

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Αντώνιο Παλόγο)

Σε ένα ρολόι θέλουμε το άκρο του ωροδείκτη και το άκρο του λεπτοδείκτη να έχουν την ίδια ταχύτητα λόγω περιστροφής (γραμμική ταχύτητα). Αν συμβολίσουμε με ℓ_{ω} το μήκος του ωροδείκτη και με ℓ_{λ} το μήκος του λεπτοδείκτη, τότε για το λόγο των μηκών ισχύει

α) $\frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = 1$

β) $\frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = \frac{1}{12}$

γ) $\frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = 12$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

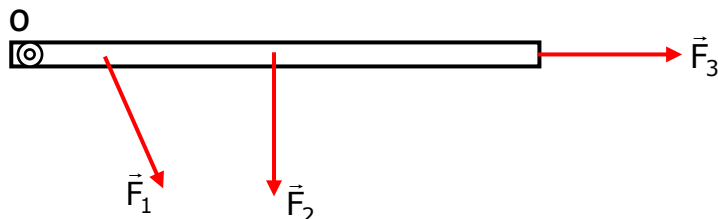
Σωστή απάντηση είναι η γ.

Οι γραμμικές ταχύτητες των δύο άκρων δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις $v_{\omega} = \omega \ell_{\omega}$ και $v_{\lambda} = \omega_{\lambda} \ell_{\lambda}$. Παίρνοντας υπόψη ότι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ και ότι $T_{\omega} = 12h$, $T_{\lambda} = 1h$ προκύπτει:

$$v_{\omega} = v_{\lambda} \Rightarrow \omega \ell_{\omega} = \omega_{\lambda} \ell_{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_{\omega}} \ell_{\omega} = \frac{2\pi}{T_{\lambda}} \ell_{\lambda} \Rightarrow \frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = \frac{T_{\omega}}{T_{\lambda}} \Rightarrow \frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = 12$$

Ερώτηση 2.

Στη ράβδο του σχήματος ασκούνται τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις ίσου μέτρου. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο των δυνάμεων.



Η κατάταξη των δυνάμεων, κατά τη σειρά με την οποία το μέτρο της ροπής τους ως προς τον άξονα περιστροφής αυξάνεται, είναι:

α) $\vec{F}_3, \vec{F}_1, \vec{F}_2$.

β) $\vec{F}_3, \vec{F}_2, \vec{F}_1$.

γ) $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

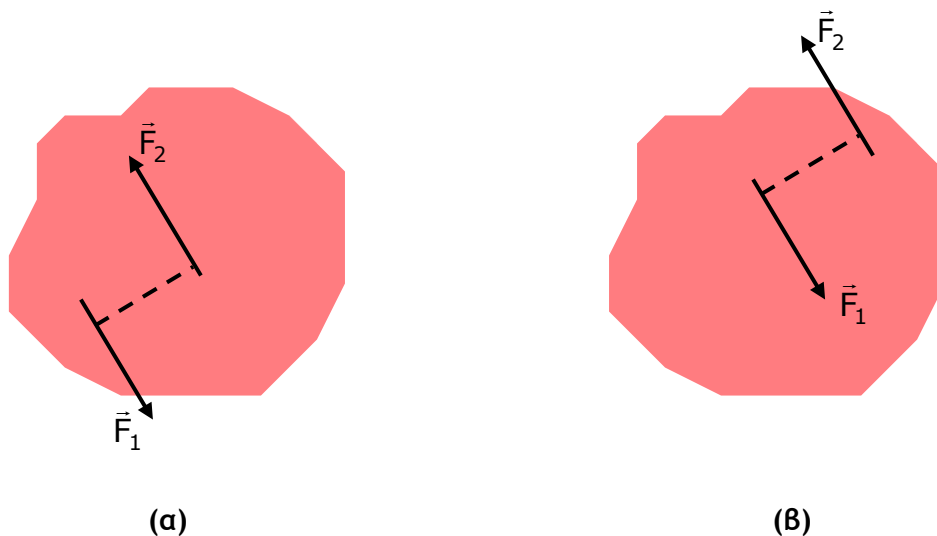
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Το μέτρο της ροπής δύναμης ως προς σταθερό άξονα δίνεται από τον τύπο: $\tau = F \cdot L$, όπου F το μέτρο της δύναμης (κοινό για τις τρεις δυνάμεις) και L η απόσταση του φορέα τους από τον άξονα περιστροφής (μοχλοβραχίονας). Από το σχήμα φαίνεται ότι η δύναμη $\vec{F}_3$ έχει μηδενικό μοχλοβραχίονα, επομένως δεν ασκεί ροπή. Επίσης, η δύναμη $\vec{F}_1$ έχει μικρότερο μοχλοβραχίονα από τη δύναμη $\vec{F}_2$, οπότε ασκεί μικρότερη ροπή. Επομένως, η κατάταξη των δυνάμεων, κατά τη σειρά με την οποία το μέτρο της ροπής τους ως προς τον άξονα περιστροφής αυξάνεται, είναι: $\vec{F}_3, \vec{F}_1, \vec{F}_2$.

Ερώτηση 3.

Στο σχήμα (α) φαίνεται ένα ελεύθερο στερεό, το οποίο στρέφεται υπό την επίδραση του ζεύγους δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.



Αν μετακινήσουμε τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων μετακινώντας παράλληλα τους φορείς των δυνάμεων, όπως φαίνεται στο σχήμα (β), χωρίς να μεταβάλλουμε τη μεταξύ τους απόσταση, τότε το στερεό:

- α) στρέφεται όπως και στο σχήμα α.
- β) στρέφεται αντίστροφα από το σχήμα α.
- γ) ισορροπεί.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η ροπή ζεύγους δύναμης είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο και εξαρτάται μόνο από το μέτρο των δυνάμεων και την απόσταση μεταξύ των φορέων τους. Στο σχήμα (β) δεν έχουμε μεταβάλλει ούτε το μέτρο των δυνάμεων, ούτε την απόσταση μεταξύ των φορέων τους. Επομένως, η ράβδος στο σχήμα (β), υπό την επίδραση της ίδιας ροπής του ζεύγους δύναμης, θα κάνει ό,τι έκανε και στο σχήμα (α), δηλαδή, θα στρέφεται με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.

Ερώτηση 4.

Μια ομογενής λεπτή ράβδος μάζας M και μήκους L περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που είναι κάθετος σ' αυτή και διέρχεται από το ένα άκρο της. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι $\frac{1}{3}ML^2$. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι παράλληλος στον προηγούμενο άξονα είναι:

α) $\frac{1}{4}ML^2$.

β) $\frac{7}{12}ML^2$.

γ) $\frac{1}{12}ML^2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Ο αρχικός και ο τελικός άξονας περιστροφής είναι παράλληλοι και απέχουν $d = \frac{L}{2}$.

Επειδή ο ένας άξονας διέρχεται από το κέντρο μάζας μπορούμε να κάνουμε χρήση του θεωρήματος Steiner.

Έχουμε:

$$I = I_{\text{cm}} + Md^2 \Rightarrow \frac{1}{3}ML^2 = I_{\text{cm}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{3}ML^2 = I_{\text{cm}} + \frac{1}{4}ML^2 \Rightarrow$$

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{3}ML^2 - \frac{1}{4}ML^2 \Rightarrow I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$$

Ερώτηση 5.

Μια ρόδα αυτοκινήτου ακτίνας R κυλίεται με το κέντρο μάζας της να έχει σταθερή ταχύτητα $υ$. Ένα μικρό καρφί μάζας m είναι καρφωμένο στην εξωτερική επιφάνεια της ρόδας. Αν θεωρήσουμε τις διαστάσεις του καρφιού αμελητέες, τότε η μεταβολή της ορμής του καρφιού, μεταξύ κατώτερης και ανώτερης θέσης

α) είναι $mυ$.

β) είναι μηδέν.

γ) έχει μέτρο ίσο με $2mυ$.

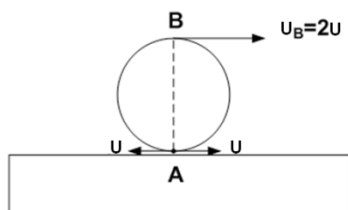
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

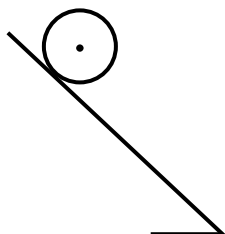
Επειδή η ρόδα κυλίεται η ταχύτητα του καρφιού όταν περνά από την κατώτερη θέση (όταν είναι σε επαφή με το έδαφος) είναι μηδέν, ενώ όταν το καρφί διέρχεται από το ψηλότερο σημείο της τροχιάς του έχει ταχύτητα $2υ$. Έτσι, το καρφί στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του έχει ορμή μέτρου 0 και στο ψηλότερο σημείο έχει ορμή μέτρου $p = 2mυ$.

Συνεπώς, η μεταβολή της ορμής του μεταξύ των δύο παραπάνω θέσεων θα έχει μέτρο $|\Delta \vec{p}| = |\vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}}| = |2mυ - 0| \Rightarrow |\Delta \vec{p}| = 2mυ$ και οριζόντια διεύθυνση, δηλαδή θα έχει ίδια κατεύθυνση με αυτήν της ταχύτητας που έχει στο ψηλότερο σημείο.



Ερώτηση 6.

Ο ομογενής τροχός του σχήματος συγκρατείται ακίνητος πάνω στο πλάγιο επίπεδο. Κάποια στιγμή αφήνεται ελεύθερος και αρχίζει να εκτελεί σύνθετη κίνηση. Η επιτάχυνση λόγω μεταφοράς $\vec{a}_{cm}$ και η επιτάχυνση λόγω περιστροφής $\vec{a}_\gamma$ του τροχού έχουν αναλογία μέτρων $\frac{a_{cm}}{a_\gamma} = R$, όπου R η ακτίνα του τροχού.



Η κίνηση του τροχού γίνεται σε πλάγιο επίπεδο το οποίο είναι

- α) λείο.
- β) τραχύ.
- γ) αρχικά λείο και στη συνέχεια τραχύ.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή ισχύει $a_{cm} = a_\gamma R$, ο τροχός κυλίζει (χωρίς να ολισθαίνει) επιταχυνόμενος.

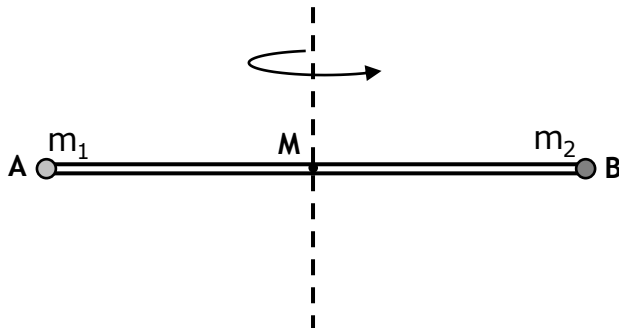
Στον τροχό ασκείται το βάρος του $\vec{w}$, το οποίο έχει μηδενική ροπή επειδή ασκείται στο κέντρο του τροχού (στον ελεύθερο άξονα περιστροφής).

Επίσης, στον τροχό ασκείται η κάθετη στο έδαφος δύναμη στήριξης (κάθετη αντίδραση) $\vec{N}$, η οποία έχει μηδενική ροπή επειδή ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο του τροχού.

Επειδή οι δυνάμεις $\vec{w}$ και $\vec{N}$ δεν ασκούν ροπή, δε μπορούν να δώσουν γωνιακή επιτάχυνση στον τροχό. Επομένως, είναι απαραίτητη κάποια άλλη δύναμη η οποία θα ασκεί ροπή στον τροχό. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνον αν το έδαφος είναι τραχύ, ώστε η ροπή της στατικής τριβής να προσδώσει την απαιτούμενη γωνιακή επιτάχυνση.

Ερώτηση 7.

Το σύστημα του σχήματος αποτελείται από μια αβαρή ράβδο AB μήκους d και δύο πολύ μικρά σφαιρίδια με μάζες m_1 και $m_2 = 2m_1$. Το σύστημα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που έχει προσαρμοστεί στο μέσο M της ράβδου AB, όπως στο σχήμα.



Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του σχήματος είναι I_0 . Αν ο άξονας περιστροφής μετακινηθεί παράλληλα στον εαυτό του στο μέσο της απόστασης MB, η ροπή αδράνειας του συστήματος

- α) θα αυξηθεί.
- β) θα μειωθεί.
- γ) δε θα μεταβληθεί.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής που έχει προσαρμοστεί στο μέσο M της ράβδου AB είναι:

$$I_0 = m_1 \left(\frac{d}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{d}{2} \right)^2 \Rightarrow I_0 = (m_1 + 2m_1) \frac{d^2}{4} \Rightarrow I_0 = \frac{3}{4} m_1 d^2$$

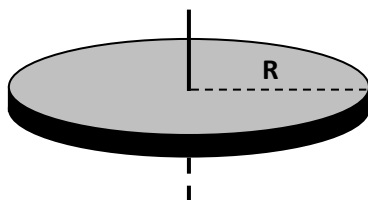
Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς το νέο άξονα περιστροφής είναι:

$$I_1 = m_1 \left(\frac{3d}{4} \right)^2 + m_2 \left(\frac{d}{4} \right)^2 \Rightarrow I_1 = \frac{9}{16} m_1 d^2 + \frac{2}{16} m_1 d^2 \Rightarrow I_1 = \frac{11}{16} m_1 d^2$$

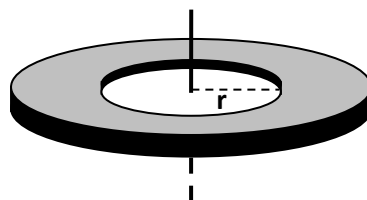
Επειδή $I_1 < I_0$, η ροπή αδράνειας του συστήματος θα μειωθεί.

Ερώτηση 8.

Ο ομογενής δίσκος ακτίνας R και μάζας M του σχήματος (α) μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και περνά από το κέντρο του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $\frac{1}{2}MR^2$ και επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μάζα ενός τμήματος του δίσκου είναι ανάλογη της επιφάνειας που καλύπτει.



(α)



(β)

Αφαιρούμε από το δίσκο ένα κυκλικό τμήμα ακτίνας $r = \frac{R}{2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου που σχηματίστηκε είναι:

α) $\frac{3}{8}MR^2$.

β) $\frac{7}{16}MR^2$.

γ) $\frac{15}{32}MR^2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η ροπή αδράνειας I του δακτυλίου που σχηματίστηκε είναι $I = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2$, όπου m η μάζα του κυκλικού τμήματος που αφαιρέθηκε.

Η μάζα του κυκλικού τμήματος που αφαιρέθηκε είναι ανάλογη της επιφάνειας που καλύπτει. Επομένως:

$$\frac{m}{M} = \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow m = M \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2}{R^2} \Rightarrow m = \frac{M}{4}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2$ έχουμε:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2} \frac{M}{4} \frac{R^2}{4} \Rightarrow I = \frac{15}{32}MR^2.$$

Ερώτηση 9.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Αντώνιο Παλόγο)

Σε ένα σφαιρικό κέλυφος μάζας m , όλες οι στοιχειώδεις μάζες που το αποτελούν βρίσκονται στην ίδια απόσταση R από το κέντρο του. Η ροπή αδράνειας του σφαιρικού κελύφους ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του είναι

α) $\kappa \cdot MR^2$, όπου κ ένας αριθμός για τον οποίο ισχύει $\kappa < 1$.

β) $\kappa \cdot MR^2$, όπου κ ένας αριθμός για τον οποίο ισχύει $\kappa > 1$.

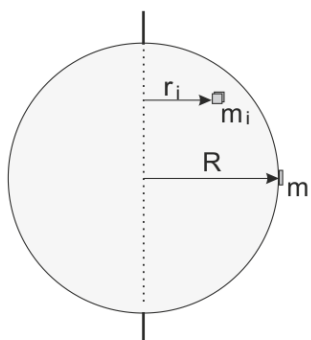
γ) MR^2 .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος δίνεται από τη σχέση $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$,



όπου τα $r_1, r_2, \dots$ δηλώνουν αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής (και όχι από το κέντρο μάζας του σώματος). Οι στοιχειώδεις μάζες του σφαιρικού κελύφους βρίσκονται σε αποστάσεις r για τις οποίες ισχύει

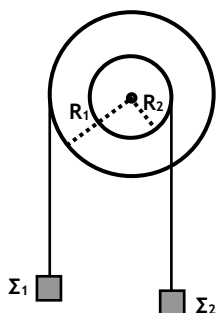
$$0 \leq r \leq R$$

και για ελάχιστες από αυτές ισχύει

$$r = R.$$

Ερώτηση 10.

Στο σχήμα φαίνεται μια διπλή τροχαλία, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και δύο μικρά σώματα Σ_1 και Σ_2 , τα οποία αναρτώνται από τη διπλή τροχαλία. Για να ισορροπεί το σύστημα πρέπει



α) το Σ_1 να είναι βαρύτερο από το Σ_2 .

β) το Σ_2 να είναι βαρύτερο από το Σ_1 .

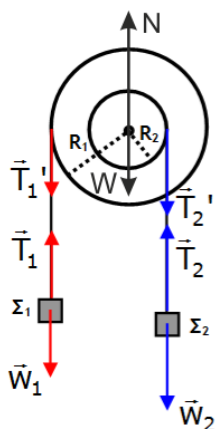
γ) το Σ_1 να έχει ίσο βάρος με το Σ_2 .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα Σ_1 και Σ_2 και οι δυνάμεις που ασκούνται στη διπλή τροχαλία. Από τις δυνάμεις αυτές ροπή προκαλούν οι $\vec{T}_1'$ και $\vec{T}_2'$.



Επειδή τα Σ_1 και Σ_2 ισορροπούν, από τη σχέση $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ έχουμε:

$$T_1 = w_1$$

$$T_2 = w_2$$

Για τις δυνάμεις $\vec{T}_1$, $\vec{T}_1'$ και $\vec{T}_2$, $\vec{T}_2'$ ισχύει: $T_1 = T_1'$ και $T_2 = T_2'$.

Επειδή η διπλή τροχαλία ισορροπεί στροφικά, από τη σχέση $\Sigma \vec{\tau} = \vec{0}$ έχουμε:

$$T_1' R_1 = T_2' R_2 \Rightarrow T_1 R_1 = T_2 R_2 \Rightarrow w_1 R_1 = w_2 R_2 \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

και επειδή $R_1 > R_2$ έχουμε: $w_2 > w_1$.

Ερώτηση 11.

Σε ένα ελεύθερο στερεό ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, από τις οποίες η δύναμη $\vec{F}_1$ ασκείται στο κέντρο μάζας του στερεού. Το στερεό ισορροπεί. Αν καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}_1$, το στερεό θα εκτελέσει:

- α) μεταφορική κίνηση.
- β) στροφική κίνηση.
- γ) σύνθετη κίνηση.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ οι δυνάμεις που αποτελούν ζεύγος δυνάμεων. Για τις δυνάμεις αυτές ισχύει $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ άρα για τα μέτρα τους ισχύει:

$$F_2 = F_1 \quad (= F).$$

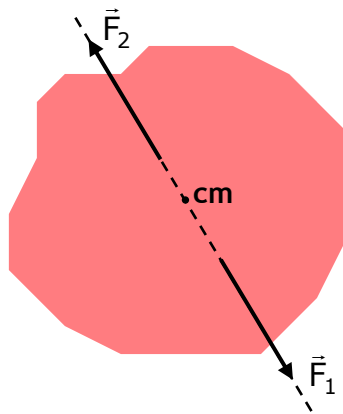
Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο και έχει μέτρο:

$$\Sigma \tau = F \cdot d, \text{ όπου } d \text{ η απόσταση των φορέων των δυνάμεων } \vec{F}_1 \text{ και } \vec{F}_2.$$

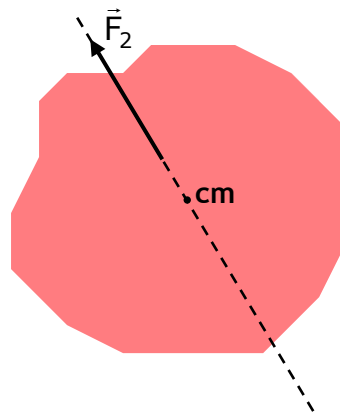
Επειδή αρχικά το στερεό ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \Sigma \tau = F \cdot d = 0$$

Επειδή $F \neq 0$ συμπεραίνουμε ότι $d = 0$, δηλαδή οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι συγγραμμικές. Επομένως, ο φορέας της $\vec{F}_2$ διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού, όπως φαίνεται στο σχήμα (α):



(α)

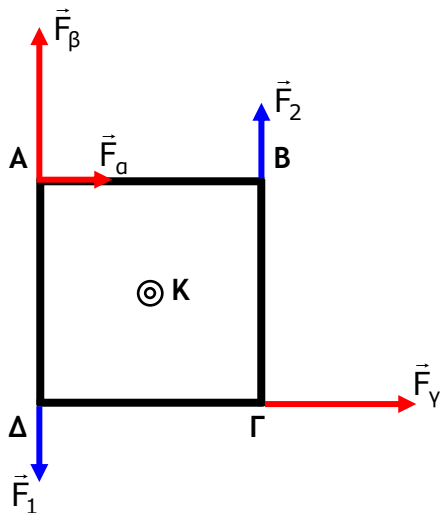


(β)

Όταν καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}_1$, επειδή η δύναμη $\vec{F}_2$ δεν ασκεί ροπή ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, το στερεό θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση στην κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}_2$, (βλέπε σχήμα β).

Ερώτηση 12.

Η τετράγωνη πλάκα ΑΒΓΔ πλευράς a του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της Κ και είναι κάθετος σε αυτή. Στην πλάκα ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρα $F_1 = F_2 (= F)$.



Η δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στο στερεό για να ισορροπεί είναι:

α) η δύναμη $\vec{F}_\alpha$, μέτρου $F_\alpha = F$.

β) η δύναμη $\vec{F}_\beta$, μέτρου $F_\beta = 2F$.

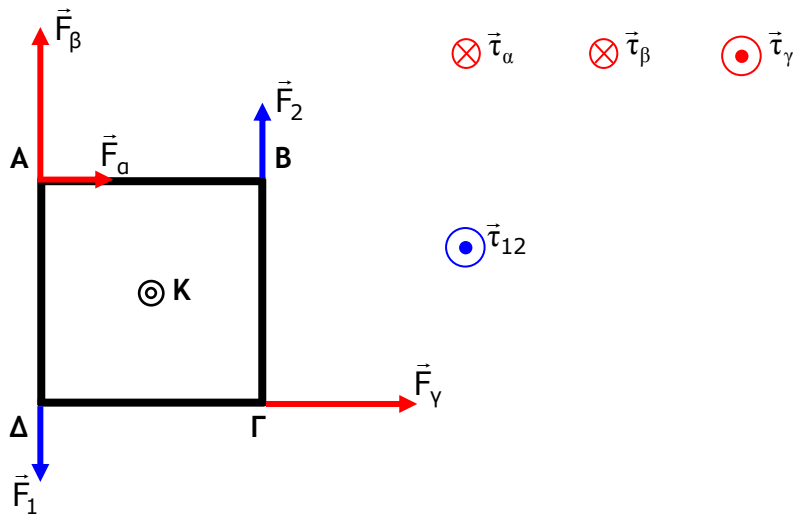
γ) η δύναμη $\vec{F}_\gamma$, μέτρου $F_\gamma = 2F$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Για να ισορροπεί ένα στερεό που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα, πρέπει να ισχύει $\Sigma \vec{\tau} = \vec{0}$ ως προς οποιοδήποτε σημείο. Επιλέγουμε να υπολογίσουμε τις ροπές ως προς το σημείο Κ ώστε να μηδενιστεί η ροπή της δύναμης που ασκεί ο ακλόνητος άξονας περιστροφής. Στο σχήμα φαίνονται οι κατευθύνσεις των ροπών:



Από τις κατευθύνσεις των ροπών φαίνεται ότι η δύναμη $\vec{F}_\gamma$ δε μπορεί να ισορροπήσει την πλάκα, διότι ασκεί ομόρροπη ροπή με τη συνολική ροπή των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Για τα μέτρα των ροπών των δυνάμεων $\vec{F}_\alpha$ και $\vec{F}_\beta$ έχουμε αντίστοιχα:

$$\tau_\alpha = F_\alpha \cdot \frac{(A\Delta)}{2} \Rightarrow \tau_\alpha = F \cdot \frac{\alpha}{2}$$

$$\tau_\beta = F_\beta \cdot \frac{(AB)}{2} \Rightarrow \tau_\beta = 2F \cdot \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tau_\beta = F \cdot \alpha$$

Για το μέτρο της συνολικής ροπής των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ έχουμε:

$$\tau_{12} = F \cdot \frac{(AB)}{2} + F \cdot \frac{(AB)}{2} \Rightarrow \tau_{12} = F \cdot \alpha$$

Επομένως, η δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στο στερεό για να ισορροπεί είναι η δύναμη $\vec{F}_\beta$, επειδή ασκεί αντίθετη ροπή από τη συνολική ροπή των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Ερώτηση 13.

