκηση. Θα δείξουμε την αλήθεια της 1ης μορφής:

Το αριστερό μέρος του τύπου δηλώνει το πλήθος των στοιχείων στη μεγάλη ένωση $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ όλων των συνόλων. Το δεξί μέλος προσθέτει ή αφαιρεί πληθικούς αριθμούς, οπότε δηλώνει κάθε ένα στοιχείο της μεγάλης ένωσης κάμποσες φορές και αφαιρεί την ύπαρξή του κάμποσες φορές ανάλογα με το σε ποια σύνολα από αυτά του δεξιού μέλους ανήκει το στοιχείο και με το αν ο πληθικός αριθμός του συνόλου πολλαπλασιάζεται με το $+1$ ή το -1 .

Αν λοιπόν καταφέρουμε να αποδείξουμε πως μετρώντας στο δεξί μέλος την ύπαρξη καθενός στοιχείου της μεγάλης ένωσης αυτό συνολικά μετριέται ακριβώς 1 φορά, θα έχουμε την ποθητή ισότητα.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ένα τυχαίο στοιχείο x της μεγάλης ένωσης και ας υποθέσουμε πως ανήκει σε ακριβώς r ($1 \leq r \leq n$) από τα υποσύνολα $S_1, S_2, \dots, S_n$.

Το x ανήκει σε r σύνολα της πρώτης γραμμής, οπότε μετριέται $+r$ φορές.

Το x ανήκει σε $\binom{r}{2}$ σύνολα της δεύτερης γραμμής, οπότε μετριέται $-\binom{r}{2}$ φορές.

Το x ανήκει σε $\binom{r}{3}$ σύνολα της τρίτης γραμμής, οπότε μετριέται $+\binom{r}{3}$ φορές.

Κ.ο.κ.

Το x ανήκει σε $\binom{r}{r}$ σύνολα της r -οστής γραμμής, οπότε το x μετριέται $(-1)^{r-1} \binom{r}{r}$ φορές.

Το x δεν ανήκει σε κανένα σύνολο των γραμμών $r+1, r+2, \dots, n$ οπότε σε αυτές μετριέται 0 φορές.

Οπότε το συνολικό πλήθος των φορών τις οποίες μετριέται το x σε όλες τις γραμμές του δεξιού μέλους ισούται με

$$\begin{aligned} & +r - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \dots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r} + 0 \\ &= \binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \dots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r} \\ &= 1 - \left[\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \dots + (-1)^r \binom{r}{r} \right] \\ &= 1 - (1-1)^r \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

Παράδειγμα 1.22 Ένας πωλητής πρόκειται για κάθε μια από τις 7 ημέρες της επόμενης εβδομάδας να επισκεπτεί ακριβώς έναν από τους τέσσερις Θεσσαλικούς νομούς για την προώθηση των πωλήσεών του. Ο πωλητής επιθυμεί να επισκεπτεί και τους τέσσερις νομούς. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να προγραμματίσει το πρόγραμμα των επισκέψεών του για την εβδομάδα αυτή; $\square$

Λύση. Σκοπεύουμε να υπολογίσουμε το πλήθος του συνόλου όλων των προγραμμάτων καθώς και το πλήθος του συνόλου των ανεπιθύμητων προγραμμάτων, οπότε η ζητούμενη απάντηση θα είναι η διαφορά του δεύτερου πλήθους από το πρώτο. Ανεπιθύμητο πρόγραμμα είναι φυσικά ένα πρόγραμμα στο οποίο δεν προβλέπεται επίσκεψη σε έναν τουλάχιστον από τους τέσσερις νομούς.

Για το πλήθος του συνόλου όλων των προγραμμάτων ο υπολογισμός είναι απλός: $4^7 = 16.384$, αφού για κάθε μια από τις 7 ημέρες έχουμε 4 δυνατές επιλογές για την επίσκεψη σε κάποιο νομό (Πολλαπλασιαστική Αρχή). (Δικαιολογήστε και με χρήση επαναληπτικών διατάξεων).

Ας ονομάσουμε τώρα S_1, S_2, S_3, S_4 τα σύνολα των εβδομαδιαίων προγραμμάτων του πωλητή στα οποία δεν περιλαμβάνεται επίσκεψη στα Τρίκαλα, την Καρδίτσα, τη Λάρισα ή τη Μαγνησία αντιστοίχως. Τότε $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ είναι το σύνολο όλων των προγραμμάτων στα οποία δεν πραγματοποιείται επίσκεψη σε έναν τουλάχιστον νομό· πρόκειται δηλαδή για το σύνολο των ανεπιθύμητων προγραμμάτων του πωλητή. Ζητούμε να υπολογίσουμε το πλήθος του συνόλου αυτού. Η Αρχή Εισαγωγής-Εξαγωγής δίνει:

$$\begin{aligned} |S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| &= |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| \\ &\quad - |S_1 \cap S_2| - |S_1 \cap S_3| - |S_1 \cap S_4| - |S_2 \cap S_3| - |S_2 \cap S_4| - |S_3 \cap S_4| \\ &\quad + |S_1 \cap S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_4| + |S_1 \cap S_3 \cap S_4| + |S_2 \cap S_3 \cap S_4| \\ &\quad - |S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4| \end{aligned}$$

Όμως είναι:

$$\begin{aligned} |S_1| &= |S_2| = |S_3| = |S_4| = 3^7 \\ |S_1 \cap S_2| &= |S_1 \cap S_3| = |S_1 \cap S_4| = |S_2 \cap S_3| = |S_2 \cap S_4| = |S_3 \cap S_4| = 2^7 \\ |S_1 \cap S_2 \cap S_3| &= |S_1 \cap S_2 \cap S_4| = |S_1 \cap S_3 \cap S_4| = |S_2 \cap S_3 \cap S_4| = 1^7 \\ |S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4| &= 0^7 \end{aligned}$$

Πράγματι, π.χ. για το $|S_1|$ παρατηρήστε πως αυτό εκφράζει το πλήθος των προγραμμάτων για τις 7 ημέρες της εβδομάδας, στα οποία δεν περιλαμβάνεται καμία επίσκεψη στα Τρίκαλα, που σημαίνει πως οι επισκέψεις κάθε ημέρας έχουν 3 δυνατές επιλογές στους εναπομείναντες νομούς· οπότε το αποτέλεσμα προκύπτει από την Πολλαπλασιαστική Αρχή, ή αν προτιμάτε, με χρήση των επαναληπτικών διατάξεων.

$$\text{Συνεπώς } |S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| = 4 \cdot 3^7 - 6 \cdot 2^7 + 4 - 0 = 7.984.$$

Οπότε το ζητούμενο πλήθος των προγραμμάτων είναι $16.384 - 7.984 = 8.400$. $\square$

1.10 Η Αρχή του Dirichlet ή της περιστεροφωλιάς

1.10.1 Λίγη Θεωρία

Η **Αρχή του Dirichlet ή της Περιστεροφωλιάς** εκφράζει την προφανή παρατήρηση πως αν σε κάθε μια από n φωλιές περιστεριών καταμετρηθεί ένα το πολύ περιστέρι, τότε συνολικά σε όλες τις φωλιές καταμετρήθηκαν n το πολύ περιστέρια. Συνεπώς

αν γνωρίζουμε πως σε κάποια μέτρηση στις n φωλιές καταμετρήθηκαν συνολικά $n + 1$ και πλέον περιστέρια, είναι σίγουρο πως θα υπάρχει φωλιά με περισσότερα από 1 περιστέρια, δηλαδή τουλάχιστον 2 περιστέρια.

Ο συλλογισμός αυτός, επίσης ονομάζεται Αρχή της περιστεροφωλιάς. Βέβαια, είναι δυνατό να υπάρχουν πολλές φωλιές 2 τουλάχιστον περιστέρια, ή και να υπάρχουν φωλιές με κανένα περιστέρι, αλλά με μόνο δεδομένο τη συνολική μέτρηση των περιστερών, μας είναι αδύνατο να αποφανθούμε σε τέτοιο βαθμό λεπτομέρειας σχετικά με το τι συμβαίνει μέσα στις περιστεροφωλιές.

Συχνά στα βιβλία, η Αρχή του Dirichlet διατυπώνεται πιο αυστηρά κάπως έτσι:

αν n αντικείμενα τοποθετήθηκαν σε m δοχεία και $n > m$, τότε υπάρχει δοχείο όπου τοποθετήθηκαν τουλάχιστον 2 αντικείμενα.

Υπάρχουν και διατυπώσεις της που χρησιμοποιούν τη γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων. (Δώστε μια τέτοια διατύπωση). Επίσης εμφανίζεται και με άλλα ονόματα όπως "**η Αρχή των συρταριών**" ή "**η Αρχή των παπουτσιών**" κ.α. Στη Ρωσία τα περισσότερα αντικαθίστανται με κουνέλια. Μια Γεωμετρική εκδοχή της Αρχής του Dirichlet είναι η ακόλουθη:

Έστω F επίπεδο χωρίο (π.χ. πολυγωνική περιοχή) που περιέχει τα επίπεδα χωρία $F_1, F_2, \dots, F_n$. Αν το άθροισμα των εμβαδών των F_i ισούται ή υπερβαίνει το εμβαδόν του F , τότε δύο τουλάχιστον από τα χωρία έχουν κοινό εσωτερικό σημείο.

Τώρα μπορείτε να σκεφτείτε από μόνοι σας κάποιες άλλες Γεωμετρικές εκδοχές της που αναφέρονται π.χ. σε ευθύγραμμα τμήματα πάνω σε μια ευθεία ή τόξα ενός κύκλου κτλ.

Ο Dirichlet Johann Peter Gustav Lejeune, έζησε τον 19^ο αιώνα και υπήρξε μαθητής του περίφημου Gauss. Ο πατέρας του καταγόταν από τη Βελγική πόλη Richelet, του Dueren της Βεσφαλίας που τότε αποτελούσε μέρος της Γαλλικής αυτοκρατορίας. Έτσι απέκτησε και το όνομα με το οποίο τον γνωρίζουμε: "Le jeune de Richelet", δηλαδή "ο νεαρός από το Richelet=Dirichlet". Συνοπτικά: ο Dirichlet ήταν Γερμανός στην καταγωγή. . . Δεν ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε την ομώνυμη Αρχή στις εργασίες του, αλλά όπως συχνά συμβαίνει στα μαθηματικά, το όνομά του κάποτε συνδέθηκε με την Αρχή και από τότε κόλλησε...

Η Αρχή του Dirichlet φαίνεται και είναι όντως απλή. Οι συνέπειες της όμως είναι πολύ ενδιαφέρουσες και συχνά καθόλου απλές. Στο μυαλό μας μπορούμε να την έχουμε ως έναν τρόπο "χονδρικής" αποτίμησης του περιεχομένου κάποιας φωλιάς με δεδομένο το συνολικό περιεχόμενο όλων των φωλιών. Αν η κατάσταση αυτή σας θυμίζει τη μέση τιμή της Στατιστικής, δεν θα έχετε άδικο. Η Αρχή της περισσεροφωλιάς προσεγγίζει ακριβώς το "μέσο περιεχόμενο" κάθε φωλιάς, φράσσοντάς το "από κάτω" για μια τουλάχιστον φωλιά. Αυτό φαίνεται καλύτερα όταν γενικεύσουμε την Αρχή αυτή με τον απλούστερο δυνατό τρόπο ως εξής:

Αν σε κάθε μια από τις n φωλιές καταμετρηθούν το πολύ k περιστέρια (k κάποιος δοσμένος φυσικός) τότε προφανώς συνολικά σε όλες τις φωλιές καταμετρήθηκαν το πολύ $n \cdot k$ περιστέρια, με αποτέλεσμα:

Αν σε κάποια συνολική καταμέτρηση των περιστερών σε όλες τις n φωλιές αυτά βρεθούν τουλάχιστον $n \cdot k + 1$ σε πλήθος, τότε συμπεραίνουμε πως θα υπάρχει κάποια (τουλάχιστον μία) φωλιά με τουλάχιστον $k + 1$ περιστέρια.

Η τελευταία παρατήρηση-Πρόταση ονομάζεται **Γενικευμένη Αρχή του Dirichlet** ή της περισσεροφωλιάς. Στην πραγματικότητα αποτελεί μια εναλλακτική και ισοδύναμη διατύπωση της απλής Αρχής του Dirichlet, με την οποία ξεκινήσαμε το δοκίμιο αυτό.

Φυσικά και η ακόλουθη "οριακή" εκδοχή της Γενικευμένης Αρχής, είναι ομοίως ορθή:

Αν σε κάποια συνολική καταμέτρηση των περιστερών σε όλες τις n φωλιές αυτά βρεθούν τουλάχιστον $n \cdot k$ σε πλήθος, τότε συμπεραίνουμε πως θα υπάρχει κάποια (τουλάχιστον μία) φωλιά με τουλάχιστον k περιστέρια.

Να μια ακόμη "γενικευμένη" μορφή:

Αν k αντικείμενα τοποθετηθούν σε n δοχεία τότε υπάρχει δοχείο με τουλάχιστον $\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor + 1$ αντικείμενα.

Εδώ $\lfloor x \rfloor$ υποδηλώνει το ακέραιο μέρος του x . Ορίστε μία ακόμη παραλλαγή της Αρχής:

Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι μη μηδενικοί φυσικοί και στις φωλιές $1, 2, \dots, n$ τοποθετήθηκαν συνολικά $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n + 1$ περιστέρια, τότε υπάρχει φωλιά i στην οποία τοποθετήθηκαν τουλάχιστον x_i περιστέρια.