Η αβαρής δοκός AB του σχήματος (α) στηρίζεται σε ένα σημείο της O και ισορροπεί όταν στα άκρα της A και B τοποθετηθούν δύο μικρά σώματα Σ και Σ₁ με μάζες m και m₁.



Αν η απόσταση (OA) είναι ίση με το $\frac{1}{3}$ της απόστασης (AB), ο λόγος $\frac{m}{m_1}$ είναι ίσος με

α) 1.

β) 2.

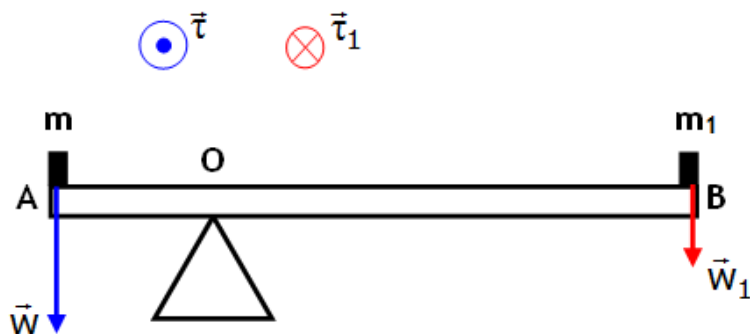
γ) $\frac{1}{2}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή τα σώματα ισορροπούν πάνω στη δοκό, της ασκούν δυνάμεις ίσες με τα αντίστοιχα βάρη τους. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούν ροπή στη δοκό, ως προς το σημείο O:



Επειδή η δοκός ισορροπεί ισχύει $\Sigma \tau = 0$. Ως προς το σημείο O έχουμε:

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow \tau = \tau_1 \Rightarrow w(OA) = w_1(OB) \quad (1)$$

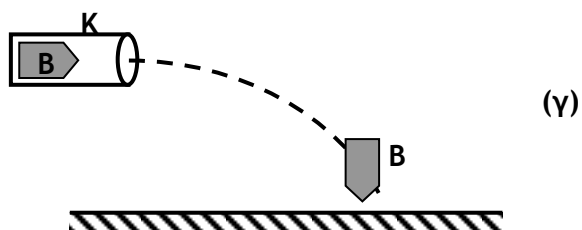
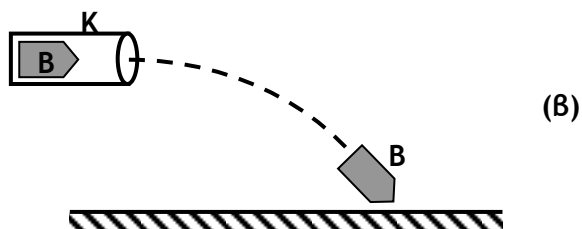
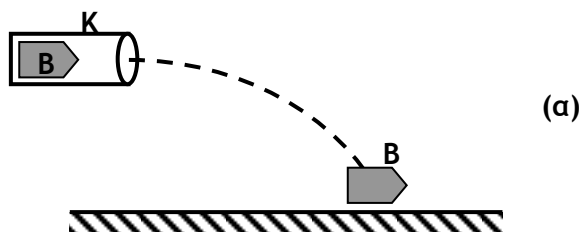
Όμως $(OA) + (OB) = (AB)$ και $(OA) = \frac{1}{3}(AB)$. Από το συνδυασμό των δύο σχέσεων προκύπτει $(OB) = 2 \cdot (OA)$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει:

$$mg(OA) = m_1 g 2(OA) \Rightarrow \frac{m}{m_1} = 2$$

Ερώτηση 14.

Από το κανόνι Κ εκτοξεύεται οριζόντια ένα βλήμα Β. Το βλήμα, ακολουθώντας παραβολική τροχιά, φτάνει στο έδαφος. Αγνοώντας την επίδραση του αέρα, και θεωρώντας το βλήμα ελεύθερο στερεό, το σχήμα που δείχνει σωστά τον τρόπο με τον οποίο το βλήμα συναντά το έδαφος είναι:



α) το σχήμα α.

β) το σχήμα β.

γ) το σχήμα γ.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

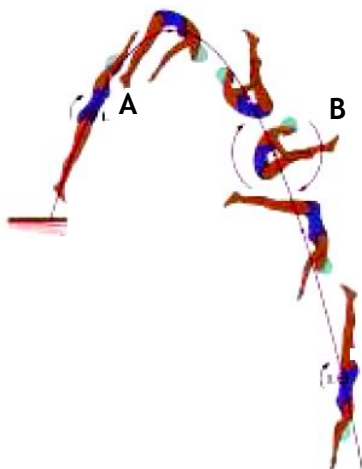
Σωστή απάντηση είναι η α.

Το βλήμα ως ελεύθερο στερεό μπορεί να περιστραφεί μόνο γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Από τη στιγμή που το βλήμα Β φεύγει από το

κανόνι, μέχρι να φτάσει στο έδαφος, η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του είναι το βάρος του. Επειδή ο φορέας του βάρους περνά από το κέντρο μάζας του βλήματος δεν ασκεί ροπή, επομένως δε μπορεί να το στρέψει. Αφού στο βλήμα δεν ασκούνται ροπές ικανές να το στρέψουν, θα φτάσει στο έδαφος με τον αρχικό προσανατολισμό του, εκτελώντας μόνο μεταφορική κίνηση.

Ερώτηση 15.

Στο σχήμα φαίνεται μια καταδύτρια σε διάφορες φάσεις της κατάδυσής της.



Η στροφορμή της καταδύτριας:

α) είναι μεγαλύτερη στη θέση Α.

β) είναι μεγαλύτερη στη θέση Β.

γ) στις θέσεις Α και Β είναι ίση.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

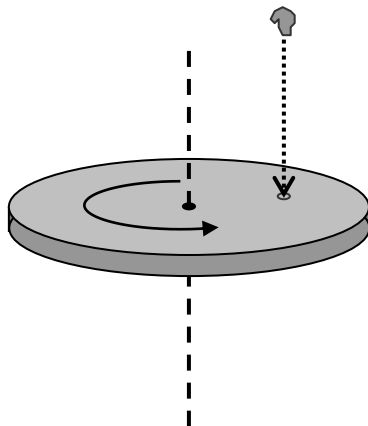
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Κατά την κίνηση της καταδύτριας στον αέρα, μοναδική εξωτερική δύναμη είναι το βάρος της, το οποίο, επειδή διέρχεται από το κέντρο μάζας, δε δημιουργεί ροπή. Όμως, όταν η συνολική ροπή που δέχεται ένα σώμα είναι μηδέν η στροφορμή του διατηρείται σταθερή. Επομένως, η στροφορμή της καταδύτριας διατηρείται σε όλη τη διάρκεια της κίνησης, μέχρι την επαφή με το νερό. Άρα, η στροφορμή της καταδύτριας είναι ίση στις θέσεις Α και Β.

Ερώτηση 16.

Ο δίσκος του σχήματος περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα που περνά από το κέντρο του. Από μικρό ύψος αφήνουμε ένα κομμάτι πλαστελίνης να πέσει και να κολλήσει πάνω στο δίσκο. Το συσσωμάτωμα δίσκου - πλαστελίνης που προκύπτει περιστρέφεται σε σχέση με το δίσκο



α) πιο αργά.

β) με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

γ) πιο γρήγορα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η συνολική εξωτερική ροπή στο σύστημα δίσκος - πλαστελίνη είναι μηδέν, επομένως η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή:

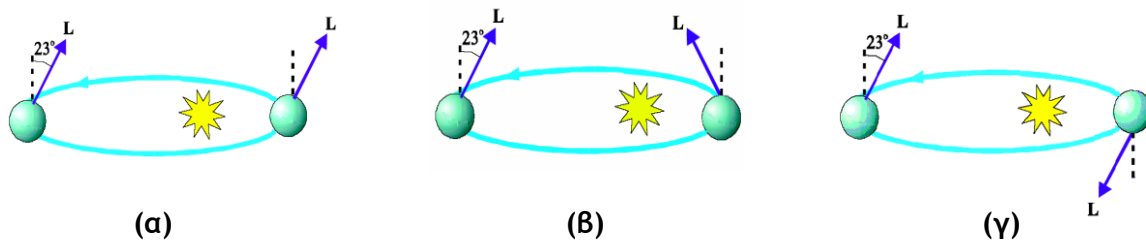
$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi} = I_{\tau\epsilon\lambda} \cdot \omega_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \omega_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi}}{I_{\tau\epsilon\lambda}}$$

Επειδή η επικόλληση της πλαστελίνης αυξάνει τη ροπή αδράνειας, θα ισχύει

$$I_{\tau\epsilon\lambda} > I_{\alpha\rho\chi}, \text{ επομένως } \omega_{\tau\epsilon\lambda} < \omega_{\alpha\rho\chi}.$$

Ερώτηση 17.

Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν τη στροφορμή της Γης, λόγω της περιστροφής της γύρω από τον εαυτό της (spin) σε δύο θέσεις, στο περιήλιο (μικρότερη απόσταση από τον Ήλιο) και στο αφήλιο (μεγαλύτερη απόσταση από τον Ήλιο) της τροχιάς της γύρω από τον Ήλιο.



Το σχήμα στο οποίο έχει σχεδιαστεί σωστά η στροφορμή είναι:

- α) το σχήμα α.
- β) το σχήμα β.
- γ) το σχήμα γ.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η ελκτική δύναμη που δέχεται η Γη από τον Ήλιο έχει φορέα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της, άρα δε δημιουργεί ροπή.

Η στροφορμή της Γης λόγω της περιστροφής της γύρω από τον εαυτό της παραμένει σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά, αφού καμία ροπή δεν της ασκείται. Το σχήμα στο οποίο συμβαίνει αυτό είναι το σχήμα (α).

Ερώτηση 18.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Αντώνιο Παλόγο)

Πετάμε μια μπάλα του μπάσκετ κατακόρυφα προς τα πάνω με τέτοιο τρόπο, ώστε αυτή να περιστρέφεται καθώς ανέρχεται. Στο χρονικό διάστημα που η μπάλα ανέρχεται, η γωνιακή της ταχύτητα

- α) αυξάνεται.
- β) μειώνεται.
- γ) παραμένει σταθερή.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η μπάλα είναι ένα ελεύθερο στερεό και ανερχόμενη θα περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Η μόνη δύναμη που ασκείται στη μπάλα, αφού χάσει την επαφή με το χέρι, είναι το βάρος της, το οποίο έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας και δεν μπορεί να προκαλέσει ροπή. Αφού η συνολική ροπή που ασκείται στη μπάλα είναι μηδέν, η γωνιακή της ταχύτητα θα παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησής της.

Ερώτηση 19.