Υπάρχουν κι άλλες ενδιαφέρουσες γενικεύσεις της Αρχής, ορισμένες εκ των οποίων έχουν τόσο βαθιά αποτελέσματα που μελετώνται αυτόνομα ως ξεχωριστά κομμάτια μαθηματικών όπως π.χ. το Θεώρημα και οι αριθμοί του Ramsey. Δεν θα επεκταθούμε όμως.

Η Αρχή του Dirichlet, "μετράει" λοιπόν το "διακριτό" (πεπερασμένο πλήθος) περιεχόμενο κάποιων δοχείων (φωλιών κτλ). Είναι φυσιολογικό λοιπόν να θεωρείται ως αντικείμενο μελέτης της Συνδυαστικής που ούτε λίγο ούτε πολύ ασχολείται ακριβώς με τη μέτρηση αντικειμένων σε δοχεία... Όταν οι μετρήσεις σχετίζονται με γεωμετρικά "αντικείμενα", λέμε πως βρισκόμαστε στο χώρο της Συνδυαστικής Γεωμετρίας. Ελπίζουμε πως οι εφαρμογές της Αρχής Dirichlet που ακολουθούν θα σας προσφέρουν μια γεύση της δύναμής της.

Πρώτα, ασχοληθείτε με μια τελευταία ερώτηση: είναι αναγκαίο οι φωλιές στις οποίες αναφέρεται η αρχή του Dirichlet να είναι διακεκριμένες ή μήπως όχι;

1.10.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.23 Επιλέγουμε 51 αριθμούς μεταξύ των φυσικών $1, 2, \dots, 100$. Δείξτε πως μεταξύ των επιλεγέντων υπάρχουν δύο πρώτοι μεταξύ τους (δηλαδή δεν έχουν κοινό διαιρέτη κάποιον πρώτο αριθμό). $\square$

Λύση. Ίσως να θυμόσαστε πως μεταξύ των δοσμένων φυσικών $1, 2, \dots, 100$ υπάρχουν κάποια πολύ χαρακτηριστικά ζευγάρια πρώτων μεταξύ τους αριθμών, συγκεκριμένα τα $(1, 2), (2, 3), \dots, (99, 100)$. (Γιατί οι δύο αριθμοί σε κάθε ζευγάρι από αυτά είναι πρώτοι μεταξύ τους).

Τα ζευγάρια αυτά είναι 50 σε πλήθος και μπορούν να θεωρηθούν σαν οι φωλιές των περιστεριών, ενώ οι 51 αριθμοί που επιλέγουμε σαν τα περιστέρια που πρέπει να τοποθετηθούν το καθένα τους σε μια φωλιά, αυτή που περιέχει τον αριθμό στο ζευγάρι του ονόματός της. Π.χ. αν έχει επιλεγεί ο 5 σαν ένας από τους 51 αριθμούς, τότε τον τοποθετούμε στη φωλιά $(4, 5)$. Όμως έχουμε επιλέξει 51 αριθμούς και πρέπει να τους τοποθετήσουμε σε 50 φωλιές. Σύμφωνα με την Αρχή του Dirichlet, υπάρχουν δύο από τους επιλεγμένους αριθμούς που τοποθετήθηκαν στην ίδια φωλιά, οπότε είναι και πρώτοι μεταξύ τους όπως μας ζητήθηκε να δείξουμε.

Η ιδέα για τη δημιουργία των συγκεκριμένων "φωλιών" της λύσης, δεν είναι αυτόματη. Μπορεί ίσως να προκύψει μετά από λίγη σκέψη για το πόσο "στριμωγμένοι" είναι οι 51 επιλεγμένοι αριθμοί. Είναι τόσοι πολλοί που δεν γίνεται δύο οποιοιδήποτε διαδοχικοί να αφήνουν μεταξύ τους πάντοτε ένα κενό τουλάχιστον ενός αριθμού! Όμως τότε υπάρχουν διπλανοί διαδοχικοί από τους επιλεγμένους, άρα και πρώτοι μεταξύ τους... $\square$

Στο εξής θα προτιμήσουμε τη χρήση των "δοχείων" αντί των "φωλιών".

Παράδειγμα 1.24 (Paul Erdős) Επιλέγουμε 51 αριθμούς μεταξύ των φυσικών $1, 2, \dots, 100$. Δείξτε πως μεταξύ των επιλεγέντων υπάρχουν δύο τέτοιοι ώστε ο ένας να διαιρεί τον άλλον. $\square$

Λύση. Η διαιρετότητα ενός φυσικού αριθμού από έναν άλλον παραπέμπει άμεσα στην ανάλυση των αριθμών αυτών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Για το πρόβλημά μας, δε χρειαζόμαστε την πλήρη ανάλυση καθενός από τους 51 δοσμένους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, παρά αρκεί να τους αναλύσουμε στη μορφή $2^n k$ για κάποιον φυσικό εκθέτη $n \geq 0$ και κάποιον περιττό φυσικό k . Μία πολλά υποσχόμενη αναγωγή του προβλήματος σε ένα άλλο απλούστερο, είναι να δείξουμε πως υπάρχουν δύο από τους 51 που αναλύονται ως $2^n k$ και $2^m k$ αντιστοίχως, διότι τότε προφανώς το ζητούμενο αληθεύει (αν $n < m$ τότε ο $2^n k$ διαιρεί τον $2^m k$). Η ύπαρξη δύο τέτοιων αριθμών μεταξύ των 51 είναι όντως γεγονός και μπορεί να αποδειχθεί π.χ. ως εξής:

Διαμερίζουμε όλους τους φυσικούς $1, 2, \dots, 100$ στις ακόλουθες 50 ομάδες (δοχεία) αριθμών:

Ομάδα 1 : $2^0 \cdot 1, 2^1 \cdot 1, 2^2 \cdot 1, \dots$

Ομάδα 2 : $2^0 \cdot 3, 2^1 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, \dots$

Ομάδα 3 : $2^0 \cdot 5, 2^1 \cdot 5, 2^2 \cdot 5, \dots$

$\vdots$

Ομάδα 50 : $2^0 \cdot 99$

Η Αρχή του Dirichlet μας εγγυάται πως όποιοι κι αν είναι οι 51 αριθμοί που επιλέξαμε μεταξύ των $1, 2, \dots, 100$, υπάρχουν δύο από αυτούς που τοποθετούνται στην ίδια ομάδα από τις 50 που δημιουργήσαμε, όπως ζητούσαμε. $\square$

Είναι φανερό πως οι αριθμοί 100 και 51 της εκφώνησης του προηγούμενου Προβλήματος είναι βολικοί για το επιχείρημα της απόδειξης, αλλά όχι και απαραίτητα μοναδικοί. Δώστε γενικεύσεις του Προβλήματος.

Παράδειγμα 1.25 (61ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός Μαθηματικών, Θαλής, Γ' Γυμνασίου, Νοέμ. 2000) Σε μια Βαλκανική Συνάντηση Νέων συμμετείχαν 199 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Να αποδείξετε ότι μία τουλάχιστον χώρα είχε στην αποστολή της 13 τουλάχιστον παιδιά του ίδιου φύλλου. $\square$

Λύση. $199 = 9 \cdot 22 + 1$ οπότε η γενικευμένη Αρχή του Dirichlet μας βεβαιώνει πως υπάρχει χώρα με $22 + 1 = 23$ παιδιά στην αποστολή της.

Τα παιδιά της χώρας αυτής είναι είτε αγόρια είτε κορίτσια (δύο δοχεία) και $23 = 2 \cdot 12 + 1$, οπότε και πάλι η γενικευμένη Αρχή του Dirichlet μας βεβαιώνει πως για τη χώρα $12 + 1 = 13$ παιδιά είναι είτε όλα τους αγόρια είτε όλα τους κορίτσια. $\square$

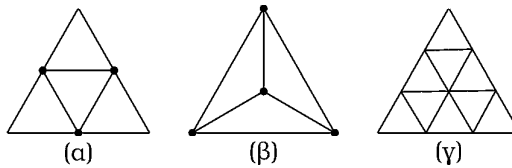
Παράδειγμα 1.26 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 3.

i. Στο εσωτερικό ή τις πλευρές του τριγώνου τοποθετούμε 5 σημεία. Δείξτε πως υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία που απέχουν μεταξύ τους απόσταση μικρότερη ή ίση του $\frac{3}{2}$.

ii. Στο εσωτερικό ή τις πλευρές του τριγώνου τοποθετούμε 4 σημεία. Δείξτε πως δεν είναι απαραίτητο να υπάρχουν δύο σημεία που απέχουν μεταξύ τους απόσταση μικρότερη ή ίση του $\frac{3}{2}$.

iii. Στο εσωτερικό ή τις πλευρές του τριγώνου τοποθετούμε 10 σημεία. Δείξτε πως υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία που απέχουν μεταξύ τους απόσταση μικρότερη ή ίση του 1. $\square$

Λύση. i. Ας παρατηρήσουμε πως $\frac{3}{2}$ είναι το μισό μήκος των πλευρών του ισοπλεύρου, δηλαδή το μήκος των τμημάτων που ενώνουν τα μέσα δύο οποιονδήποτε πλευρών του. Τα τμήματα αυτά διαμερίζουν το δοθέν ισόπλευρο σε 4 μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $\frac{3}{2}$ το καθένα (Σχήμα 1α).



Σχήμα 1: Διαμέριση ισόπλευρου τριγώνου σε μικρότερα κομμάτια

Ας παρατηρήσουμε επίσης πως σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο η μεγαλύτερη απόσταση δύο οποιονδήποτε σημείων των πλευρών ή του εσωτερικού του είναι αυτή δύο κορυφών του δηλαδή το μήκος της πλευράς του (γιατί:).

Οι δύο προηγούμενες παρατηρήσεις μας οδηγούν τώρα στην εξής "εύκολη" λύση:

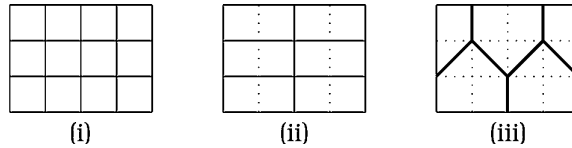
Σύμφωνα με την Αρχή του Dirichlet, αφού 5 σημεία πρέπει να τοποθετηθούν στα 4 μικρά ισόπλευρα τρίγωνα, θα υπάρχουν 2 (τουλάχιστον) από αυτά που θα τοποθετηθούν στο ίδιο μικρό ισόπλευρο τρίγωνο. Όμως τότε η απόσταση μεταξύ τους είναι το πολύ όσο και η πλευρά του ισόπλευρου, δηλαδή $\frac{3}{2}$ ο.ε.δ.

ii. Αν τα σημεία τοποθετηθούν στις τρεις κορυφές του ισόπλευρου και στο κέντρο βάρους του (ή κοντά του) (Σχήμα 1β), τότε ανά δύο οι αποστάσεις μεταξύ των βουλών υπερβαίνουν τα $\frac{3}{2}$ (αποδείξτε το).

iii. Διαμερίστε το δοθέν ισόπλευρο σε 9 μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα όπως στο Σχήμα 1γ και επαναλάβετε το σκεπτικό της λύσης στο ερώτημα i. $\square$

Με την ευκαιρία αποδειξτε την ακόλουθη Γεωμετρική Πρόταση:

Πρόταση 1.27 Η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων επάνω ή στο εσωτερικό οποιουδήποτε επίπεδου πολυγώνου (κυρτού ή μη-κυρτού) επιτυγχάνεται για δύο από τις κορυφές του. (Προβείτε σε παρατηρήσεις, γενικεύσετε, παράγετε άληθες προτάσεις). $\square$



Σχήμα 2: Διαμέριση ορθογωνίου 3×4 σε μικρότερα κομμάτια

Παράδειγμα 1.28 Στο εσωτερικό ή την περίμετρο (περίγραμμα) ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου διαστάσεων 3×4 τοποθετούμε

- i. 13 σημεία. Δείξτε πως υπάρχουν δύο από αυτές με απόσταση το πολύ 1.
- ii. 7 σημεία. Δείξτε πως υπάρχουν δύο από αυτές με απόσταση το πολύ $\sqrt{5}$.
- iii. 6 σημεία. Δείξτε πως υπάρχουν δύο από αυτές με απόσταση το πολύ $\sqrt{5}$. $\square$

Λύση. Ακολουθήστε το σκεπτικό του προηγούμενου Παραδείγματος διαμερίζοντας για κάθε ερώτημα το ορθογώνιο στο κατάλληλο πλήθος σωστών "δοχείων". Μία σκέψη για τα δοχεία για την κάθε περίπτωση δίνεται στο Σχήμα 2. $\square$

Παράδειγμα 1.29 (11η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων, Ιούνιος 2007, Βουλγαρία). Δίνονται 50 σημεία στο επίπεδο ανά τρία μη συνευθειακά. Καθένα από τα αυτά τα σημεία χρωματίζεται με ένα από τέσσερα δοσμένα χρώματα. Αποδείξτε πως υπάρχει χρώμα και 130 σκαληνά τρίγωνα με κορυφές του χρώματος αυτού. $\square$

Λύση. Σκέψη στο πρόχειρο: Αν το ζητούμενο αληθεύει για ένα από τα τέσσερα δοσμένα χρώματα που χρωματίζει έστω n σημεία, τότε θα αληθεύει και για οποιοδήποτε άλλο χρώμα που χρωματίζει περισσότερα από n σημεία, αφού για κανένα από αυτά τα χρώματα δεν έχουμε κάποιες ιδιαίτερες πληροφορίες. Ωθούμαστε λοιπόν να περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας στο χρώμα που χρωμάτισε τις περισσότερες κορυφές, ώστε η πιθανότητα εύρεσης αρκετών σκαληνών τριγώνων με αυτό το χρώμα να αυξάνει. Φυσικά δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε ακριβώς πόσες κορυφές χρωματίζει αυτό το χρώμα, αλλά χρησιμοποιώντας την Αρχή του Dirichlet μπορούμε να είμαστε σίγουροι για τη χαμηλότερη τιμή του πλήθους των κορυφών που χρωματίζει. Να γνωρίζουμε δηλαδή ποια είναι η χειρότερη δυνατή περίπτωση στην οποία και πάλι το ζητούμενο ισχύει. Οφείλουμε φυσικά να δείξουμε πως στην περίπτωση αυτή πράγματι ισχύει. Συνεπώς:

Σκέψη στο καθαρό: Αφού $50 = 4 \cdot 12 + 2 \geq 4 \cdot 12 + 1$, σύμφωνα με τη γενικευμένη Αρχή του Dirichlet, υπάρχει χρώμα μεταξύ των 4 δοσμένων που χρωματίζει τουλάχιστον $12 + 1 = 13$ από τα 50 δοσμένα σημεία.

Για να τελειώσουμε, απομένει να αποδείξουμε πως οποιαδήποτε 13 σημεία $A_1, A_2, \dots, A_{13}$ του επιπέδου, ανά τρία μη συνευθειακά, ορίζουν τουλάχιστον 130 σκαληνά τρίγωνα.

Πρώτα, ας παρατηρήσουμε πως καθώς τα A_i δεν είναι συνευθειακά, 3 οποιαδήποτε από αυτά ορίζουν ένα τρίγωνο. Οπότε το πλήθος όλων των τριγώνων (σκαληνών και μη) που ορίζονται από τα 13 σημεία A_i ισούται με

$$\binom{13}{3} = \frac{13!}{3! \cdot (13-3)!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} = 286.$$

Για να υπολογίσουμε πόσα τουλάχιστον από αυτά τα 286 τρίγωνα είναι σκαληνά, αρκεί να υπολογίσουμε πόσα το πολύ από αυτά είναι ισοσκελή:

Σταθεροποιώντας δύο από τα A_i , έστω τα A_1, A_2 , τότε μεταξύ των τριγώνων με δύο κορυφές τις A_1, A_2 και τρίτη κορυφή κάποιο άλλο από τα A_i , υπάρχουν 2 το πολύ που είναι ισοσκελή με βάση το $A_1 A_2$: αν υπήρχαν 3 ή περισσότερα, τότε όλες οι κορυφές αυτών των ισοσκελών θα

βρισκόταν πάνω στη μεσοκάθετη του A_1A_2 , δηλαδή θα υπήρχαν 3 ή περισσότερα συνευθειακά μεταξύ των A_i , άτοπο.

Το ίδιο συμβαίνει οποιαδήποτε 2 τυχαία σημεία κι αν σταθεροποιήσουμε μεταξύ των A_i . Αφού 2 τυχαία σημεία από τα A_i επιλέγονται κατά $\binom{13}{2}$ τρόπους, θα υπάρχουν το πολύ

$$2 \cdot \binom{13}{2} = 2 \cdot \frac{13!}{2! \cdot (13-2)!} = 2 \cdot \frac{13 \cdot 12}{2!} = 2 \cdot \frac{13 \cdot 12}{2} = 2 \cdot 78 = 156$$

ισοσκελή τρίγωνα με κορυφές στα A_i . Μάλιστα στο πλήθος αυτό είναι δυνατό κάποιο τρίγωνο να μετρήθηκε 3 φορές (αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο), αλλά το γεγονός αυτό δεν αλλάζει την ακόλουθη σκέψη:

Αφού υπάρχουν 286 τρίγωνα με κορυφές τα A_i και το πολύ 156 από αυτά είναι ισοσκελή, θα υπάρχουν $286 - 156 = 130$ που είναι σκαληνά, ο.ε.δ. $\square$

Παράδειγμα 1.30 Επιλέγουμε 10 αριθμούς μεταξύ των φυσικών $1, 2, \dots, 100$. Δείξτε πως υπάρχουν δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του συνόλου των επιλεγμένων αριθμών, με το ίδιο άθροισμα στοιχείων. $\square$

Λύση. Ας ονομάσουμε S το σύνολο των 10 επιλεγμένων αριθμών. Θέλουμε να εκφράσουμε σκέψεις για τα μη κενά υποσύνολα του S , και συγκεκριμένα για κάθε τέτοιο υποσύνολο A μας ενδιαφέρει το άθροισμα των στοιχείων του Σ_A . Καθώς θέλουμε να συγκρίνουμε δύο τέτοια αθροίσματα (και να τα δείξουμε ίσα), καλό θα ήταν να έχουμε μια ιδέα για το πόσο μεγάλα ή μικρά είναι αυτά. Τετριμμένα: $1 \leq \Sigma_A \leq 91 + 92 + \dots + 99 + 100$, δηλαδή $1 \leq \Sigma_A \leq 955$ για κάθε υποσύνολο A του S . Τα αθροίσματα λοιπόν που μας ενδιαφέρουν έχουν σχετικά λίγες δυνατές τιμές (δοχεία): τους φυσικούς $1, 2, \dots, 955$ που είναι 955 σε πλήθος.

Επικαλούμενοι την Αρχή του Dirichlet, θα έχουμε λοιπόν σχεδόν λύσει το Πρόβλημα αν είμαστε τυχεροί και διαπιστώσουμε πως υπάρχουν περισσότερα από 955 μη κενά υποσύνολα του S . Αυτό όντως αληθεύει, αφού μια κλασσική άσκηση στη Συνδυαστική βεβαιώνει για το σύνολο S με 10 στοιχεία, υπάρχουν $2^{10} = 1028$ υποσύνολα, οπότε 1027 μη κενά υποσύνολα.

Σύμφωνα λοιπόν την Αρχή του Dirichlet γνωρίζουμε πλέον πως υπάρχουν δύο διακεκριμένα (διαφορετικά μεταξύ τους) μη κενά υποσύνολα του S , έστω A και B με $\Sigma_A = \Sigma_B$. Η Άσκηση όμως ζητάει τα A και B να είναι και ξένα μεταξύ τους. Αυτό δεν αποτελεί Πρόβλημα, αφού αν τα A και B που έχουμε στα χέρια μας δεν είναι ξένα μεταξύ τους, αρκεί να αποβάλλουμε από το καθένα τα κοινά τους στοιχεία. Τότε προκύπτουν δύο υποσύνολα A' και B' του S που είναι ξένα μεταξύ τους και φυσικά έχουν το ίδιο άθροισμα στοιχείων (βλέπετε το γιατί:). Υπάρχει και πάλι όμως μια μικρή λεπτομέρεια. Πρέπει να σιγουρευτούμε πως κανένα από τα A', B' δεν είναι το κενό σύνολο! Αυτό είναι όμως προφανές: αν κάποιο από τα A', B' είναι το κενό, έστω το A' , τότε το A θα πρέπει να είναι υποσύνολο του B . Αφού όμως $\Sigma_A = \Sigma_B$, θα πρέπει τα A και B να είναι το ίδιο σύνολο, άτοπο (τα A και B είναι διακεκριμένα σύνολα). $\square$

Παράδειγμα 1.31 (61ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός Μαθηματικών, Θαλής, Γ' Λυκείου, Νοέμ. 2000) Σε μία κατασκήνωση υπάρχουν 577 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Σε οποιαδήποτε ομάδα 9 παιδιών¹ υπάρχουν 2 τουλάχιστον παιδιά με το ίδιο ύψος. Να αποδείξετε πως υπάρχει ομάδα 5 παιδιών από την ίδια χώρα που είναι του ίδιου φύλλου και έχουν το ίδιο ύψος. $\square$

Λύση. $577 = 64 \cdot 9 + 1$ οπότε η γενικευμένη Αρχή του Dirichlet μας βεβαιώνει πως υπάρχει χώρα, έστω A , με τουλάχιστον $64 + 1 = 65$ παιδιά.

$65 = 2 \cdot 32 + 1$ οπότε η γενικευμένη Αρχή του Dirichlet μας βεβαιώνει πως για τη χώρα A υπάρχουν $32 + 1 = 33$ παιδιά του ίδιου φύλλου.

Ας ονομάσουμε $1, 2, \dots, 33$ τα παιδιά και ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως είναι $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{33}$ τα αντίστοιχα ύψη τους. Θα δείξουμε πως μεταξύ των v_i υπάρχουν 5 με διακεκριμένους δείκτες που είναι ίσα ως αριθμοί, οπότε θα έχουμε τελειώσει.

¹ Εδώ εννοείται (αν και η παρατήρηση δε θα μας χρειαστεί): παιδιών όχι αναγκαστικά της ίδιας χώρας.

Ας παρατηρήσουμε πως ουσιαστικά ψάχνουμε να δείξουμε πως υπάρχουν παιδιά $i < j$ με το ίδιο ύψος $v_i = v_j$ και με $j - i \geq 4$. Τότε όλα τα παιδιά k με $i \leq k \leq j$ έχουν το ίδιο ύψος $v_i = v_j$ και είναι τουλάχιστον 5 σε πλήθος.

Ας "χωρίσουμε νοητά" λοιπόν τα 33 ύψη σε 5-άδες (λαμβάνοντας υπόψη τα άκρα) θεωρώντας την 9-άδα των παιδιών με ύψη $v_1, v_5, v_9, v_{13}, v_{17}, v_{21}, v_{25}, v_{29}, v_{33}$. Σύμφωνα με την υπόθεση του Προβλήματος, υπάρχουν δύο παιδιά σε αυτή την 9-άδα που έχουν το ίδιο ύψος. Δηλαδή δύο από τους αριθμούς $v_1, v_5, v_9, v_{13}, v_{17}, v_{21}, v_{25}, v_{29}, v_{33}$ είναι ίσοι μεταξύ τους, έστω οι v_i, v_j με $j > i$. Είναι όμως φανερά $j - i \geq 4$, οπότε τελειώσαμε. $\square$

Παράδειγμα 1.32 Δίνονται 9 σημεία του χώρου το καθένα τους με ακέραιες συντεταγμένες. Δείξτε πως υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δύο από τα δοσμένα σημεία που περιέχει και άλλο σημείο με ακέραιες συντεταγμένες (όχι αναγκαστικά κάποιο από τα δοσμένα). $\square$

Λύση. Το να ψάχνουμε πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα για σημεία με ακέραιες συντεταγμένες δεν είναι συνηθισμένη υπόθεση. Αφού όμως τα άκρα των τμημάτων που μας ενδιαφέρουν έχουν ακέραιες συντεταγμένες, μπορούμε να θεωρήσουμε χαρακτηριστικά σημεία των τμημάτων, και εκφράζοντας τις συντεταγμένες τους συναρτήσει αυτών των άκρων κατά τα γνωστά, να ελέγξουμε αν και αυτά τα σημεία έχουν τέτοιες συντεταγμένες όπως ζητείται. Το χαρακτηριστικότερο σημείο ενός τμήματος, πέραν των άκρων είναι φυσικά το μέσον του. Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να δείξουμε πως υπάρχει τμήμα με άκρα δύο από τα δοσμένα σημεία, το μέσον του οποίου έχει ακέραιες συντεταγμένες.

Αν $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ είναι δύο από τα δοσμένα σημεία, τότε το μέσον του τμήματος AB είναι το σημείο $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$. Καθώς τα $x_i, y_i, z_i, i = 1, 2$ είναι ακέραιοι αριθμοί, οι συντεταγμένες του M θα είναι επίσης ακέραιοι ακριβώς στην περίπτωση που τα x_1, x_2 έχουν την ίδια αρτιότητα (και τα δύο άρτιοι ή και τα δύο περιττοί) και ομοίως τα y_1, y_2 και ομοίως τα z_1, z_2 . Θα έχουμε δείξει λοιπόν το ζητούμενο αν καταφέρουμε να δείξουμε πως μεταξύ των δοσμένων σημείων υπάρχουν δύο των οποίων οι αντίστοιχες συντεταγμένες έχουν την ίδια αρτιότητα (δηλαδή είναι και οι δύο είτε άρτιοι είτε περιττοί ακέραιοι).