Ένας τροχός περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Η κινητική ενέργεια του τροχού είναι K . Αν διπλασιάσουμε τη στροφορμή του τροχού, τότε η κινητική του ενέργεια θα γίνει

α) $2K$.

β) $4K$.

γ) $8K$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η στροφορμή ενός στερεού ως προς σταθερό άξονα δίνεται από τον τύπο: $L = I\omega$.

Η κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης δίνεται από τον τύπο: $K = \frac{1}{2} I\omega^2$.

Με πράξεις έχουμε:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} \frac{I^2 \omega^2}{I} \Rightarrow K = \frac{L^2}{2I}$$

$$K' = \frac{L'^2}{2I} \Rightarrow K' = \frac{(2L)^2}{2I} \Rightarrow K' = 4 \cdot \frac{L^2}{2I} \Rightarrow K' = 4K$$

Ερώτηση 20.

Ένας τροχός κυλίνεται κατά μήκος πλάγιου επιπέδου. Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τον τύπο: $I = \frac{2}{3}MR^2$. Ο λόγος της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης προς την κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης του τροχού, $\frac{K_{\text{μετ}}}{K_{\text{στρ}}}$, ισούται με

α) $\frac{3}{2}$.

β) $\frac{2}{3}$.

γ) 1.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

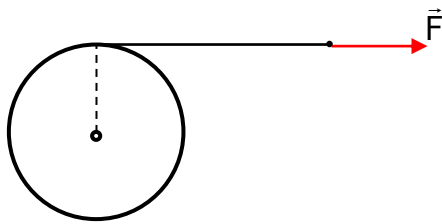
Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή ο τροχός κυλίνεται ισχύει: $v_{\text{cm}} = \omega R$. Επομένως:

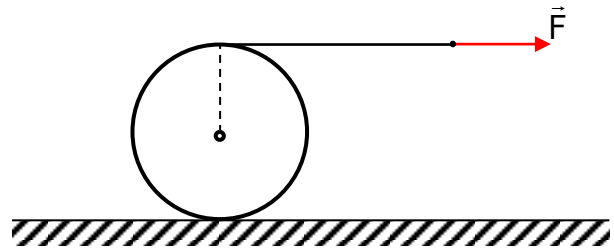
$$\frac{K_{\text{μετ}}}{K_{\text{στρ}}} = \frac{\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2}{\frac{1}{2}I\omega^2} \Rightarrow \frac{K_{\text{μετ}}}{K_{\text{στρ}}} = \frac{M\omega^2 R^2}{\frac{2}{3}MR^2\omega^2} \Rightarrow \frac{K_{\text{μετ}}}{K_{\text{στρ}}} = \frac{3}{2}$$

Ερώτηση 21.

Ο άξονας του αρχικά ακίνητου ομογενή τροχού του σχήματος (α) είναι ακλόνητος. Γύρω από τον τροχό έχει τυλιχθεί πολλές φορές αβαρές νήμα, το οποίο δεν ολισθαίνει πάνω στον τροχό. Στην ελεύθερη άκρη του νήματος ασκείται σταθερή δύναμη $\vec{F}$, η οποία προσφέρει στον τροχό έργο W και μετά καταργείται. Στο σχήμα (β) ένας ίδιος αρχικά ακίνητος τροχός κυλίεται υπό την επίδραση της ίδιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$, η οποία προσφέρει στον τροχό το ίδιο έργο W όπως και στη περίπτωση (α) και μετά καταργείται. Η γωνιακή ταχύτητα, μόλις καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}$, είναι:



(α)



(β)

α) μεγαλύτερη στον τροχό α.

β) μεγαλύτερη στον τροχό β.

γ) ίση στους δύο τροχούς.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Η κινητική ενέργεια του τροχού (α) δίνεται από τον τύπο: $K_{\alpha} = \frac{1}{2} I \omega_{\alpha}^2$.

Η κινητική ενέργεια του τροχού (β) δίνεται από τον τύπο: $K_{\beta} = \frac{1}{2} I \omega_{\beta}^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$.

Σύμφωνα με την εκφώνηση, το έργο W και στις δύο περιπτώσεις είναι το ίδιο. Στη β' περίπτωση το έργο μοιράζεται σε στροφική και μεταφορική κινητική ενέργεια, ενώ στην

α' περίπτωση γίνεται όλο στροφική, επομένως ισχύει: $\frac{1}{2} I \omega_{\alpha}^2 > \frac{1}{2} I \omega_{\beta}^2 \Rightarrow \omega_{\alpha} > \omega_{\beta}$.

Ερώτηση 22.

Δύο στερεά Α και Β στρέφονται γύρω από σταθερό άξονα με κοινή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου a_γ . Ο λόγος των μέτρων της στροφορμής του στερεού Α προς τη στροφορμή του

Β ως προς τον άξονα περιστροφής κάποια χρονική στιγμή t_1 είναι $\frac{L_1}{L_2} = 2$. Εκείνη τη

χρονική στιγμή, ο λόγος $\frac{P_1}{P_2}$ της ισχύος της ροπής που επιταχύνει το στερεό Α προς την ισχύ της ροπής που επιταχύνει το στερεό Β είναι:

α) $\frac{1}{2}$.

β) 1.

γ) 2.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

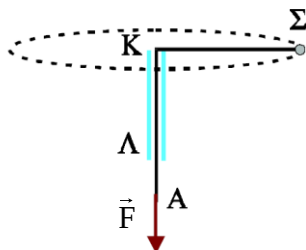
Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή $P = \tau\omega$ και $L = I\omega$ έχουμε:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\tau_1\omega_1}{\tau_2\omega_2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1 a_\gamma \omega_1}{I_2 a_\gamma \omega_2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1 \omega_1}{I_2 \omega_2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{L_1}{L_2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = 2$$

Ερώτηση 23.

Το σφαιρίδιο Σ του σχήματος διαγράφει κυκλική τροχιά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ακτίνας R. Το σκοινί στο οποίο είναι δεμένο το σφαιρίδιο περνάει από κατακόρυφο σωλήνα ΚΛ.



Ασκώντας κατάλληλη δύναμη στο ελεύθερο άκρο Α του σκοινιού μειώνουμε την ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου στη μισή της αρχικής. Το σφαιρίδιο θα περιστρέφεται:

- α) πιο γρήγορα.
- β) πιο αργά.
- γ) το ίδιο γρήγορα με πριν.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή η τάση του νήματος, που λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη για το σφαιρίδιο, έχει φορέα που διέρχεται από τον άξονα περιστροφής, δεν ασκεί ροπή, επομένως η στροφορμή του σφαιριδίου ως προς τον άξονα περιστροφής διατηρείται:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m v_{\alpha\rho\chi} R = m v_{\tau\epsilon\lambda} \frac{R}{2} \Rightarrow v_{\tau\epsilon\lambda} = 2 v_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow$$

$$\omega_{\tau\epsilon\lambda} \frac{R}{2} = 2 \omega_{\alpha\rho\chi} R \Rightarrow \omega_{\tau\epsilon\lambda} = 4 \omega_{\alpha\rho\chi}$$

Άρα θα κινείται πιο γρήγορα.

Ερώτηση 24.

(Η ερώτηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Κωνσταντίνο Στεφανίδη)

Σώμα αρχίζει να περιστρέφεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, υπό την επίδραση σταθερής ροπής. Τη χρονική στιγμή t_1 η κινητική του ενέργεια, λόγω περιστροφής, είναι K_1 . Τη χρονική στιγμή $3t_1$ η κινητική του ενέργεια, λόγω περιστροφής, θα είναι:

α) η ίδια.

β) τριπλάσια.

γ) εννιापλάσια.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής δίνεται από τη σχέση $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ (1).

Επειδή η ροπή είναι σταθερή η επιτάχυνση θα είναι σταθερή (Νόμος στροφικής κίνησης).

Επειδή η αρχική γωνιακή ταχύτητα είναι ίση με μηδέν, ισχύει ότι $\omega = \alpha \cdot t$, κατά συνέπεια όταν ο χρόνος τριπλασιασθεί η γωνιακή του ταχύτητα θα τριπλασιασθεί.

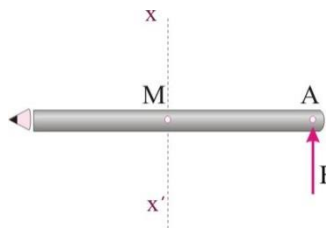
$$\left. \begin{aligned} \omega_{\alpha\rho\chi} &= \alpha \cdot t_1 \\ \omega_{\tau\epsilon\lambda} &= \alpha \cdot t_2 = 3\alpha \cdot t_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_{\tau\epsilon\lambda} = 3\omega_{\alpha\rho\chi} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η κινητική του ενέργεια θα εννιापλασιασθεί.

$$K_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2} I \omega_{\tau\epsilon\lambda}^2 = \frac{1}{2} I (3\omega_{\alpha\rho\chi})^2 = 9 \frac{1}{2} I \omega_{\alpha\rho\chi}^2 \Rightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} = 9K$$

Ερώτηση 25.

Το μολύβι του σχήματος μπορεί να κινείται ελεύθερα πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Ασκούμε την ίδια δύναμη F δύο φορές, μία στο άκρο A και μία στο μέσο M . Το κέντρο μάζας του μολυβιού θα διανύσει το μήκος του τραπεζιού



- α. σε μικρότερο χρόνο όταν η δύναμη ασκείται στο μέσον M .
- β. σε μικρότερο χρόνο όταν η δύναμη ασκείται στο άκρο A .
- γ. στον ίδιο χρόνο και στις δύο περιπτώσεις.

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (γ).

Για τη μελέτη της μεταφορικής κίνησης ενός σώματος θεωρούμε ότι οι δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο μάζας. Έτσι, στις δύο περιπτώσεις το κέντρο μάζας δέχεται την ίδια συνισταμένη δύναμη, $\Sigma F_{\text{cm}} = F$, οπότε θα αποκτήσει και την ίδια επιτάχυνση, $a_{\text{cm}} = F/m$. Συνεπώς διανύει την ίδια απόσταση στον ίδιο χρόνο,

$$\Delta x_{\text{cm}} = \frac{1}{2} a_{\text{cm}} \cdot t^2.$$

Ερώτηση 26.

Σε κεκλιμένο επίπεδο αφήνεται ελεύθερη ομογενής σφαίρα μάζας m και ακτίνας R . Η σφαίρα κατέρχεται κυλιόμενη (χωρίς ολίσθηση) στο πλάγιο επίπεδο. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της υπολογίζεται από την

σχέση $I = \frac{2}{5}mr^2$. Σε κάθε θέση του κεκλιμένου επιπέδου η κινητική της ενέργεια λόγω

της μεταφορικής κίνησής της είναι ίση με

α. το $1/2$ της συνολικής κινητικής ενέργειας που έχει στην θέση αυτή.

β. τα $2/7$ της συνολικής κινητικής ενέργειας που έχει στην θέση αυτή.

γ. τα $5/7$ της συνολικής κινητικής ενέργειας που έχει στην θέση αυτή.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (γ).

Ο λόγος της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης προς την κινητική ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης είναι ίσος με:

$$\frac{K_{\text{μετ}}}{K_{\text{στρ}}} = \frac{\frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2}{\frac{1}{2}I\omega^2} = \frac{mv_{\text{cm}}^2}{\frac{2}{5}mr^2\omega^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow K_{\text{στρ}} = \frac{2}{5}K_{\text{μετ}}$$

Όμως η συνολική ενέργεια είναι:

$$E = K_{\text{μετ}} + K_{\text{στρ}} \Rightarrow E = \frac{7}{5}K_{\text{μετ}} \Rightarrow K_{\text{μετ}} = \frac{5}{7}E$$

Ερώτηση 27.

Ένας αθλητής καταδύσεων κατά την εκτέλεση ενός άλματος κατάφερε συμπύσσοντας τα άκρα του να μειώσει τη ροπή αδράνειάς του στο μισό της αρχικής τιμής της. Η μεταβολή αυτή είχε ως συνέπεια η κινητική του ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης να

α. διπλασιαστεί.

β. παραμένει σταθερή.

γ. τετραπλασιαστεί.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (α).

Ο αθλητής στη διάρκεια του άλματος μπορεί να θεωρηθεί ένα ελεύθερο στερεό. Τα ελεύθερα στερεά περιστρέφονται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους. Η μόνη δύναμη που ασκείται στον αθλητή είναι το βάρος του, του οποίου η ροπή ως προς το κέντρο μάζας του είναι ίση με μηδέν, με συνέπεια κατά την εκτέλεση του άλματος η στροφορμή (L) του αθλητή να διατηρείται σταθερή.

Η σχέση της στροφικής κινητικής ενέργειας γράφεται:

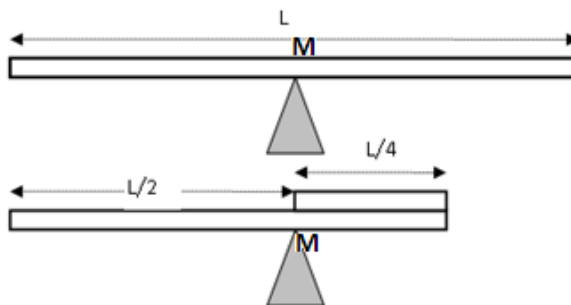
$$K_{\text{σπ}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{I^2 \omega^2}{I} \Rightarrow K_{\text{σπ}} = \frac{L^2}{2I}$$

Σύμφωνα με την τελευταία σχέση, αφού ο αριθμητής διατηρείται σταθερός και ο παρονομαστής υποδιπλασιάζεται η $K_{\text{σπ}}$ διπλασιάζεται.

Ερώτηση 28.

Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει βάρος w και ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη στο μέσο της.

Κόβουμε το ένα τέταρτο της ράβδου και το τοποθετούμε όπως στο σχήμα. Χωρίς να αλλάξουμε τη θέση του στηρίγματος, για να ισορροπήσει η ράβδος πάλι, πρέπει να ασκήσουμε στο αριστερό άκρο μια δύναμη κατακόρυφη



α προς τα πάνω μέτρου $w/4$.

β προς τα πάνω μέτρου $w/8$.

γ. προς τα κάτω μέτρου $w/8$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (β).

Η ροπή του βάρους του αριστερού τμήματος της ράβδου ως προς το στήριγμα (μέσο M) παραμένει σταθερή στις δύο περιπτώσεις και ίση κατά μέτρο με $\tau_1 = \frac{w}{2} \cdot \frac{L}{4}$

Στο δεξιό τμήμα της ράβδου, στην δεύτερη περίπτωση, η ροπή ως προς το M έχει μέτρο $\tau_2 = \frac{w}{2} \cdot \frac{L}{8}$

Από αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει πως κατά μέτρο έχουμε $\tau_1 = 2 \cdot \tau_2$

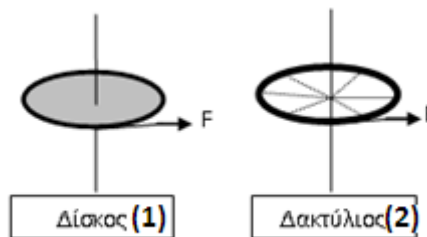
Για να ισορροπήσει η ράβδος θα πρέπει στο αριστερό άκρο της να ασκηθεί κατακόρυφη δύναμη με ροπή ως προς το M ίδιας φοράς με αυτήν της τ_2 και μέτρου

$$\frac{w}{2} \cdot \frac{L}{4} - \frac{w}{2} \cdot \frac{L}{8} = \frac{w}{2} \cdot \frac{L}{8}$$

$$\text{Άρα, } \tau_F = F \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{w}{2} \cdot \frac{L}{8} = F \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow F = \frac{w}{8}$$

Ερώτηση 29.

Ο δίσκος και ο δακτύλιος του σχήματος είναι αρχικά ακίνητοι και έχουν ίσες μάζες και ίσες ακτίνες. Με τη βοήθεια νημάτων που είναι τυλιγμένα στις περιφέρειές τους ασκούμε εφαπτομενικά την ίδια δύναμη F μέχρι να ξετυλιχτεί νήμα ίδιου μήκους d και στα δύο σώματα.



Για το πηλίκο $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ των γωνιακών ταχυτήτων που θα αποκτήσουν ο δίσκος και ο δακτύλιος αντίστοιχα, ισχύει

α. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$

β. $\frac{\omega_1}{\omega_2} > 1$

γ. $\frac{\omega_1}{\omega_2} < 1$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Επειδή ξετυλίχτηκε νήμα ίδιου μήκους, το έργο της δύναμης είναι ίδιο και στα δύο σώματα.

Με βάση το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

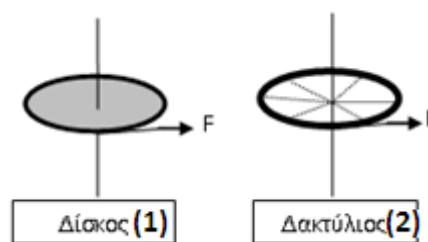
$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F \Rightarrow K_{\text{τελ}} = F \cdot d$, άρα και τα δύο σώματα αποκτούν ίσες κινητικές στροφικές ενέργειες.

Τα δύο σώματα έχουν ίδιες μάζες και ίδιες ακτίνες. Ο δακτύλιος έχει όλη τη μάζα του συγκεντρωμένη σε απόσταση R , ενώ ο δίσκος σε διάφορες αποστάσεις και ένα πολύ μικρό της τμήμα σε απόσταση R . Άρα ο δακτύλιος έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας από το δίσκο, $I_1 < I_2$.

Από τη σχέση της κινητικής ενέργειας $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ εύκολα προκύπτει ότι $\omega_1 > \omega_2$.

Ερώτηση 30.

Ο δίσκος και ο δακτύλιος του σχήματος είναι αρχικά ακίνητοι και έχουν ίσες μάζες και ίσες ακτίνες. Με τη βοήθεια νημάτων που είναι τυλιγμένα στις περιφέρειές τους ασκούμε εφαπτομενικά την ίδια δύναμη F μέχρι να ξετυλιχτεί νήμα ίδιου μήκους d και στα δύο σώματα. Το πηλίκο των κινητικών ενεργειών



$\frac{K_1}{K_2}$ που θα αποκτήσουν ο δίσκος και ο δακτύλιος αντίστοιχα είναι

α. 1

β. $\frac{1}{2}$

γ. 2

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (α).

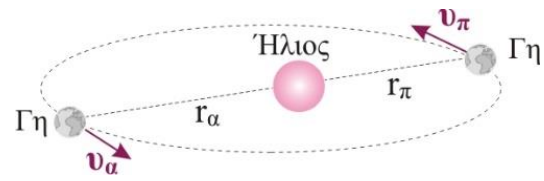
Επειδή ξετυλίχτηκε νήμα ίδιου μήκους, το έργο της δύναμης είναι ίδιο και στα δύο σώματα $W_F = F \cdot d$.

Με βάση το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F \Rightarrow K_{\text{τελ}} = F \cdot d$, άρα και τα δύο σώματα αποκτούν ίσες κινητικές στροφικές ενέργειες.

Ερώτηση 31.

Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο σε ελλειπτική τροχιά και η μόνη δύναμη που δέχεται είναι η δύναμη βαρύτητας, F_g , από αυτόν. Αν η ελάχιστη (περιήλιο) και η μέγιστη (αφήλιο) απόσταση της Γης από τον Ήλιο κατά



τη διάρκεια της ελλειπτικής της τροχιάς ικανοποιούν τη σχέση $r_\pi = \frac{9}{10} r_\alpha$, τότε η κινητική της ενέργεια όταν βρίσκεται στο αφήλιο (K_α) και η κινητική της ενέργεια όταν βρίσκεται στο περιήλιο (K_π) ικανοποιούν τη σχέση

α. $K_\pi = \frac{100}{81} K_\alpha$.

β. $K_\pi = \frac{100}{90} K_\alpha$.

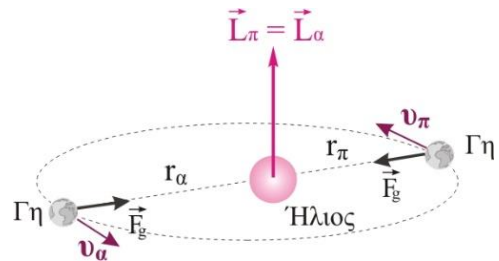
γ. $K_\pi = K_\alpha$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (α).

Η βαρυτική δύναμη είναι δύναμη κεντρική, δηλαδή έχει φορέα που ενώνει τα κέντρα της Γης και του Ήλιου. Σε αυτήν την κίνηση της Γης η ροπή της βαρυτικής δύναμης ως προς άξονα που διέρχεται από τον Ήλιο είναι ίση με μηδέν ($\Sigma \tau = 0$) με συνέπεια η στροφορμή της να διατηρείται σταθερή.



Θεωρώντας τη Γη ως υλικό σημείο σε σχέση με τον Ήλιο

$$\text{έχουμε: } L_\pi = L_\alpha \Rightarrow m v_\pi r_\pi = m v_\alpha r_\alpha \Rightarrow m \omega_\pi r_\pi^2 = m \omega_\alpha r_\alpha^2 \Rightarrow \frac{\omega_\pi}{\omega_\alpha} = \frac{r_\alpha^2}{r_\pi^2}$$

Η σχέση της κινητικής ενέργειας γράφεται:

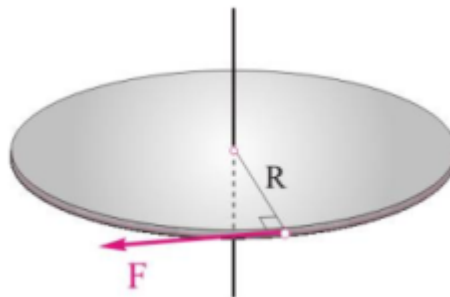
$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

οπότε ο λόγος των κινητικών ενεργειών θα είναι:

$$\frac{K_{\pi}}{K_a} = \frac{\frac{1}{2} m \omega_{\pi}^2 r_{\pi}^2}{\frac{1}{2} m \omega_a^2 r_a^2} = \frac{\omega_{\pi}^2 r_{\pi}^2}{\omega_a^2 r_a^2} = \left(\frac{r_a^2}{r_{\pi}^2} \right)^2 \frac{r_{\pi}^2}{r_a^2} \Rightarrow \frac{K_{\pi}}{K_a} = \frac{r_a^2}{r_{\pi}^2} = \left(\frac{10}{9} \right)^2 \Rightarrow \frac{K_{\pi}}{K_a} = \frac{100}{81}$$

Ερώτηση 32.

Ο αρχικά ακίνητος οριζόντιος δίσκος του διπλανού σχήματος, μάζας M και ακτίνας R , μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Μέσω νήματος που ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει με το δίσκο, ασκείται εφαπτομενικά στην περιφέρειά του σταθερή οριζόντια δύναμη F .



Όταν ο δίσκος αποκτά κινητική ενέργεια K_1 , η στιγμιαία ισχύς της δύναμης F ισούται με P_1 . Η στιγμιαία ισχύς της δύναμης F , θα διπλασιαστεί όταν η κινητική ενέργεια του δίσκου αυξηθεί κατά

α. K_1 .

β. $2K_1$.

γ. $3K_1$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή είναι η (γ).

Για τη στιγμιαία ισχύ της F στη στροφική κίνηση ισχύει $P = \tau_F \cdot \omega$.

Η ροπή της F είναι σταθερή και ίση με $\tau_F = F \cdot R$, οπότε για να διπλασιαστεί η ισχύς P αρκεί να διπλασιαστεί η γωνιακή ταχύτητα ω .

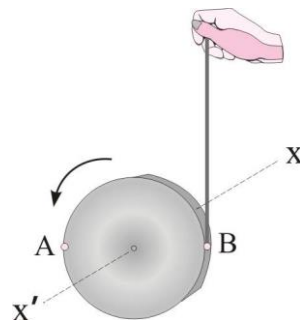
Από τη σχέση της στροφικής κινητικής ενέργειας, $K = \frac{1}{2} I \omega^2$, προκύπτει ότι όταν διπλασιάζεται η γωνιακή ταχύτητα η κινητική ενέργεια τετραπλασιάζεται.