Ας παρατηρήσουμε πως καθώς ένας τυχαίος ακέραιος έχει 2 επιλογές ως προς την αρτιότητά του (είναι είτε άρτιος είτε περιττός), μια τριάδα ακεραίων (όπως οι συντεταγμένες των δοσμένων σημείων) έχουν $2^3 = 8$ επιλογές ως προς την αρτιότητα που παρουσιάζουν π.χ. (άρτ, περ, περ) ή (άρτ, αρτ, περ) κτλ. Όμως τα δοσμένα σημεία είναι 9 σε πλήθος. Αφού $9 > 8$, σύμφωνα με την Αρχή του Dirichlet υπάρχουν δύο σημεία μεταξύ των δοσμένων, οι τριάδες των συντεταγμένων των οποίων παρουσιάζουν την ίδια αρτιότητα (δηλαδή οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους παρουσιάζουν την ίδια αρτιότητα) ο.ε.δ. $\square$

Στο Παράδειγμα που ακολουθεί, μονάχα το πρώτο ερώτημα θα επιλυθεί με χρήση της Αρχής του Dirichlet. Τα υπόλοιπα δύο συνοδευτικά ερωτήματα παρουσιάζονται ως παραπλήσια "στο πνεύμα" του περιεχομένου τους.

Παράδειγμα 1.33 i. Έστω A, B δύο σημεία του επιπέδου και έστω S το σύνολο των σημείων του επιπέδου για τα οποία οι αποστάσεις από τα A και B είναι φυσικοί αριθμοί. Δείξτε πως υπάρχουν δύο σημεία του S με διαφορά αποστάσεων από τα A και B (κατά απόλυτο τιμή) ίδια.

ii. (**Erdos-Anning**) Έστω S ένα απειροσύνολο σημείων του επιπέδου με την ιδιότητα πως οι μεταξύ τους αποστάσεις είναι φυσικοί αριθμοί. Δείξτε τότε πως τα σημεία του S είναι συνευθειακά.

iii. Δείξτε πως για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 3$ υπάρχει ένα σύνολο S n μη συνευθειακών σημείων του επιπέδου, με την ιδιότητα πως οι μεταξύ τους αποστάσεις είναι φυσικοί αριθμοί. $\square$

Λύση. i. Εξαιτίας της τριγωνικής ανισότητας έχουμε πως για το τυχαίο σημείο M του S ισχύει $|\overline{MA} - \overline{MB}| \leq \overline{AB}$. Όμως ο αριθμός $\overline{AB}$ είναι σταθερός και ο $|\overline{MA} - \overline{MB}|$ είναι φυσικός. Δηλαδή ο φυσικός αριθμός $|\overline{MA} - \overline{MB}|$ έχει το πολύ $\lfloor \overline{AB} \rfloor$ δυνατές τιμές (δοχεία), όπου θυμηθείτε πως $\lfloor x \rfloor$ υποδηλώνει το ακέραιο μέρος του x . Αν δείξουμε πως υπάρχουν

περισσότερα από $\left\lceil \overline{AB} \right\rceil$ σε πλήθος σημεία στο S , τότε η Αρχή του Dirichlet θα μας δώσει το ζητούμενο.

Πραγματικά, στο S υπάρχουν άπειρα σε πλήθος σημεία. Το κάθε σημείο του S περιγράφεται ως τομή δύο κύκλων με κέντρα τα A και B και φυσικούς αριθμούς n, m αντιστοίχως, ώστε $|n - m| \leq \left\lceil \overline{AB} \right\rceil \leq n + m$. Φυσικά υπάρχουν άπειροι τέτοιοι κύκλοι οπότε και σημεία στο S (αρκεί π.χ. να επιλέξουμε φυσικούς n, m ίσους μεταξύ τους και μεγαλύτερους του $\left\lceil \overline{AB} \right\rceil$).

ii. Ας υποθέσουμε πως υπάρχουν τρία μη συνευθειακά σημεία A, B, C του S .

Αφού το S έχει άπειρα σημεία, υπάρχουν δύο ευθείες από τις AB, BC, CA των οποίων η ένωση δε φιλοξενεί άπειρα από τα σημεία του S (ένα είδος γενίκευσης της Αρχής του Dirichlet. Αποδείξτε τον ισχυρισμό αυστηρά) π.χ. οι AB και AC . Ας είναι S' το σύνολο όλων των σημείων του S που δεν ανήκουν ούτε στην ευθεία AB ούτε στην ευθεία AC (Σχήμα 3α). Σημειώστε πως το S' είναι απειροσύνολο.

Αν M είναι τυχαίο σημείο του S' , τότε εξαιτίας της τριγωνικής ανισότητας έχουμε $\left| \overline{MA} - \overline{MB} \right| < \overline{AB}$ όπου το γνήσιο της ανισότητας δικαιολογείται από το γεγονός πως το σημείο M δεν ανήκει στην ευθεία AB . Άρα ο φυσικός αριθμός $\left| \overline{MA} - \overline{MB} \right|$ μπορεί να αποκτήσει μονάχα μία από τις $\overline{AB}$ σε πλήθος τιμές (θυμηθείτε ο $\overline{AB}$ είναι φυσικός) $0, 1, 2, \dots, \overline{AB} - 1$. Συνεπώς το M ανήκει είτε στη μεσοκάθετο c_0 του τμήματος AB (αν $\left| \overline{MA} - \overline{MB} \right| = 0$ είτε σε μια από τις παραβολές c_i για $i = 1, 2, \dots, \overline{AB} - 1$ που ορίζονται ως το σύνολο των σημείων με διαφορά αποστάσεων από τα A και B ίση με i . (Η c_i για $i = 1, 2, \dots, \overline{AB} - 1$ είναι όντως παραβολή και όχι η ευθεία AB , αφού $\left| \overline{MA} - \overline{MB} \right| < \overline{AB}$).

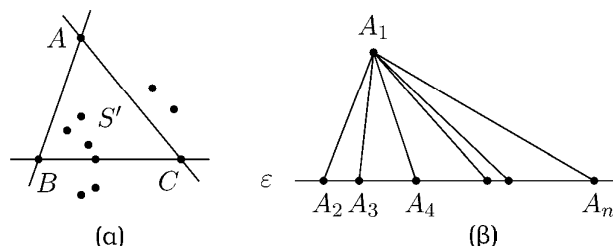
Ομοίως δείχνουμε πως το τυχαίο σημείο M του S' βρίσκεται είτε πάνω στη μεσοκάθετο c^0 του τμήματος AC , είτε πάνω σε μια από τις παραβολές c^i για $i = 1, 2, \dots, \overline{AC}$ που ορίζονται ως το σύνολο των σημείων με διαφορά αποστάσεων από τα A και C ίση με i .

Συνεπώς το τυχαίο σημείο M του S' είναι κοινό σημείο κάποιας c_i με κάποια c^j . Όμως οι c_i είναι πεπερασμένες σε πλήθος όπως είναι και οι c^j . Μάλιστα καμία c_i δεν ταυτίζεται με κάποια c^j (εδώ δεν θα πρέπει να έχετε δυσκολία...). Συνεπώς το συνολικό πλήθος τομών που μπορεί να έχουν όλες οι c_i με όλες τις c^j είναι πεπερασμένο (βρείτε πόσα το πολύ κοινά σημεία έχει μια c_i με μια c^j). Άρα και το S' πρέπει να έχει πεπερασμένα σε πλήθος σημεία, άτοπο.

Οπότε η αρχική μας υπόθεση ήταν λανθασμένη, και τα σημεία του S οφείλουν να είναι συνευθειακά.

Με την ευκαιρία, παρατηρήστε πως το γνήσιο της ανισότητας $\left| \overline{MA} - \overline{MB} \right| < \overline{AB}$ δεν ήταν πράγματι καθοριστικό στην παραπάνω απόδειξη. Μπορείτε να εντοπίσετε την πιο καθοριστική σκέψη στην απόδειξη;

iii. Για κάθε φυσικό n , θα κατασκευάσουμε ένα τέτοιο σύνολο $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.



Σχήμα 3: (α) Υπάρχουν άπειρα σημεία του S έξω από τις AB, AC . (β) Προαπαθώντας να τοποθετήσουμε n σημεία των οποίων οι μεταξύ τους αποστάσεις είναι φυσικοί αριθμοί.

Σκοπός μας είναι να "κρατηθούμε" όσο πιο κοντά γίνεται στην ευθεία, ώστε να "ελέγχουμε" την κατασκευή όσον το δυνατόν περισσότερο. Μια πρώτη προσπάθεια που καθώς θα φανεί στην πορεία μπορεί να ολοκληρωθεί επιτυχώς, είναι να τοποθετήσουμε τα $A_2, A_3, \dots, A_n$ σε μια ευθεία (ε) (Σχήμα 3β) και το A_1 εκτός της (ε) πάνω στην κάθετη στην (ε) στο σημείο A_2 . Δίνοντας στις αποστάσεις A_1A_2 και $A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$ τιμές φυσικούς αριθμούς, έχουμε

σχεδόν το ζητούμενο. Όμως δεν υπάρχουν εγγυήσεις πως και τα μήκη $\overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}, \dots, \overline{A_1A_n}$ είναι επίσης φυσικοί όπως μας ζητείται. Συνεπώς, τα $\overline{A_1A_2}$ και $\overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ θα πρέπει να αποκτήσουν όχι απλώς τιμές κάποιους φυσικούς, αλλά κάποιους φυσικούς "ειδικής" μορφής. Ας δούμε λοιπόν τι ακριβώς θέλουμε. Θέλουμε:

$$\text{o } \overline{A_1A_3} = \sqrt{\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2} \text{ να είναι φυσικός}$$

$$\text{o } \overline{A_1A_4} = \sqrt{\overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2} \text{ να είναι φυσικός}$$

⋮

$$\text{o } \overline{A_1A_n} = \sqrt{\overline{A_1A_{n-1}}^2 + \overline{A_{n-1}A_n}^2} \text{ να είναι φυσικός}$$

Το ζήτημα θα πρέπει να μας θυμίζει πλέον τις Πυθαγόρειες τριάδες (τριάδες φυσικών της μορφής $(a^2 + b^2, |a^2 - b^2|, 2ab)$ με a, b φυσικούς που μπορούν να είναι πλευρές ορθογώνιων τριγώνων). Δανειζόμενοι από την ομοιότητα αυτή, επιλέγουμε το $\overline{A_1A_2}$ ώστε $\overline{A_1A_2} = 2ab$ για κάποιους φυσικούς a, b . Τότε αν για παράδειγμα επιλέξουμε να είναι $\overline{A_2A_3} = |a^2 - b^2|$, θα έχουμε και

$$\overline{A_1A_3} = \sqrt{\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2} = \sqrt{(2ab)^2 + |a^2 - b^2|^2} = a^2 + b^2 \text{ που είναι ακέραιος!}$$

Οπότε μια εξαιρετικά βολική επιλογή για το $\overline{A_1A_2}$ θα είναι μια φυσική τιμή c που μπορεί να αναλυθεί ως $c = 2a_i b_i$ με τουλάχιστον $n - 2$ τρόπους, δηλαδή για τουλάχιστον $n - 2$ ζευγάρια φυσικών a_i, b_i $i = 3, 4, \dots, n$ με π.χ. $a_i \leq b_i$. Τότε επιλέγοντας και $\overline{A_2A_i} = |a_i^2 - b_i^2|$ για κάθε $i = 3, 4, \dots, n$ θα έχουμε και $\overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}, \dots, \overline{A_1A_n}$ φυσικοί και θα έχουμε τελειώσει. (Μπορείτε να δείτε σε τι μας χρησιμεύει ο περιορισμός $a_i \leq b_i$.)

Τέτοια φυσική τιμή c πράγματι υπάρχει! Για παράδειγμα, για $c = 2^{2n+1}$ έχουμε $c = 2 \cdot 2^1 \cdot 2^{2n-1} = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^{2n-2} = \dots = 2 \cdot 2^{n-2} \cdot 2^{2n-(n-2)}$.

Μια πρόκληση για εσάς: για την πιο πάνω τιμή του c , αντιπροσωπεύει άραγε το Σχήμα 3β την πραγματική διάταξη των σημείων $A_3, A_4, \dots, A_n$ πάνω στην ευθεία (ε) ; □

Στο Παράδειγμα 1.6 συναντήσαμε ένα μικρό αποτέλεσμα σχετικά με χειραψίες. Ορίστε ένα ακόμη:

Παράδειγμα 1.34 (Το Πρόβλημα των χειραψιών) Δείξτε πως μεταξύ 6 οποιονδήποτε ανθρώπων, υπάρχουν 3 που γνωρίζονται μεταξύ τους ανά δύο, είτε υπάρχουν 3 που δε γνωρίζονται μεταξύ τους ανά δύο. □

Λύση. Το Πρόβλημα αυτό είναι ένα από τα γνωστότερα της Συνδυαστικής, και σε μια άλλη διατύπωσή του που δικαιολογεί και το όνομά του ως το "Πρόβλημα των χειραψιών" διατυπώνεται ως: σε κάθε πάρτι, μεταξύ οποιονδήποτε 6 παρισταμένων υπάρχουν 3 που ανά δύο αντάλλαξαν χειραψία, είτε υπάρχουν 3 που ανά δύο δεν αντάλλαξαν χειραψία. Μάλιστα αυτή η διατύπωση ενδεικνύεται περισσότερο από αυτή της εκφώνησης, καθώς το να ανταλλάξουν δύο άτομα χειραψία θεωρείται πιο εύκολα ως αμοιβαία σχέση, ενώ το να γνωρίζονται δύο άτομα έχει κάποιες δυσκολίες ως προς την αμοιβαιότητά της: φανταστείτε π.χ. την περίπτωση να συναντήσουμε στην ομάδα των 6 ατόμων κάποιον που γνωρίζουμε και αυτός να κάνει πως δεν μας ξέρει...!