Άρα, $K_2 = 4K_1$ και η ζητούμενη αύξηση της κινητικής ενέργεια είναι $3K_1$.

Ερώτηση 33.

Το γιο - γιο του σχήματος αποτελείται από ένα μικρό κύλινδρο μάζας M και ακτίνας R , στο κυρτό μέρος του οποίου έχει τυλιχτεί πολλές φορές ένα αβαρές νήμα.

Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του νήματος και αφήνοντας τον κύλινδρο ελεύθερο, το νήμα ξετυλίγεται και ο κύλινδρος κατεβαίνει περιστρεφόμενος γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα $x'x$ που ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του. Αν η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι v_{cm} , τότε η ταχύτητα του σημείου A , το οποίο βρίσκεται στην επιφάνεια του κυλίνδρου, είναι



α. v_{cm}

β. $2v_{cm}$

γ. 0

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

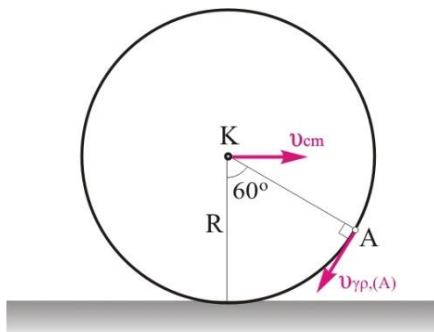
Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (β).

Κρατώντας ακίνητο το άκρο του νήματος ($v_B = 0$) ο κύλινδρος κινείται προς τα κάτω κάνοντας κύλιση χωρίς ολίσθηση, για την οποία θα ισχύει $v_{cm} = \omega \cdot R$. Σε κάθε σημείο του κυλίνδρου η ταχύτητα θα προκύπτει από την διανυσματική πρόσθεση της συνιστώσας ταχύτητας λόγω μεταφορικής κίνησης (v_{cm}) και της γραμμικής (εφαπτομενικής) συνιστώσας ταχύτητας λόγω στροφικής κίνησης ($v_{\gamma\pi} = \omega \cdot R$), δηλαδή θα ισχύει $\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\pi}$. Στο σημείο A οι δύο συνιστώσες ταχύτητες έχουν την ίδια φορά οπότε $v_A = 2 \cdot v_{cm}$.

Ερώτηση 34.

Ο δίσκος του σχήματος, με ακτίνα R , κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) σε οριζόντιο επίπεδο και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του K είναι u_{cm} . Το σημείο A του δίσκου, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, έχει ταχύτητα με μέτρο



α. u_{cm}

β. $2u_{cm}$

γ. $3/2 u_{cm}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

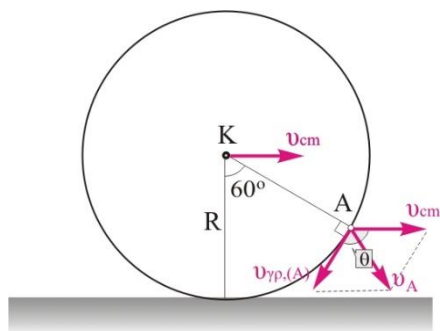
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Το σημείο A του δίσκου έχει γραμμική ταχύτητα $u_{gp,A}$, η οποία έχει μέτρο ίσο με τη u_{cm} . Για να βρούμε τη συνολική ταχύτητα του σημείου A , u_A , θα βρούμε τη συνισταμένη των δύο ταχυτήτων u_{cm} και $u_{gp,A}$. Οι δύο επιμέρους ταχύτητες σχηματίζουν γωνία θ , που ισούται με 120° , γιατί τα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται στο παραλληλόγραμμο είναι ισόπλευρα. Έτσι έχουμε

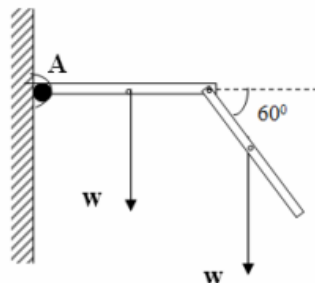
$$u_A = \sqrt{u_{cm}^2 + u_{gp,A}^2 + 2 \cdot u_{cm} \cdot u_{gp,A} \cdot \cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{u_{cm}^2 + u_{cm}^2 + 2 \cdot u_{cm} \cdot u_{cm} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{u_{cm}^2} = u_{cm}$$



Ερώτηση 35.

Δύο ίδιες ομογενείς ράβδοι μήκους ℓ και μάζας m , είναι ενωμένες, όπως φαίνεται στο σχήμα και το σύστημά τους μπορεί να περιστρέφεται γύρω από την άρθρωση Α σε κατακόρυφο επίπεδο. Αν g η επιτάχυνση της βαρύτητας, το μέτρο της συνολικής ροπής που δέχεται το σύστημα των ράβδων είναι



α. $\Sigma\tau = \frac{5mg\ell}{3}$.

β. $\Sigma\tau = \frac{7mg\ell}{4}$.

γ. $\Sigma\tau = 2mg\ell$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

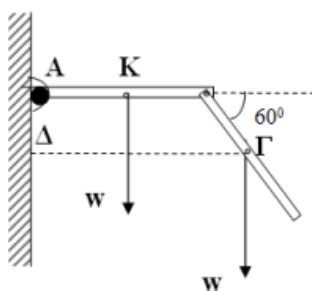
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Οι ράβδοι έχουν ίσα βάρη, με μοχλοβραχίονες ως προς το Α, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΚ και ΑΓ αντίστοιχα. Άρα

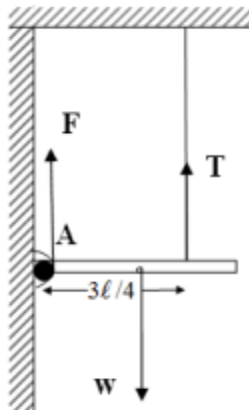
$$\Sigma\tau = w \cdot (AK) + w \cdot (AG) \Rightarrow$$

$$\Sigma\tau = mg \frac{\ell}{2} + mg \left(\ell + \frac{\ell}{2} \sin 60^\circ \right) = mg \frac{\ell}{2} + mg \left(\ell + \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = mg \frac{\ell}{2} + mg \frac{5\ell}{4} = \frac{7mg\ell}{4}.$$



Ερώτηση 36.

Μία ομογενής ράβδος μήκους ℓ και βάρους w , είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α και το σκοινί είναι δεμένο σε απόσταση $3\ell/4$ από το Α. Το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο σε οριζόντια θέση. Η δύναμη F που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση έχει μέτρο ίσο με



α. $\frac{2w}{3}$

β. $\frac{w}{3}$

γ. $\frac{w}{2}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Το σύστημα ισορροπεί, άρα θα ισχύει $\Sigma F = 0$ και $\Sigma \tau_{(A)} = 0$.

Η πρώτη σχέση δίνει

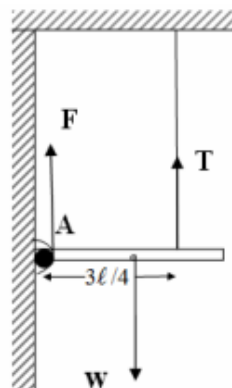
$$F + T = w \quad (1)$$

και η δεύτερη

$$\tau_{T(A)} + \tau_{w(A)} = 0 \Rightarrow T \cdot \frac{3\ell}{4} - w \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow T = \frac{2}{3}w.$$

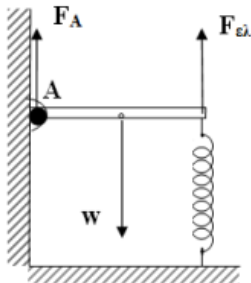
Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) έχουμε

$$F + \frac{2}{3}w = w \Rightarrow F = \frac{w}{3}.$$



Ερώτηση 37.

Μία ομογενής ράβδος μήκους ℓ και βάρους w , είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ελατήριο είναι κατακόρυφο. Το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο σε οριζόντια θέση. Η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση και η δύναμη του ελατηρίου συνδέονται με τη σχέση



α. $F_{ελ} = F_A$.

β. $F_{ελ} = 3F_A$.

γ. $F_{ελ} = 2F_A$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α) .

Το σύστημα ισορροπεί, άρα θα ισχύει $\Sigma F = 0$ και $\Sigma \tau_{(A)} = 0$.

Η πρώτη σχέση δίνει

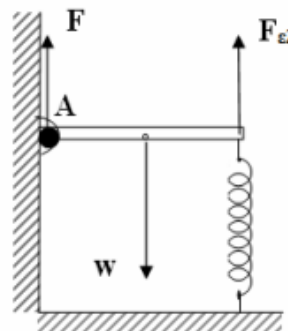
$$F_A + F_{ελ} = w \quad (1)$$

και η δεύτερη σχέση ισορροπίας δίνει

$$\tau_{F_{ελ}(A)} + \tau_{w(A)} = 0 \Rightarrow F_{ελ} \cdot \ell - w \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow F_{ελ} = \frac{w}{2} .$$

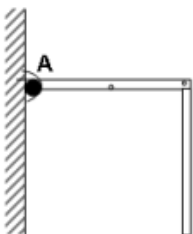
Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) έχουμε

$$F_A + \frac{w}{2} = w \Rightarrow F_A = \frac{w}{2} , \text{ δηλαδή } F_{ελ} = F_A .$$



Ερώτηση 38.

Δύο ίδιες ομογενείς ράβδοι μήκους ℓ και μάζας m , είναι ενωμένες κάθετα, όπως φαίνεται στο σχήμα και το σύστημά τους μπορεί να περιστρέφεται γύρω από την άρθρωση Α σε κατακόρυφο επίπεδο. Αν η ροπή αδράνειας ράβδου μήκους ℓ και μάζας m ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο της είναι $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}m\ell^2$, τότε η ροπή αδράνειας του συστήματος των ράβδων ως προς το Α είναι



α. $I_A = \frac{5}{3}m\ell^2$.

β. $I_A = \frac{4}{3}m\ell^2$.

γ. $I_A = \frac{17}{12}m\ell^2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Για να βρούμε τη ροπή αδράνειας ενός συστήματος σωμάτων προσθέτουμε τις ροπές αδράνειας των επιμέρους σωμάτων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα προσθέσουμε τις ροπές αδράνειας των δύο ράβδων ως προς σημείο Α.

Η πρώτη ράβδος, η οριζόντια, σύμφωνα με το θεώρημα Steiner θα έχει

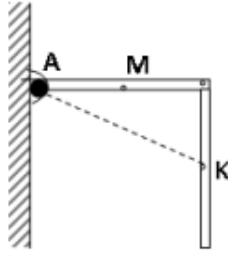
$$I_{1,A} = I_{\text{cm}} + m(MA)^2 = I_{\text{cm}} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}m\ell^2.$$

Η δεύτερη ράβδος, η κατακόρυφη, σύμφωνα με το θεώρημα Steiner θα έχει

$$I_{2,A} = I_{\text{cm}} + m(KA)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \ell^2\right] = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{5\ell^2}{4} = \frac{16}{12}m\ell^2 = \frac{4}{3}m\ell^2.$$

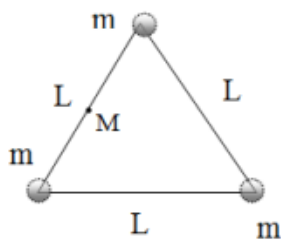
Άρα η συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι

$$I_A = I_{1,A} + I_{2,A} = \frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{4}{3}m\ell^2 = \frac{5}{3}m\ell^2.$$



Ερώτηση 39.

Τρεις σφαίρες αμελητέων διαστάσεων ίδιας μάζας m , συνδέονται μεταξύ τους με ράβδους μήκους L αμελητέας μάζας, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το σύστημα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το μέσο M της μιας πλευράς. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς αυτόν τον άξονα είναι

α. $\frac{5m \cdot L^2}{2}$.

β. $\frac{5m \cdot L^2}{4}$.