Θέλουμε το συμπέρασμά μας να αναφέρεται σε σχέσεις 2 ατόμων κάθε φορά: "γνωρίζονται" ή "δεν γνωρίζονται" (ή και "αντάλλαξαν χειραψία" ή "δεν αντάλλαξαν χειραψία"). Ο προσφιλής τρόπος για να παραστήσουμε τέτοια δεδομένα πιο γραφικά (ώστε να υποδοθηθούμε στην "τακτοποίησή" τους) είναι να δανειστούμε τεχνικές από τη Θεωρία Γραφημάτων και να φανταστούμε τους 6 ανθρώπους ως σημεία στο επίπεδο και τη σχέση μεταξύ δύο οποιονδήποτε από αυτούς (γνωρίζονται ή όχι) ως το τμήμα μεταξύ των σημείων που τους παριστάνουν, με ένα χρώμα π.χ. κόκκινο αν οι δύο άνθρωποι γνωρίζονται, και με ένα άλλο χρώμα π.χ. πράσινο αν αυτοί δεν γνωρίζονται. Δεν βλάπτει τη γενικότητα να θεωρήσουμε πως τα σημεία τοποθετήθηκαν ανά τρία μη συνευθειακά. Τότε η Άσκηση επαναδιατυπώνεται ως:

Δίνονται 6 σημεία στο επίπεδο, ανά 3 μη συνευθειακά. Τα τμήματα με άκρα τα σημεία αυτά βάφονται είτε κόκκινα είτε πράσινα. Δείξτε πως υπάρχει τρίγωνο όλες ο πλευρές του οποίου έχουν το ίδιο χρώμα (είναι όπως λέμε "μονοχρωματικό").

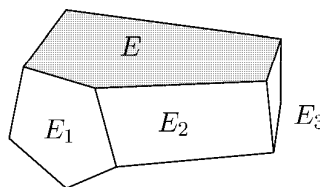
Ας θεωρήσουμε ένα σημείο A και τα 5 ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το A με τα 5 υπόλοιπα από τα δοσμένα σημεία. Αφού κάθε ένα από αυτά τα τμήματα έχει ένα από 2 χρώματα (δοχεία), και όλα τα τμήματα είναι $5 = 2 \cdot 2 + 1$, σύμφωνα με τη (γενικευμένη) Αρχή του Dirichlet θα υπάρχουν $2 + 1 = 3$ από αυτά με το ίδιο χρώμα, έστω πράσινο. Τα άκρα των 3 αυτών τμημάτων ορίζουν ένα τρίγωνο που είτε είναι μονοχρωματικό (είτε πράσινο είτε κόκκινο), είτε όχι. Στη δεύτερη περίπτωση, θα υπάρχει πράσινη πλευρά του. Αυτή, μαζί με τα δύο τμήματα που ενώνουν το A με τα άκρα της, αποτελούν ένα μονοχρωματικό (πράσινο) τρίγωνο. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ισχύει το ζητούμενο. $\square$

Σχετικά με χειραψίες δείτε και την Άσκηση 1.77.

Παράδειγμα 1.35 Δείξτε πως σε κάθε πολυέδρο υπάρχουν δύο τουλάχιστον έδρες με το ίδιο πλήθος πλευρών. $\square$

Λύση. Έστω E μία έδρα με το μεγαλύτερο πλήθος ακμών και έστω n το πλήθος αυτό. Κάθε ακμή της E είναι ακμή μιας ακόμη έδρας του πολυέδρου (Σχήμα 4), και μάλιστα σε διαφορετικές ακμές της E αντιστοιχούν διαφορετικές τέτοιες νέες έδρες (βλέπετε το λόγο;). Έστω $E_1, E_2, \dots, E_n$ οι νέες αυτές έδρες.

Ας παρατηρήσουμε πως για το πλήθος x_i των ακμών της κάθε έδρας E_i ισχύει προφανώς $3 \leq x_i \leq n$. Οπότε οι n σε πλήθος ακέραιοι x_i μπορούν να επιλεγούν μεταξύ των $n - 2$ φυσικών τιμών $\{3, 4, \dots, n\}$. Σύμφωνα με την Αρχή του Dirichlet, δύο από τα x_i είναι ίσα, ο.ε.δ. $\square$



Σχήμα 4: Κάθε ακμή της E είναι ακμή ακριβώς μιας ακόμη έδρας του πολυέδρου.

Παράδειγμα 1.36 (Το Πρόβλημα του σκακιστή). Κάποιος σκακιστής θέλει να προγραμματίσει παιχνίδια προπόνησης για μια περίοδο 77 συνεχόμενων ημερών έτσι ώστε κάθε μέρα να παίζει ένα τουλάχιστον παιχνίδι, αλλά συνολικά να μην παίζει περισσότερα από 132 παιχνίδια ώστε να μην κουραστεί. Δείξτε πως σε κάθε τέτοιο πρόγραμμα προπόνησης υπάρχει μια περίοδος διαδοχικών ημερών κατά τη διάρκεια της οποίας ο σκακιστής θα παίζει ακριβώς 21 παιχνίδια. $\square$

Λύση. Η ακόλουθη προκαταρκτική σκέψη για το τι ακριβώς ψάχνουμε θα μας βοηθήσει να δώσουμε και μια πλήρη δικαιολόγηση της ορθότητας του ισχυρισμού.

Αν ο σκακιστής έχει παίζει μέχρι και την k ημέρα x_k παιχνίδια ($k = 1, 2, \dots, 77$), τότε πρέπει να δείξουμε πως υπάρχουν ημέρες i και $j > i$ ώστε $x_j - x_i = 21$. Ισοδυνάμως θέλουμε να δείξουμε πως υπάρχουν $i, j \in \{1, 2, \dots, 77\}$ ώστε $x_j = x_i + 21$. Δηλαδή θέλουμε να δείξουμε πως κάποιος από τους αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_{77}$ ισούται με κάποιον από τους αριθμούς $x_1 + 21, x_2 + 21, \dots, x_{77} + 21$.

Πραγματικά, ας παρατηρήσουμε πως τόσο οι $x_1, x_2, \dots, x_{77}$, όσο και οι $x_1 + 21, x_2 + 21, \dots, x_{77} + 21$ είναι φυσικοί αριθμοί, και πως για καθέναν από αυτούς, έστω y , ισχύει $1 \leq y \leq 132 + 21 = 153$. Δηλαδή οι αριθμοί αυτοί έχουν 153 δυνατές τιμές (δοχεία), αλλά είναι όλοι μαζί συνολικά $77 + 77 = 154$ σε πλήθος. Σύμφωνα με την Αρχή του Dirichlet, υπάρχουν δύο από αυτούς που "μπαίνουν στο ίδιο δοχείο", δηλαδή έχουν την ίδια τιμή, δηλαδή είναι ίσοι μεταξύ τους.

Ομως για οποιουδήποτε διακεκριμένους δείκτες i, j , είναι αδύνατο να έχουμε $x_i = x_j$ αφού ο σκακιστής παίζει κάθε μέρα τουλάχιστον ένα παιχνίδι, και ομοίως είναι αδύνατο να

έχουμε $x_i + 21 = x_j + 21$. Συνεπώς οι δύο αριθμοί μεταξύ των $x_1, x_2, \dots, x_{77}, x_1 + 21, x_2 + 21, \dots, x_{77} + 21$ που είναι ίσοι σύμφωνα με την Αρχή του Dirichlet θα πρέπει να ανήκουν ο ένας στους $x_1, x_2, \dots, x_{77}$ και ο άλλος στους $x_1 + 21, x_2 + 21, \dots, x_{77} + 21$. Δηλαδή υπάρχουν δείκτες i, j ώστε $x_j = x_i + 21$ που είναι και το ζητούμενο.

Εκ των υστέρων και δίχως να προσθέτει τίποτε στη λύση, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως οι τελευταίοι δείκτες i, j ικανοποιούν απαραίτητως την αναμενόμενη σχέση $j > i$. $\square$

Τέλος ας παρουσιάσουμε την εφαρμογή της Αρχής του Dirichlet από τον ίδιο τον Dirichlet, που ήταν και η αιτία να πάρει η Αρχή το όνομα της. Στο Πρόβλημα αυτό ο Dirichlet επιδιώκει να αποδείξει πως οποιοσδήποτε άρρητος αριθμός έχει "καλές" ρητές προσεγγίσεις.

Παράδειγμα 1.37 (Dirichlet) Έστω a άρρητος. Τότε υπάρχουν άπειροι διαφορετικοί ρητοί $\frac{p}{q}$ με $q > 0$ για τους οποίους $\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$. $\square$

Λύση. Θα δείξουμε πως για κάθε μη μηδενικό φυσικό n υπάρχει ρητός $\frac{p}{q}$ με $0 < q < n$ τέτοιος ώστε

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq} \quad (1.2)$$

Η σχέση (1.2) είναι αρκετή για να προκύψει το ζητούμενο. Πραγματικά:

Ας θεωρήσουμε έναν τυχαίο μη μηδενικό φυσικό q_0 . Τότε εξαιτίας της (1.2) έχουμε πως υπάρχει ρητός $\frac{p_0}{q_0}$ με $0 < q_0 < q$ ώστε $\left| a - \frac{p_0}{q_0} \right| < \frac{1}{q_0 q}$ οπότε και $\left| a - \frac{p_0}{q_0} \right| < \frac{1}{q_0^2}$. Επίσης, αφού ο a είναι άρρητος, θα έχουμε $a \neq \frac{p_0}{q_0}$ οπότε υπάρχει φυσικός n_1 ώστε $\left| a - \frac{p_0}{q_0} \right| > \frac{1}{n_1}$ (βλέπετε το γιατί:), και ονομάζουμε τη σχέση αυτή (*). Τότε από τη σχέση 1.2 και πάλι, θα υπάρχει ρητός $\frac{p_1}{q_1}$ με $0 < q_1 < n_1$ τέτοιος ώστε $\left| a - \frac{p_1}{q_1} \right| < \frac{1}{n_1 q_1}$ οπότε και $\left| a - \frac{p_1}{q_1} \right| < \frac{1}{q_1^2}$. Μάλιστα ο ρητός $\frac{p_1}{q_1}$ είναι διαφορετικός του ρητού $\frac{p_0}{q_0}$ και πιο "κοντά" στον a αφού $\left| a - \frac{p_1}{q_1} \right| < \frac{1}{n_1 q_1} \leq \frac{1}{n_1} < \left| a - \frac{p_0}{q_0} \right|$, όπου η τελευταία ανίσωση είναι η σχέση (*). Το έως τώρα σκεπτικό μπορεί να επαναληφθεί επ'άπειρον παράγοντας όλο και πιο κοντινούς στον a ρητούς $\frac{p_k}{q_k}, k \in \mathbb{N}$ (οπότε άπειρους σε πλήθος και διαφορετικούς μεταξύ τους) με την ιδιότητα $0 < q_k < n$ και $\left| a - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{n q_k}$, οπότε και $\left| a - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2}$ όπως ζητείται.

Απομένει να αποδείξουμε την ισχύ της σχέσης (1.2).

Ας σταθεροποιήσουμε λοιπόν κάποιον μη μηδενικό φυσικό n . Ας θεωρήσουμε τα δεκαδικά μέρη $\langle 1 \cdot a \rangle, \langle 2 \cdot a \rangle, \dots, \langle (n+1) \cdot a \rangle$ των $n+1$ σε πλήθος αριθμών $1 \cdot a, 2 \cdot a, \dots, (n+1) \cdot a$. Όλα αυτά τα δεκαδικά μέρη ανήκουν στο διάστημα $[0, 1]$. Διαμερίζοντας το διάστημα $[0, 1]$ στα n ίσα υποδιαστήματα (δοχεία) $\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$, έχουμε εξαιτίας της Αρχής του... Dirichlet, πως δύο από τα δεκαδικά μέρη, έστω τα $\langle i \cdot a \rangle, \langle j \cdot a \rangle$ (με $i < j$), ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα. Τότε όμως τα δύο αυτά δεκαδικά αυτά μέρη απέχουν μεταξύ τους το πολύ όσο και το μήκος του υποδιαστήματος, δηλαδή $\frac{1}{n}$. Οπότε $|\langle j \cdot a \rangle - \langle i \cdot a \rangle| < \frac{1}{n}$ ή με άλλα λόγια $|(j \cdot a - \lfloor j \cdot a \rfloor) - (i \cdot a - \lfloor i \cdot a \rfloor)| < \frac{1}{n}$. Αυτή η τελευταία σχέση γράφεται $|(j-i)a - (\lfloor i \cdot a \rfloor - \lfloor j \cdot a \rfloor)| < \frac{1}{n}$ και ισοδυνάμως $\left| a - \frac{\lfloor i \cdot a \rfloor - \lfloor j \cdot a \rfloor}{j-i} \right| < \frac{1}{n(j-i)}$. Θέτοντας $p = \lfloor i \cdot a \rfloor - \lfloor j \cdot a \rfloor$ και $q = j - i$ έχουμε το ζητούμενο, αφού οι p, q είναι ακέραιοι με τον q να ικανοποιεί τη σχέση $0 < q < n$ και τον ρητό $\frac{p}{q}$ να ικανοποιεί τη σχέση $\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$ όπως ζητείται. $\square$

1.11 Ασκήσεις Κεφαλαίου

Η Αρχή του Χρωματισμού

Άσκηση 1.38 Δείξτε πως ένας $n \times n$ πίνακας (για εξήγηση της έννοιας δείτε §1.5) μπορεί να καλυφθεί με μη επικαλυπτόμενα ντόμινο, αν και μόνο αν ο n είναι άρτιος. $\square$

Άσκηση 1.39 Δίνεται ένας 6×6 πίνακας με μια κάλυψή του από ντόμινο. Δείξτε πως υπάρχει ευθεία γραμμή που τον διαχωρίζει σε δύο μικρότερους πίνακες ώστε όλα τα ντόμινο της κάλυψής του να ανήκουν εξολοκλήρου είτε στον έναν είτε στον άλλο από τους μικρότερους πίνακες.

Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο και για 8×8 πίνακες. $\square$

Άσκηση 1.40 Διατυπώστε συνθήκες (ικανές, αναγκαίες είτε και τα δύο) ώστε ένας $n \times n$ πίνακας από τον οποίο αφαιρέσαμε δύο κουτάκια του να μπορεί να καλυφθεί από ντόμινο.

Άσκηση 1.41 (12η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων, Αλβανία 2008) Αρχικά όλα τα κουτάκια ενός 4×4 πίνακα βάφονται άσπρα. Δύο κουτάκια του πίνακα ονομάζονται γειτονικά αν έχουν μια κοινή πλευρά. Μία κίνηση αποτελείται από την επιλογή ενός κουτιού και την αλλαγή του χρώματός του καθώς και τον χρωμάτων των γειτονικών του από άσπρο σε μαύρο ή από μαύρο σε άσπρο. Μετά από ακριβώς n κινήσεις όλα τα κουτιά γίνονται μαύρα. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του n . $\square$

Υποσύνολα και διωνυμικοί συντελεστές

Άσκηση 1.42 Δώστε μια ακόμα λύση του Παραδείγματος 1.9 ακολουθώντας το εξής σκεπτικό:

Αν $x(n)$ το πλήθος των υποσυνόλων ενός τυχαίου συνόλου n στοιχείων, τότε μεταξύ των $x(n)$ και $x(n+1)$ ισχύει η σχέση $x(n+1) = 2x(n)$ που προκύπτει ως εξής:

Αν π.χ. $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ ένα σύνολο $n+1$ στοιχείων και ονομάσουμε $B = \{a_1, \dots, a_n\}$ που είναι ένα σύνολο με n στοιχεία, τότε όλα τα υποσύνολα του A τα δημιουργούμε από τα υποσύνολα του B επεκτείνοντάς τα με έναν από τους εξής δύο τρόπους: είτε βάζοντας σε αυτά και το στοιχείο a_{n+1} είτε όχι. Οπότε πράγματι $x(n+1) = 2x(n)$.

Συνεχίστε στον υπολογισμό του πλήθους x_n με τη βοήθεια της **αναδρομικής** όπως λέγεται σχέσης $x(n+1) = 2x(n)$, αφού πρώτα δείξετε πως $x(0) = 1$. Αποδείξτε την Πρόταση 1.11 αλγεβρικά με χρήση του τύπου που εκφράζει τους διωνυμικούς συντελεστές ως κλάσματα. $\square$

Άσκηση 1.43 Αποδείξτε την Πρόταση 1.12 επαγωγικά. $\square$

Άσκηση 1.44 Αποδείξτε τα ακόλουθα:

1. $\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}$
2. $\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$
3. $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

$\square$

Το Θεώρημα του Νεύτωνα και το τρίγωνο του Pascal

Άσκηση 1.45 Αν S ένα σύνολο με n στοιχεία όπου ο n είναι πολλαπλάσιο του 8, να δείξετε πως το πλήθος των υποσυνόλων του S με πληθικότητα πολλαπλάσιο του 4 ισούται με $2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}$. $\square$

Επιλογές : Διατάξεις και Συνδυασμοί

Άσκηση 1.46 Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν τα 20 παιδιά μιας τάξης στη μπροστινή σειρά των 30 καθισμάτων ενός θεάτρου; $\square$

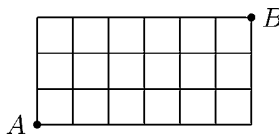
Άσκηση 1.47 Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης "μουστοκούλουρο" υπάρχουν; □

Άσκηση 1.48 Πόσοι 10-ψήφιοι αριθμοί δημιουργούνται χρησιμοποιώντας όλα τα ακόλουθα 10 ψηφία 2, 2, 2, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 8; □

Άσκηση 1.49 Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 3 από τις 7 ημέρες της εβδομάδας για να διεξάγουμε ένα τουρνουά σκάκι τριών παρτίδων, αν δεν επιτρέπεται να παίζονται περισσότερες από μία παρτίδες την ημέρα; □

Άσκηση 1.50 Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 3 από τις 7 ημέρες της εβδομάδας για να διεξάγουμε ένα τουρνουά σκάκι τριών παρτίδων, αν επιτρέπεται να παίζονται περισσότερες από μία παρτίδες την ημέρα; □

Άσκηση 1.51 Στο διάγραμμα του Σχήματος 5 επιθυμούμε να μεταβούμε από το σημείο A στο σημείο B μετακινούμενοι κατά μήκος των γραμμών και πραγματοποιώντας όσον το δυνατόν συντομότερη διαδρομή γίνεται. Πόσες τέτοιες διαφορετικές διαδρομές υπάρχουν; □



Σχήμα 5: Συντομότερες διαδρομές στην πόλη

Άσκηση 1.52 Πόσες λύσεις υπάρχουν της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ με k, n θετικούς ακεραίους, όταν:

(α) οι x_i είναι μη αρνητικοί ακέραιοι.

(β) οι x_i είναι θετικοί ακέραιοι.

Η κάθε λύση $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ θεωρείται ως διατεταγμένη k -άδα. Έτσι π.χ. οι λύσεις $(1, 3, 4)$ και $(1, 4, 3)$ της $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ θεωρούνται διαφορετικές. □

Άσκηση 1.53 Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων τομής των διαγωνίων στο εσωτερικό ενός κυρτού 10-γώνου, όταν γνωρίζετε πως δεν υπάρχουν τρεις διαγώνιες που διέρχονται από το ίδιο σημείο. □

Άσκηση 1.54 Να υπολογίσετε το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων στα οποία διαμερίζονται οι διαγώνιοι ενός κυρτού 10-γώνου από τα σημεία τομής τους, όταν γνωρίζετε πως δεν υπάρχουν τρεις διαγώνιες που διέρχονται από το ίδιο σημείο. □

Άσκηση 1.55 Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορεί να μοιράσει ο Αϊ-Βασίλης 3 κόκκινες μπάλες 2 πράσινες και 4 άσπρες στα 9 παιδιά μιας οικογένειας όταν το κάθε παιδί είναι να πάρει μία ακριβώς μπάλα. □

Άσκηση 1.56 Έχουμε επανειλημμένα μιλήσει για "πλήθος μεταθέσεων", αλλά δεν εξηγήσαμε τι εννοούμε με τον όρο "μετάθεση". **Μετάθεση** λοιπόν ενός πεπερασμένου συνόλου S είναι μια ένα προς ένα απεικόνιση του S στον εαυτό του. Τότε η απεικόνιση αυτή θα είναι και επί.

Συχνά στην πράξη αντί να αναφερόμαστε στις μεταθέσεις ενός συνόλου S ως συναρτήσεις, προτιμούμε να τις παριστάνουμε ως τοποθετήσεις των στοιχείων του S σε μια σειρά. Π.χ. για το σύνολο $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, οι ακόλουθες τοποθετήσεις στη σειρά των στοιχείων του θεωρούνται ως μεταθέσεις του:

2, 1, 3, 4, 5, 6 1, 3, 4, 5, 6, 2 2, 3, 1, 4, 5, 6 6, 3, 4, 5, 1, 2.

Αν θελήσουμε να εργαστούμε στη γλώσσα των απεικονίσεων, η πρώτη από αυτές τις μεταθέσεις παριστάνει την απεικόνιση που αντιστοιχεί το 1 στο 2, το 2 στο 1 και κάθε άλλο στοιχείο του S το αντιστοιχεί στον εαυτό του.

Με παρόμοιο τρόπο παριστάνουμε αν επιθυμούμε και τις διατάξεις (απλές ή επαναληπτικές) k στοιχείων ενός συνόλου S n στοιχείων ως τοποθετήσεις k από τα στοιχεία του S σε μια σειρά.

Δείξτε πως το πλήθος των μεταθέσεων ενός συνόλου n στοιχείων ισούται με $n!$. □

Άσκηση 1.57 Μία μετάθεση p του συνόλου $S = \{1, 2, \dots, n\}$ για την οποία $p(i) \neq i$, για όλα τα i ονομάζεται **διατάραξη**. Δείξτε πως το πλήθος των διαταράξεων ισούται με

$$n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

□

Η Αρχή Εισαγωγής - Εξαγωγής

Άσκηση 1.58 Εντοπίστε που βρίσκεται το λάθος στον ακόλουθο τρόπο επίλυσης του Παραδείγματος 1.22:

Δημιουργούμε όλα τα καλά προγράμματα για τον πωλητή ως εξής: (α) τοποθετούμε τους 4 νομούς σε 4 από τις 7 ημέρες της εβδομάδας και κατόπιν (β) στις υπόλοιπες τρεις ημέρες τοποθετούμε οποιονδήποτε από τους 4 νομούς.

Αν το (α) πραγματοποιείται με x_1 τρόπους και το (β) με x_2 τρόπους, τότε η πολλαπλασιαστική αρχή δίνει $x_1 \cdot x_2$ τρόπους για τα καλά προγράμματα.

Είναι $x_1 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$, αφού επιλέγοντας τις 4 από τις 7 ημέρες μας ενδιαφέρει και να τις ονομάσουμε (διατάξουμε ως) Τ,Κ,Λ,Μ. (Η φυσική χρονολογική διάταξη των ημερών δεν μας ενδιαφέρει στο σημείο αυτό). Εναλλακτικά, σε κάθε επιλογή μας, υπάρχουν 7 ημέρες-θέσεις για τα Τρίκαλα, οπότε 6 θέσεις για την Καρδίτσα, οπότε 5 για τη Λάρισα, οπότε 4 θέσεις για τη Μαγνησία, και η Πολλαπλασιαστική Αρχή δίνει $x_1 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ δυνατές επιλογές.

Και $x_2 = 4^3 = 64$ αφού για κάθε μια από τις υπόλοιπες ημέρες έχουμε 4 δυνατές επιλογές (Πολλαπλασιαστική Αρχή). Εναλλακτικά, οποιοσδήποτε από τους 4 νομούς μπορεί να επιλεγεί επαναληπτικά για τις υπόλοιπες 3 ημέρες.

Οπότε το πλήθος των καλών προγραμμάτων είναι $x_1 \cdot x_2 = 840 \cdot 64 = 53760$.

□

Άσκηση 1.59 Στο φετινό Θερινό Σχολείο υπάρχουν 500 μαθητές. 300 μαθητές δήλωσαν πως θα παρακολουθήσουν Συνδυαστική, 250 θα παρακολουθήσουν Θεωρία Αριθμών και 120 και τα δύο αυτά μαθήματα. Οι μαθητές που έρχονται για πρώτη φορά φέτος στο σχολείο είναι 80. Από αυτούς 50 θα παρακολουθήσουν Συνδυαστική, 60 Θεωρία Αριθμών και 35 και τα δύο μαθήματα. Την τελευταία μέρα του Σχολείου θα πραγματοποιηθεί αγώνας ποδοσφαίρου της τοπικής ομάδας στον οποίο θα παρευρεθούν μόνο οι παλιότεροι μαθητές του Σχολείου που δεν δήλωσαν πως θα παρακολουθήσουν Συνδυαστική ή Θεωρία Αριθμών. Πόσοι είναι οι μαθητές που θα παρευρεθούν στον αγώνα ποδοσφαίρου;

□

Άσκηση 1.60 Πόσοι φυσικοί αριθμοί μεταξύ του 1 και του 1000 (συμπεριλαμβανομένων αυτών) δε διαιρούνται με κανένα από τους πρώτους 2, 3, 5; Με τους πρώτους 2, 3, 5, 7; Ίδιο ερώτημα για τους φυσικούς μεταξύ του 1 και του 10000. Διακρίνετε κάποιο μοτίβο για την εύρεση του πλήθους των πρώτων έως και κάποιον αριθμό;

Υπόδειξη: Θα σας φανεί μάλλον χρήσιμο να γνωρίζετε πως το πλήθος των φυσικών μεταξύ του 1 και του n (συμπεριλαμβανομένων και των άκρων) που διαιρούνται με τον πρώτο p ισούται με $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, όπου $\lfloor x \rfloor$ υποδηλώνει το ακέραιο μέρος του x .

□

Η Αρχή του Dirichlet

Άσκηση 1.61 Υιοθετώντας λογικές υποθέσεις για την ανθρώπινη τριχοφυΐα και τον παγκόσμιο πληθυσμό αποδείξτε πως υπάρχουν πολλοί άνθρωποι με το ίδιο πλήθος τριχών στο κεφάλι τους.

□

Άσκηση 1.62 Γενικεύστε το πρόβλημα του σκακιστή.

□

Άσκηση 1.63 Δείξτε πως σε κάθε ακολουθία από $n^2 + 1$ διακεκριμένους αριθμούς (όπου n κάποιος φυσικός), υπάρχει μια αύξουσα υπακολουθία από $n + 1$ αριθμούς, είτε υπάρχει μια φθίνουσα υπακολουθία από $n + 1$ αριθμούς. (Γενικεύσετε. Δείτε και την επόμενη Άσκηση). Δείξτε πως σε οποιαδήποτε ακολουθία διακεκριμένων αριθμών με $n \cdot m + 1$ τουλάχιστον όρους

(όπου m, n φυσικοί διάφοροι του 0), υπάρχει κάποια φθίνουσα υπακολουθία $m + 1$ όρων, είτε υπάρχει κάποια αύξουσα υπακολουθία $n + 1$ όρων.

Δείξτε πως για κατάλληλα επιλεγμένους όρους για τη δοσμένη ακολουθία, είναι δυνατό να υπάρχουν ταυτόχρονα δυο τέτοιες υπακολουθίες της. Δείξτε επίσης πως είναι δυνατό να υπάρχουν περισσότερες από μια υπακολουθίες της του κάθε είδους. $\square$

Άσκηση 1.64 Δείξτε πως μεταξύ n δοσμένων ακεραίων, υπάρχουν πάντοτε ορισμένοι με άθροισμα πολλαπλάσιο του n . (Οι δοσμένοι ακέραιοι δεν είναι απαραίτητως διακεκριμένοι). $\square$

Άσκηση 1.65 Δείξτε πως σε ένα σύνολο $n + 1$ ακεραίων πάντοτε υπάρχουν δύο η διαφορά των οποίων είναι πολλαπλάσιο του n . $\square$

Άσκηση 1.66 Δείξτε πως μεταξύ n συνεχόμενων ακεραίων αριθμών, υπάρχει κάποιος που διαιρείται από το n . Υπάρχει μήπως και δεύτερος; $\square$

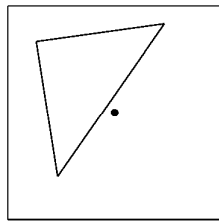
Άσκηση 1.67 Ένα τρίγωνο βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τετραγώνου πλευράς 1, χωρίς να περιέχει στο εσωτερικό του το κέντρο του τετραγώνου (Σχήμα 6α). Δείξτε πως υπάρχει πλευρά του τριγώνου με μήκος μικρότερο του 1. $\square$

Παρεμπιπτόντως, ασχοληθείτε και με το ακόλουθο Γεωμετρικό Πρόβλημα:

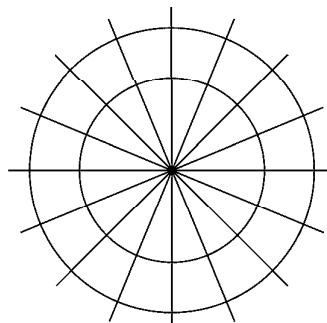
Άσκηση 1.68 Ένα τρίγωνο βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τετραγώνου πλευράς 1. Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν που μπορεί να έχει το τρίγωνο (Σχήμα 6α); $\square$

Άσκηση 1.69 Στο εσωτερικό ενός τετραγώνου πλευράς 8 δίνονται 65 σημεία. Δείξτε πως υπάρχουν δύο από αυτά με απόσταση μεταξύ τους μικρότερη ή ίση του $\sqrt{2}$. $\square$

Άσκηση 1.70 Στο εσωτερικό τετραγώνου πλευράς 1 δίνονται 9 σημεία. Δείξτε πως υπάρχει τρίγωνο με κορυφές στα δοσμένα σημεία και εμβαδόν μικρότερο ή ίσο του $\frac{1}{8}$. $\square$



(α)



(β)

Σχήμα 6: (α) Τρίγωνο σε τετράγωνο πλευράς 1. (β) Μερικές από τις ευθείες που διαιρούν τους ομοκεντρους κύκλους σε 100 ίσους κυκλικούς τομείς.

Άσκηση 1.71 Κάθε μια από 9 δοσμένες ευθείες τέμνει κάποιο ζεύγος απέναντι πλευρών δοσμένου τετραγώνου και διαιρεί το τετράγωνο σε δύο τετράπλευρα με λόγο εμβαδών μεγάλο προς μικρό ίσο με $3 : 4$. Δείξτε ότι μεταξύ των δοσμένων ευθειών υπάρχουν τουλάχιστον 3 συντρέχουσες.

Μπορούμε άραγε να έχουμε λόγο εμβαδών διαφορετικό του $3 : 4$; Είναι η υπόθεση πως κάθε ευθεία τέμνει απέναντι και όχι διαδοχικές πλευρές απαραίτητη; $\square$

Άσκηση 1.72 Οι περιφέρειες δύο ομόκεντρων κύκλων διαιρούνται οι καθεμιά τους σε 100 ίσα τόξα με 100 ευθείες $(\varepsilon_1), \dots, (\varepsilon_{100})$ διερχόμενες από το κοινό τους κέντρο (Σχήμα 6β). 50 από τα τόξα του εσωτερικού κύκλου βάφονται κόκκινα και 50 πράσινα, ενώ το κάθε τόξο του εξωτερικού βάφεται τυχαία είτε κόκκινο είτε πράσινο. Δείξτε πως είναι δυνατόν να ευθυγραμμίσουμε τα τόξα των δύο κύκλων περιστρέφοντας τον εξωτερικό γύρω από το κέντρο του, ώστε τουλάχιστον 50 ζευγάρια ευθυγραμμισμένων τόξων στους δύο κύκλους να έχουν το ίδιο χρώμα.

Οι δύο επόμενες Ασκήσεις αναφέρονται σε κόμβους κιγκλίδας. Η **κιγκλίδα** δείχνει σαν το μιλιμετρέ χαρτί ή το δικτυωτό σχήμα που προκύπτει π.χ. από τις οριζόντιες και κατακόρυφες ευθείες σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων που διέρχονται από τα ακέραια σημεία των αξόνων. Τα σημεία τομής των ευθειών τα ονομάζουμε **κόμβους** της κιγκλίδας. □

Άσκηση 1.73 Οι κόμβοι μιας κιγκλίδας βάφονται ο καθένας με ένα από 2 χρώματα. Δείξτε πως υπάρχει ορθογώνιο με κορυφές όμοια χρωματισμένους κόμβους. □

Άσκηση 1.74 Οι κόμβοι μιας κιγκλίδας βάφονται ο καθένας με ένα από 3 χρώματα. Δείξτε πως υπάρχει ισοσκελές τρίγωνο με κορυφές όμοια χρωματισμένους κόμβους. □

Επαναδιατυπώστε τις δύο τελευταίες Ασκήσεις χωρίς τη βοήθεια της κιγκλίδας.

Άσκηση 1.75 Δείξτε πως σε κάθε κυρτό $2n$ -γωνο υπάρχει διαγώνιος που δεν είναι παράλληλη σε καμία πλευρά του πολυγώνου.

Για το επόμενο Πρόβλημα θα χρειαστούμε την έννοια του κανονικού πολυγώνου και του κέντρου του. **Κανονικό**, ονομάζεται κάθε n -γωνο που έχει όλες τις γωνίες του ίσες και όλες του τις πλευρές ίσες. Τέτοια πολύγωνα π.χ. είναι τα ισόπλευρα τρίγωνα και τα τετράγωνα. Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, το κέντρο του οποίου ονομάζεται **κέντρο του πολυγώνου**. Ειδικά για τα κανονικά πολύγωνα με άρτιο πλήθος κορυφών, το κέντρο τους αποτελεί και κέντρο συμμετρίας τους. □

Άσκηση 1.76 Δείξτε πως αν από κάποιο εσωτερικό σημείο κανονικού $2n$ -γώνου διέρχονται n διαγώνιες, τότε το σημείο αυτό είναι το κέντρο του πολυγώνου. □

Άσκηση 1.77 Δείξτε πως σε οποιοδήποτε πάρτι, υπάρχουν 2 άτομα που αντάλλαξαν με τους υπόλοιπους στο πάρτι το ίδιο πλήθος χειραψιών.

(Εννοείται πως υποθέτουμε τουλάχιστον δύο άτομα στο πάρτι, αλλιώς δεν πρόκειται για πάρτι! Φυσικά δεν υποθέτουμε πως είναι αναγκαίο κάποιος ή και όλοι να έχουν οπωσδήποτε ανταλλάξει χειραψίες με άλλους! Ισχύει το ζητούμενο αν επιτρέπεται κανείς να ανταλλάξει περισσότερες από μία χειραψίες με κάποιον άλλον; Ισχύει το συμπέρασμα αν υποθέσουμε άπειρα άτομα στο πάρτι; Δικό μας το πάρτι, υποθέτουμε ότι θέλουμε λοιπόν...!) □

Άσκηση 1.78 (Ιαπωνική Μαθηματική Ολυμπιάδα 1991) Δείξτε πως σε κάθε 16-ψηφίο φυσικό υπάρχει μια σειρά από ένα ή περισσότερα διαδοχικά ψηφία του τέτοια ώστε το γινόμενο αυτών των ψηφίων να είναι τέλειο τετράγωνο. □

Άσκηση 1.79 Δείξτε πως μεταξύ οποιονδήποτε 9 διακεκριμένων πραγματικών αριθμών, υπάρχουν 2, έστω οι α και β ώστε να ισχύει:

$$0 < \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} < \sqrt{2} - 1$$

(Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τριγωνομετρικό τύπο $\varepsilon\phi(x - y) = \frac{\varepsilon\phi(x) - \varepsilon\phi(y)}{1 + \varepsilon\phi(x)\varepsilon\phi(y)}$ και το γεγονός πως $\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.) □

Άσκηση 1.80 Δείξτε πως το δεκαδικό ανάπτυγμα κάθε ρητού αριθμού οφείλει να είναι περιοδικό από κάποια θέση και έπειτα. □

1.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ Χρωματίζουμε τα σημεία του επιπέδου με δύο χρώματα. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία με το ίδιο χρώμα που απέχουν απόσταση 1.

Λύση

Έστω ότι χρωματίζουμε τα σημεία του επιπέδου κόκκινα (Κ) και πράσινα (Π). Στη συνέχεια θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $ABΓ$ με μήκος πλευράς 1. Οι κορυφές του τριγώνου είναι σημεία που απέχουν ανά δύο απόσταση 1.

Όλοι οι δυνατοί τρόποι χρωματισμού των κορυφών του τριγώνου είναι: ΚΚΚ, ΚΚΠ, ΚΠΠ, ΠΠΠ. Σε κάθε περίπτωση βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία με το ίδιο χρώμα.

1.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ Χρωματίζουμε τα σημεία του επιπέδου με τρία χρώματα. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία με το ίδιο χρώμα που απέχουν απόσταση 1.

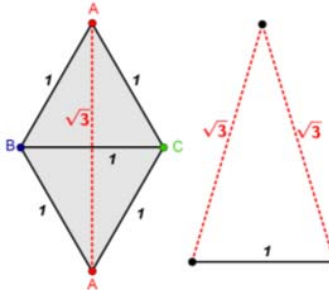
Λύση

Υποθέτουμε (με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι δεν υπάρχουν σημεία του επιπέδου που απέχουν απόσταση 1 και έχουν το ίδιο χρώμα.

Θεωρούμε δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 1 (με κοινή πλευρά) που δημιουργούν ρόμβο πλευράς 1. Η μία διαγώνιος του ρόμβου είναι 1 και η άλλη $\sqrt{3}$.

Από τον τρόπο χρωματισμού (που υποθέσαμε ότι ισχύει), προκύπτει ότι όλα τα σημεία που απέχουν απόσταση $\sqrt{3}$, έχουν το ίδιο χρώμα.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε ισοσκελές τρίγωνο του οποίου οι δύο ίσες πλευρές έχουν μήκος $\sqrt{3}$ και η βάση του έχει μήκος 1, τότε όλες του οι κορυφές θα έχουν το ίδιο χρώμα. Δηλαδή υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία (τα άκρα της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου) που απέχουν απόσταση 1 και έχουν το ίδιο χρώμα (άτοπο).



1.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

✦ Χρωματίζουμε τα σημεία του επιπέδου με δύο χρώματα. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ισόπλευρο τρίγωνο που οι κορυφές του έχουν το ίδιο χρώμα.

Λύση

1^{ος} Τρόπος

Έστω ότι τα σημεία του επιπέδου είναι άσπρα ή μαύρα.

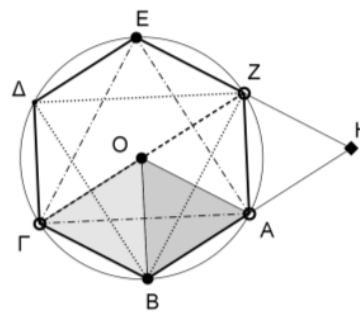
Υποθέτουμε (με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι δεν υπάρχουν ισόπλευρα τρίγωνα που οι κορυφές τους έχουν το ίδιο χρώμα. Τότε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο του επιπέδου θα έχει δύο κορυφές με διαφορετικό χρώμα.

Θεωρούμε κανονικό εξάγωνο $ABΓΔΕΖ$ με κέντρο O το οποίο θεωρούμε ότι έχει μαύρο χρώμα.

Μία από τις κορυφές του ισοπλεύρου τριγώνου $BΔΖ$ (έστω η B) πρέπει να είναι μαύρη.