γ. $2m \cdot L^2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

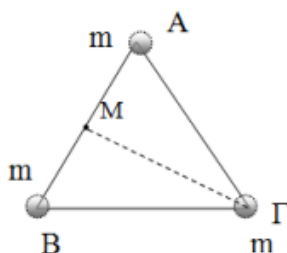
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Για να βρούμε τη ροπή αδράνειας του συστήματος των τριών σημειακών σφαιρών προσθέτουμε τη ροπή αδράνειας της κάθε σφαίρας ως προς το σημείο M .

$$I_M = I_A + I_B + I_\Gamma = m(AM)^2 + m(BM)^2 + m(\Gamma M)^2 = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left[L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{mL^2}{4} + \frac{mL^2}{4} + \frac{3mL^2}{4} = \frac{5mL^2}{4}$$



Ερώτηση 40.

Ομογενής σφαίρα μάζας m και ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας είναι v_{cm} και η γωνιακή ταχύτητα

ω . Η ολική κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι $K_{ολ} = \frac{7}{10}mv_{cm}^2$. Η στροφορμή L της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι

α. $\frac{3}{5}m \cdot \frac{v_{cm}^2}{\omega}$.

β. $\frac{3}{5}m \cdot \frac{v_{cm}^2}{R}$.

γ. $\frac{2}{5}m \cdot \frac{v_{cm}^2}{\omega}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

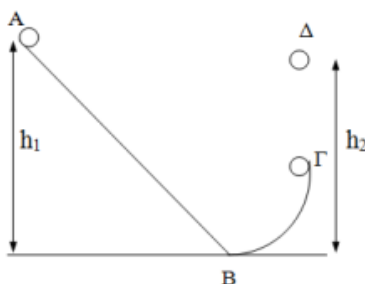
Η σφαίρα κάνει σύνθετη κίνηση, μεταφορική και περιστροφική. Η ολική κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι το άθροισμα της μεταφορικής και περιστροφικής κινητικής ενέργειας.

$$K_{ολ} = K_{\mu} + K_{\pi} \Rightarrow \frac{7}{10}mv_{cm}^2 = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow \frac{7}{10}mv_{cm}^2 - \frac{1}{2}mv_{cm}^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow \frac{2}{10}mv_{cm}^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{5}mv_{cm}^2 = I\omega \cdot \omega = L \cdot \omega \Rightarrow L = \frac{2}{5} \frac{mv_{cm}^2}{\omega}.$$

Ερώτηση 41.

Ένα μικρό δαχτυλίδι με τη μάζα του όλη συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του, αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί στο σημείο Α του κεκλιμένου επιπέδου του διπλανού σχήματος, κάνοντας κύλιση, χωρίς να ολισθαίνει και μόλις φτάσει στο σημείο Β εισέρχεται, χωρίς απώλεια ενέργειας, σε οδηγό σχήματος τεταρτημορίου, όπως στο σχήμα, συνεχίζοντας να κάνει κύλιση. Όταν φτάσει στο σημείο Γ, συνεχίζει την κίνησή του μέχρι το σημείο Δ, όπου σταματάει την άνοδό του. Εφαρμόζοντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Δ προκύπτει ότι το τελικό ύψος h_2 , που φτάνει στιγμιαία το δαχτυλίδι και το αρχικό ύψος h_1 , που το αφήσαμε συνδέονται με τη σχέση



α. $h_2 = h_1$.

β. $h_2 < h_1$.

γ. $h_2 > h_1$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η κίνησή του δαχτυλιδιού από το σημείο Α μέχρι το Γ είναι κύλιση, χωρίς ολίσθηση και χωρίς απώλειες ενέργειας. Από το Γ μέχρι το Δ η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη μεταφορική και ομαλή στροφική, καθώς η μόνη δύναμη που ασκείται είναι το βάρος, που δεν προκαλεί ροπή, αφού ασκείται στο κέντρο μάζας του δαχτυλιδιού. Στο σημείο Δ που σταματάει η άνοδος του σώματος, αυτό συνεχίζει να περιστρέφεται.

Η μηχανική ενέργεια του δαχτυλιδιού παραμένει σταθερή καθόλη τη διάρκεια της κίνησης.

Έτσι αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από τη θέση Α στη θέση Δ έχουμε

$$E_A = E_\Delta \Rightarrow mgh_1 = mgh_2 + K_\pi. \text{ (Θεωρήσαμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτήν του δαπέδου).}$$

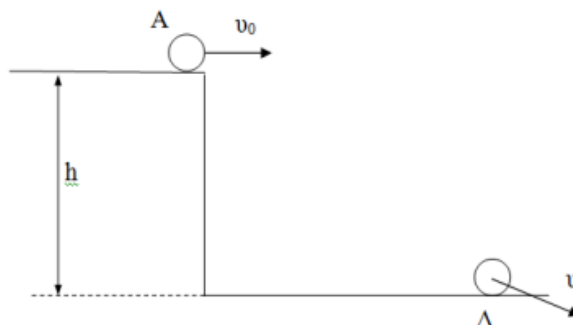
$$\text{Άρα } mgh_1 > mgh_2 \Rightarrow h_1 > h_2.$$

Ερώτηση 42.

Μία σφαίρα, κυλάει (χωρίς να ολισθαίνει) πάνω σε οριζόντιο τραπέζι ύψους h . Τη στιγμή που η σφαίρα εγκαταλείπει το τραπέζι ο λόγος της μεταφορικής κινητικής ενέργειας

προς την περιστροφική κινητική ενέργεια είναι ίσος με $\frac{K_{\text{μετ}}}{K_{\text{στρ}}} = \frac{5}{2}$. Ελάχιστα πριν η

σφαίρα κτυπήσει στο δάπεδο για το λόγο της μεταφορικής κινητικής ενέργειας προς την περιστροφική κινητική ενέργεια ισχύει



α. $\frac{K'_{\text{μετ}}}{K'_{\text{στρ}}} = \frac{5}{2}$.

β. $\frac{K'_{\text{μετ}}}{K'_{\text{στρ}}} < \frac{5}{2}$.

γ. $\frac{K'_{\text{μετ}}}{K'_{\text{στρ}}} > \frac{5}{2}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η κίνησή της σφαίρας είναι σύνθετη και αναλύεται σε μεταφορική και στροφική. Η μόνη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα είναι το βάρος, που δεν προκαλεί ροπή, αφού ασκείται στο κέντρο μάζας της σφαίρας. Έτσι λόγω του έργου του βάρους, η μεταφορική κινητική ενέργεια αυξάνεται $K'_{\text{μετ}} > K_{\text{μετ}}$, ενώ η περιστροφική παραμένει σταθερή, $K'_{\text{στρ}} = K_{\text{στρ}}$, αφού δεν υπάρχει έργο από ροπή.

$$K'_{\text{μετ}} > K_{\text{μετ}} \Rightarrow \frac{K'_{\text{μετ}}}{K_{\text{στρ}}} > \frac{K_{\text{μετ}}}{K_{\text{στρ}}} \Rightarrow \frac{K'_{\text{μετ}}}{K_{\text{στρ}}} > \frac{5}{2}$$

Ερώτηση 43.

Μία ομογενής ράβδος μήκους ℓ και μάζας m μπορεί να περιστραφεί στο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το άκρο της A , όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι

$I_A = \frac{1}{3} m\ell^2$. Η ράβδος ξεκινά από την οριζόντια θέση, χωρίς αρχική ταχύτητα και

περιστρέφεται κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού, με την ενέργεια που προσφέρει μια δύναμη F , που ασκείται στο άλλο της άκρο και είναι διαρκώς κάθετη στη ράβδο. Κάθε χρονική στιγμή ο λόγος της ισχύος της δύναμης προς το μέτρο της στροφορμής της ράβδου είναι σταθερός και ίσος με



α. $\frac{F}{2m\ell}$.

β. $\frac{F}{3m\ell^2}$.

γ. $\frac{3F}{m\ell}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Κάποια χρονική στιγμή η ράβδος θα έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω . Η ισχύς της δύναμης δίνεται από τη σχέση $P = \tau \cdot \omega$ και η στροφορμή της ράβδου $L = I \cdot \omega$.

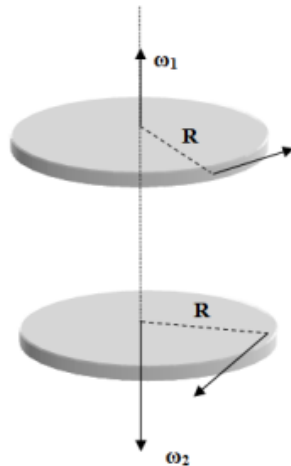
Έτσι, ο λόγος της ισχύος της δύναμης προς τη στροφορμή που αποκτά η ράβδος είναι

$$\frac{P}{L} = \frac{\tau \cdot \omega}{I \cdot \omega} = \frac{\tau}{I} = \frac{F \cdot \ell}{\frac{1}{3} m\ell^2} = \frac{3F}{m\ell}, \text{ που παρατηρούμε ότι είναι σταθερός, ανεξάρτητος του}$$

χρόνου.

Ερώτηση 44.

Δύο όμοιοι οριζόντιοι δίσκοι, ροπής αδράνειας I , περιστρέφονται αντίρροπα γύρω από κοινό κατακόρυφο άξονα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι γωνιακές τους ταχύτητες έχουν σχέση $\omega_1 = 2\omega_2$. Κάποια στιγμή οι δύο δίσκοι έρχονται σε επαφή και συνεχίζουν να περιστρέφονται σαν ένας δίσκος με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \omega_2 / 2$. Η απώλεια ενέργειας του συστήματος Q είναι



α. $Q = \frac{3}{5} I \cdot \omega_2^2$.

β. $Q = \frac{9}{4} I \cdot \omega_2^2$.

γ. $Q = \frac{3}{4} I \cdot \omega_2^2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η απώλεια ενέργειας του συστήματος Q είναι η διαφορά της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο δίσκων μείον την τελική. Η αρχική είναι:

$$K_{\text{αρχ}} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} I \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{2} I \cdot (2\omega_2)^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega_2^2 = \frac{5}{2} I \cdot \omega_2^2.$$

Η τελική κινητική ενέργεια είναι:

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} I_{\text{ολ}} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} (2I) \cdot \left(\frac{\omega_2}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} I \cdot \omega_2^2.$$

$$\text{Άρα } Q = K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}} = \frac{5}{2} I \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{4} I \cdot \omega_2^2 = \frac{9}{4} I \cdot \omega_2^2 \Rightarrow Q = \frac{9}{4} I \cdot \omega_2^2$$

Ερώτηση 45.

Μία ομογενής ράβδος μήκους ℓ και μάζας m μπορεί να περιστραφεί γύρω από οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το άκρο της Α, όπως φαίνεται στο σχήμα, ενώ στο άλλο της άκρο έχει κολλημένη μια σημειακή μάζα, ίδιας μάζας με τη ράβδο.

Το σύστημα ξεκινάει από την κατακόρυφη θέση, χωρίς αρχική ταχύτητα και περιστρέφεται κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος αποκτά μέγιστη τιμή ίση με



α. $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\max} = \frac{3}{2}mg\ell.$

β. $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\max} = \frac{1}{2}mg\ell.$

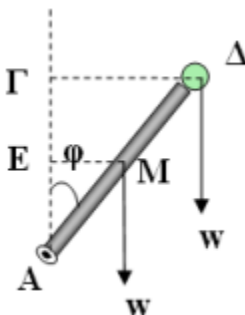
γ. $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\max} = \frac{5}{2}mg\ell.$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

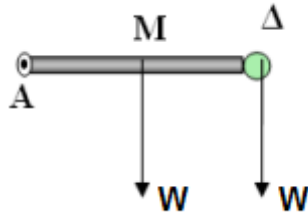
Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι η συνολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα. Όταν το σύστημα σχηματίζει τυχαία γωνία φ με την κατακόρυφο τότε οι μοχλοβραχίονες του βάρους των δύο σωμάτων είναι οι (ΓΔ) και (ΕΜ).