Από τα ισόπλευρα τρίγωνα OAB και $OΒΓ$ συμπεραίνουμε (με βάση την υπόθεση που έχουμε κάνει) ότι τα σημεία $A, Γ$ δεν μπορεί να είναι μαύρα (άρα θα είναι άσπρα).

Από το ισόπλευρο τρίγωνο $AΓΕ$ (εφόσον $A, Γ$ άσπρα), συμπεραίνουμε ότι το σημείο E θα είναι μαύρο. Προεκτείνουμε τώρα τις πλευρές AB, EZ και έστω H το σημείο τομής τους.



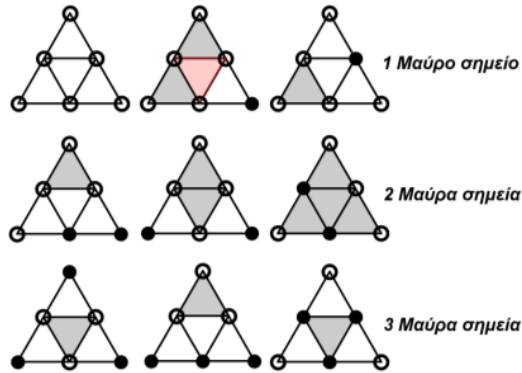
Τότε ότι χρώμα και να έχει το σημείο H , ένα από τα ισοπλευρα τρίγωνα HAZ και HEB θα έχει και τις τρεις κορυφές του με ίδιο χρώμα (άτοπο).

2^{ος} Τρόπος

Έστω ότι τα σημεία του επιπέδου είναι άσπρα ή μαύρα.

Οι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, μαζί με τα μέσα των πλευρών του, ορίζουν τέσσερα επί πλέον ισοπλευρα τρίγωνα που το μήκος της πλευράς τους είναι το μισό του μήκους της πλευράς του αρχικού ισοπλευρου τριγώνου.

Οι μισοί τρόποι χρωματισμού των έξι σημείων παρουσιάζονται στο σχήμα. Οι υπόλοιποι τρόποι προκύπτουν από την αντικατάσταση των μαύρων σημείων σε άσπρα και αντίστροφα. Ξεκινάμε υποθέτοντας ότι και τα έξι σημεία είναι άσπρα.



Τότε υπάρχουν πέντε ισοπλευρα τρίγωνα που οι κορυφές τους έχουν το ίδιο χρώμα (άσπρο).

Αν αλλάξουμε το χρώμα σε ένα σημείο, τότε δημιουργούνται (Σχήμα) ένα ή δύο ισοπλευρα τρίγωνα που οι κορυφές τους έχουν το ίδιο χρώμα (άσπρο).

Αν αλλάξουμε το χρώμα σε δύο σημεία, τότε δημιουργούνται (Σχήμα) ένα ή τρία ισοπλευρα τρίγωνα που οι κορυφές τους έχουν το ίδιο

χρώμα (άσπρο).

Αν αλλάξουμε το χρώμα σε τρία σημεία, τότε δημιουργείται (Σχήμα) ένα ισοπλευρο τρίγωνο που οι κορυφές του έχουν το ίδιο χρώμα (άσπρο) ή ένα ισοπλευρο τρίγωνο που οι κορυφές του έχουν το ίδιο χρώμα (μαύρο).

Όλες οι άλλες περιπτώσεις ανάγονται στα προηγούμενα (εναλλάσσοντας του ρόλους των μαύρων με τα άσπρα σημεία και αντίστροφα).

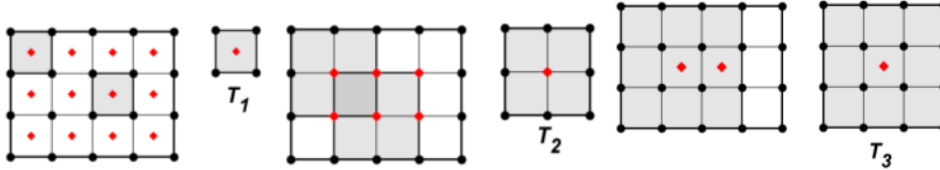
1.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

♦ Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 3×4 , το χωρίζουμε με παράλληλες (προς τις πλευρές του) ευθείες σε 12 στοιχειώδη τετράγωνα πλευράς 1. Πόσα συνολικά τετράγωνα δημιουργούνται μετά από αυτό το χωρισμό;

(θεωρούμε τα τετράγωνα που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού παραλληλογράμμου και οι κορυφές τους είναι σημεία του πλέγματος)

Λύση

Με κορυφές τα σημεία του πλέγματος, μπορούν να δημιουργηθούν τετράγωνα διαστάσεων 1×1 , 2×2 και 3×3 , που θα τα συμβολίζουμε με T_1 , T_2 και T_3 αντίστοιχα.



Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_1 είναι $3 \cdot 4 = 12$ (μετρήστε τα κέντρα των τετραγώνων).

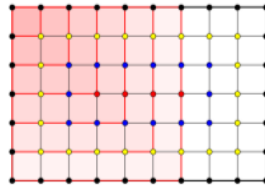
Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_2 είναι $2 \cdot 3 = 6$ (μετρήστε τα κέντρα των τετραγώνων).

Το πλήθος των τετραγώνων τύπου T_3 είναι $2 \cdot 1 = 2$ (μετρήστε τα κέντρα των τετραγώνων).

Άρα το συνολικό πλήθος των τετραγώνων είναι $3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 20$.

Παρατήρηση

1. Με ανάλογο τρόπο, αποδείξτε ότι το πλήθος των τετραγώνων που δημιουργούνται στο παρακάτω 6×9 πλέγμα, είναι: $6 \cdot 9 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 154$.



2. Γενικότερα αν έχουμε ένα $n \times k$ (με $n > k \geq 1$) πλέγμα, τότε το πλήθος των τετραγώνων που δημιουργούνται είναι:

$$\begin{aligned}
 & k \cdot n + (k-1) \cdot (n-1) + (k-2) \cdot (n-2) + \cdots + 2 \cdot (n-k+2) + 1 \cdot (n-k+1) \\
 & \quad \quad \quad \text{ή} \\
 & 1 \cdot (n-k+1) + 2 \cdot (n-k+2) + \cdots + (k-1) \cdot (n-k+(k-1)) + k \cdot (n-k+k) = \\
 & \quad \quad \quad = \frac{k(k+1)(3n-k+1)}{6}.
 \end{aligned}$$

3. Για $n=k$, ο προηγούμενος τύπος γίνεται $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ και εκφράζει το πλήθος των τετραγώνων που δημιουργούνται στο $n \times n$ τετράγωνο.

1.5 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

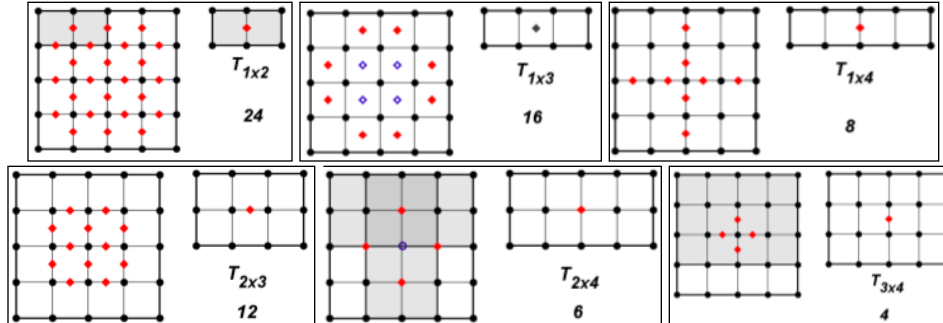
♦ Τετράγωνο πλευράς μήκους 4, το χωρίζουμε με παράλληλες ευθείες σε 16 τετράγωνα πλευράς μήκους 1. Πόσα συνολικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου), ορίζονται (δημιουργούνται) μετά από αυτό το χωρισμό;

Λύση

Με κορυφές τα σημεία του πλέγματος, μπορούν να δημιουργηθούν ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαστάσεων 1×2 , 1×3 , 1×4 , 2×3 , 2×4 και 3×4 που θα τα συμβολίζουμε με $T_{1 \times 2}$, $T_{1 \times 3}$, $T_{1 \times 4}$, $T_{2 \times 3}$, $T_{2 \times 4}$ και $T_{3 \times 4}$ αντίστοιχα.

1^{ος} Τρόπος

Ονομάζουμε κέντρο κάθε ορθογώνιου, το σημείο τομής των διαγωνίων του.



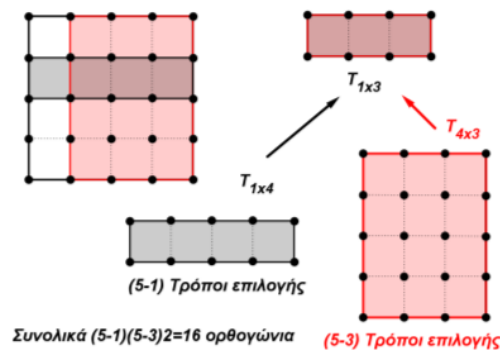
Η καταμέτρηση των ορθογωνίων προκύπτει από τη καταμέτρηση των σημείων που είναι κέντρα των ορθογωνίων.

Για τη καταμέτρηση των ορθογωνίων τύπου $T_{1 \times 3}$ και $T_{2 \times 4}$, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν σημεία που είναι κέντρα δύο ορθογωνίων του αντίστοιχου τύπου.

Προσθέτοντας το πλήθος των ορθογωνίων που δημιουργούνται σε κάθε περίπτωση, βρίσκουμε ότι το πλήθος ορθογωνίων είναι: $24 + 16 + 8 + 12 + 6 + 4 = 70$.

2^{ος} Τρόπος

Έστω k, m ακέραιοι με $1 \leq k < m \leq 4$. Κάθε ορθογώνιο τύπου $T_{k \times m}$ δημιουργείται από τη “τομή” των ορθογωνίων $T_{k \times 4}$ και $T_{4 \times m}$.



Για παράδειγμα, το ορθογώνιο τύπου $T_{1 \times 3}$ δημιουργείται από τη “τομή” των ορθογωνίων τύπου $T_{1 \times 4}$ και $T_{4 \times 3}$. Το ορθογώνιο τύπου $T_{1 \times 4}$ μπορεί να επιλεγεί με $(5-1)=4$ τρόπους. Ταυτόχρονα το ορθογώνιο τύπου $T_{4 \times 3}$ μπορεί να επιλεγεί $(5-3)=2$ τρόπους. Άρα το ορθογώνιο τύπου $T_{1 \times 3}$ δημιουργείται με $2 \cdot 4 = 8$ τρόπους. Επειδή όμως το ορθογώνιο τύπου $T_{1 \times 4}$ μπορούμε να το θεωρήσουμε και “κατακόρυφα” (ταυτόχρονα το ορθογώνιο τύπου $T_{4 \times 3}$ μπορούμε να το θεωρήσουμε και “οριζόντια”), το τελικό πλήθος των ορθογωνίων τύπου $T_{1 \times 3}$ διπλασιάζεται.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε το πλήθος όλων των τύπων ορθογωνίων.

Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{1 \times 2}$: $(5-1) \cdot (5-2) \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{l \times 3} : (5-1) \cdot (5-3) \cdot 2 = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{l \times 4} : (5-1) \cdot (5-4) \cdot 2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$.

Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{2 \times 3} : (5-2) \cdot (5-3) \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{2 \times 4} : (5-2) \cdot (5-4) \cdot 2 = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$.

Πλήθος ορθογωνίων τύπου $T_{3 \times 4} : (5-3) \cdot (5-4) \cdot 2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$.

Προσθέτοντας το πλήθος των ορθογωνίων που δημιουργούνται, βρίσκουμε ότι το πλήθος ορθογωνίων είναι: $24 + 16 + 8 + 12 + 6 + 4 = 70$.

3^{ος} Τρόπος

Θεωρούμε δύο απέναντι πλευρές του αρχικού τετραγώνου. Στην μία πλευρά υπάρχουν 5 σημεία τα οποία ορίζουν $\binom{5}{2}$ ευθύγραμμα τμήματα. Τα τμήματα αυτά, μαζί με τα ανάλογα τμήματα που

βρίσκονται στην απέναντι πλευρά, ορίζουν $\binom{5}{2}$ ορθογώνια. Τα ίδια ακριβώς και ταυτόχρονα

συμβαίνουν στο άλλο ζεγάρι απέναντι πλευρών. Έτσι δημιουργούνται $\binom{5}{2}^2 = 100$ “τομές”, που

είναι τα ζητούμενα ορθογώνια. Οι δημιουργούμενες “τομές” όμως μπορεί να είναι και τετράγωνα.

Για να βρούμε λοιπόν το πλήθος των ορθογωνίων, θα πρέπει να αφαιρέσουμε το πλήθος των

τετραγώνων, που είναι $\frac{4(4+1)(2 \cdot 4 + 1)}{6} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = 30$.

Παρατηρήσεις

1. Σε τετράγωνο $n \times n$ ορίζονται $(n-k+1)(n-m+1) \cdot 2$ ορθογώνια τύπου $T_{k \times m}$. Όπου k, m, n είναι ακέραιοι με $1 \leq k < m \leq n$.

2. Σε τετράγωνο $n \times n$ ορίζονται $\binom{n+1}{2}^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ορθογώνια.