Το μέτρο της συνολικής ροπής είναι

$$\Sigma \tau = mg \cdot (EM) + mg \cdot (\Gamma \Delta) = mg \frac{\ell}{2} \eta \mu \varphi + mg \ell \eta \mu \varphi$$

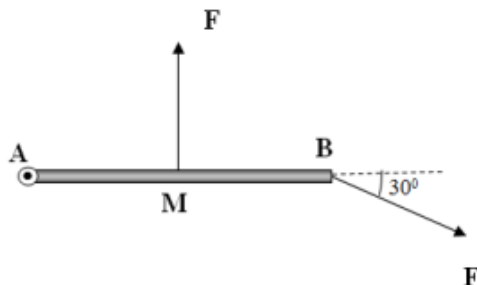
Παρατηρούμε ότι όσο κατεβαίνει η ράβδος η γωνία μεγαλώνει, το ίδιο και το $\eta \mu \varphi$, καθώς και η συνολική ροπή. Όταν η ράβδος γίνει οριζόντια μεγιστοποιείται το $\eta \mu \varphi$ και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής.



$$\text{Έτσι } \left(\frac{dL}{dt} \right)_{\max} = \Sigma \tau_{\max} = mg \frac{\ell}{2} + mg \ell \Rightarrow \left(\frac{dL}{dt} \right)_{\max} = \frac{3}{2} mg \ell.$$

Ερώτηση 46.

Μία ομογενής ράβδος μήκους ℓ που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α, βρίσκεται ακίνητη σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στη ράβδο ασκούνται ταυτόχρονα δύο οριζόντιες δυνάμεις F με το ίδιο μέτρο. Η μία δύναμη ασκείται στο κέντρο της ράβδου, ενώ η άλλη στο άκρο της, όπως στο σχήμα.



Η ράβδος θα

- περιστραφεί σε φορά όπως οι δείκτες του ρολογιού.
- περιστραφεί σε φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.
- παραμείνει ακίνητη.

$$\Deltaίνεται \eta\mu 30^{\circ} = \frac{1}{2}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

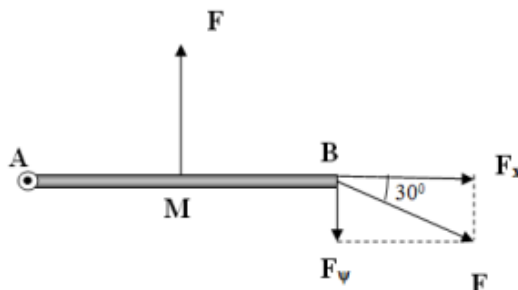
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Παίρνοντας ως θετική φορά την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, η συνολική ροπή των δύο δυνάμεων είναι:

$$\Sigma\tau = F \cdot (AM) - F_{\psi} \cdot (AB)$$

Η συνιστώσα F_x δεν έχει ροπή ως προς το σημείο Α.



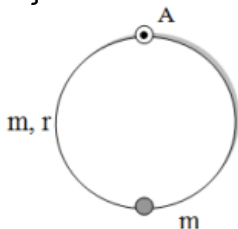
$$\text{Άρα } \Sigma\tau = F \frac{\ell}{2} - F\eta\mu 30^{\circ} \cdot \ell = F \frac{\ell}{2} - F \cdot \frac{\ell}{2} = 0.$$

Η ράβδος ήταν αρχικά ακίνητη και έτσι θα παραμείνει.

Ερώτηση 47.

Ένας ομογενής δίσκος μάζας m και ακτίνας r έχει κολλημένη σε σημείο της περιφέρειάς του μία σημειακή μάζα m , όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο A , που είναι αντιδιαμετρικό της σημειακής μάζας. Η ροπή αδράνειας δίσκου

μάζας m και ακτίνας r , ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο του είναι $I_{cm} = \frac{1}{2}mr^2$.



Η ροπή αδράνειας του συστήματος δίσκος - σημειακή μάζα, ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο A είναι

α. $\frac{5m \cdot r^2}{2}$.

β. $\frac{9m \cdot r^2}{4}$.

γ. $\frac{11m \cdot r^2}{2}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Για να βρούμε τη ροπή αδράνειας ενός συστήματος σωμάτων ως προς έναν άξονα προσθέτουμε τη ροπή αδράνειας του κάθε επιμέρους σώματος ως προς αυτόν τον άξονα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα προσθέσουμε τις ροπές αδράνειας του δίσκου και της σημειακής μάζας, ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο A .

Ο δίσκος σύμφωνα με το θεώρημα Steiner θα έχει

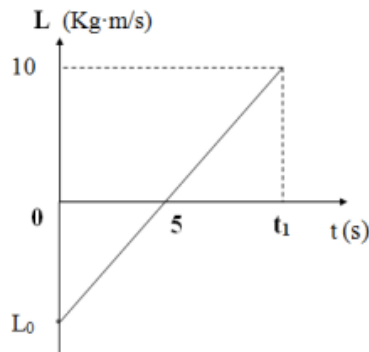
$$I_{\Delta,A} = I_{cm} + m \cdot r^2 = \frac{1}{2}m \cdot r^2 + m \cdot r^2 = \frac{3}{2}m \cdot r^2.$$

Άρα η συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι

$$I_A = I_{\Delta,A} + I_{m,A} = \frac{3}{2}m \cdot r^2 + m \cdot (2r)^2 = \frac{3}{2}m \cdot r^2 + 4m \cdot r^2 \Rightarrow I_A = \frac{11}{2}m \cdot r^2.$$

Ερώτηση 48.

Ένα στερεό σώμα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα. Το διάγραμμα που περιγράφει πώς μεταβάλλεται η στροφορμή του σώματος σε σχέση με το χρόνο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στο χρονικό διάστημα από 0 έως τη χρονική στιγμή t_1 , το συνολικό έργο των ροπών που ασκούνται στο στερεό σώμα είναι μηδέν.



Η αρχική στροφορμή του σώματος είναι

α. $L_0 = -10 \text{ Kg} \cdot \text{m/s}$

β. $L_0 = -20 \text{ Kg} \cdot \text{m/s}$

γ. $L_0 = -5 \text{ Kg} \cdot \text{m/s}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Εφόσον στο χρονικό διάστημα από 0 έως τη χρονική στιγμή t_1 , το συνολικό έργο των ροπών που ασκούνται στο στερεό σώμα είναι μηδέν, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος θα είναι επίσης μηδέν. Έστω ω_0 και ω η αρχική και η τελική γωνιακή ταχύτητά του τις χρονικές στιγμές 0 και t_1 . Σύμφωνα με το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας θα είναι

$$W = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = 0 \Rightarrow K_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} \Rightarrow \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot \omega_0^2 \Rightarrow \omega = \pm \omega_0. \quad (1)$$

Η αρχική στροφορμή του σώματος είναι $L_0 = I \cdot \omega_0$ και η τελική $L = I \cdot \omega = 10 \text{ Kg} \cdot \text{m/s}$, όπως φαίνεται από το διάγραμμα. Σύμφωνα με τη σχέση (1) θα είναι $L_0 = -L = -10 \text{ Kg} \cdot \text{m/s}$.

Ερώτηση 49.



Ο τροχός του σχήματος ακτίνας R κυλίνεται σε οριζόντιο επίπεδο. Τα σημεία A και Γ ανήκουν στην κατακόρυφη διάμετρο και απέχουν r από το κέντρο μάζας του τροχού. Αν ο λόγος των

μέτρων των ταχυτήτων των σημείων A και Γ , είναι $\frac{v_A}{v_\Gamma} = 3$, τότε ο

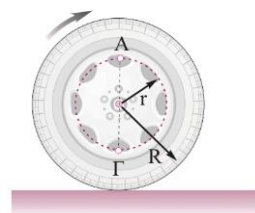
λόγος $\frac{r}{R}$ είναι

α. $1/2$.

β. $1/3$.

γ. $1/4$.

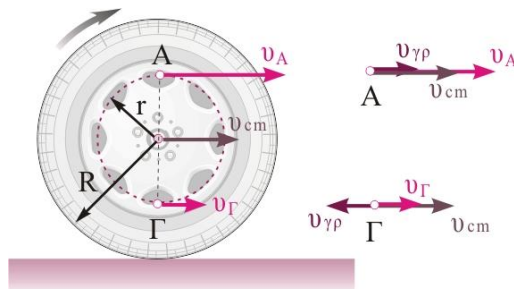
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.



Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα δύο ταχυτήτων. Την ταχύτητα v_{cm} λόγω μεταφοράς και την γραμμική ταχύτητα $v_{\gamma\rho}$ της οποίας το μέτρο εξαρτάται από την απόσταση r .



Για το σημείο A έχουμε: $v_A = v_{cm} + \omega r$, (1)

Για το σημείο Γ έχουμε: $v_\Gamma = v_{cm} - \omega r$, (2)

Ο τροχός κυλίνεται επομένως ισχύει $v_{cm} = \omega R$ ή $\omega = \frac{v_{cm}}{R}$, (3)

Αντικαθιστώντας την (3) στις (1),(2) παίρνουμε

$$v_A = v_{cm} + \frac{v_{cm}}{R} r \quad (4), \quad v_\Gamma = v_{cm} - \frac{v_{cm}}{R} r \quad (5)$$

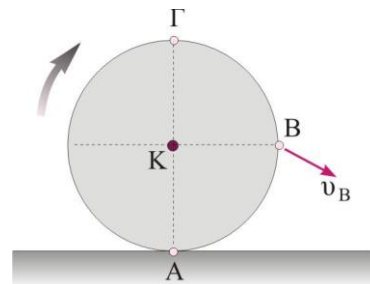
Από την εκφώνηση έχουμε

$$\frac{v_A}{v_\Gamma} = 3 \quad \text{ή} \quad \frac{v_{cm} + \frac{v_{cm}}{R} r}{v_{cm} - \frac{v_{cm}}{R} r} = 3 \quad \text{ή} \quad \frac{1 + \frac{r}{R}}{1 - \frac{r}{R}} = 3 \quad \text{ή} \quad \frac{R + r}{R - r} = 3 \quad \text{ή} \quad 4r = 2R \quad \text{ή} \quad \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$

Ερώτηση 50.

• Νέο

Ο κατακόρυφος τροχός του σχήματος κινείται στο οριζόντιο δάπεδο εκτελώντας μεταφορική και στροφική κίνηση (δεν κυλίστα). Κάποια στιγμή, που το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου του K είναι $v_{cm}=4\text{m/s}$, το μέτρο της ταχύτητας του σημείου B που απέχει R από το έδαφος είναι $v_B=5\text{m/s}$. Το μέτρο της ταχύτητας του σημείου A που είναι το σημείο επαφής του τροχού με το δάπεδο είναι



α. μηδέν

β. 1 m/s

γ. 3 m/s

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Κάθε σημείο του τροχού εκτελεί σύνθετη κίνηση και η ταχύτητά του είναι το διανυσματικό άθροισμα της μεταφορικής ταχύτητας του κέντρου μάζας v_{cm} και της γραμμικής $v_{\gamma\rho}$.

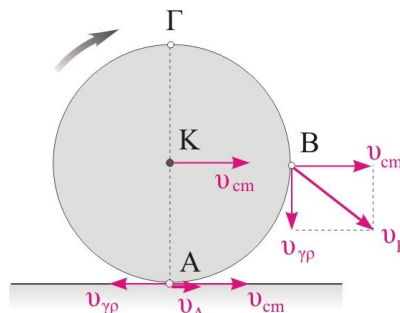
Για το σημείο B ισχύει

$$v_B = \sqrt{v_{\gamma\rho}^2 + v_{cm}^2} \quad \text{ή} \quad v_{\gamma\rho} = \sqrt{v_B^2 - v_{cm}^2} = \sqrt{5^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 4^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \quad \text{ή}$$

$$v_{\gamma\rho} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

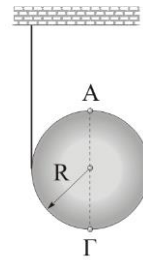
Για το σημείο A ισχύει

$$v_A = v_{cm} - v_{\gamma\rho} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{ή} \quad v_A = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Ερώτηση 51. **Νέο**

Η τροχαλία του σχήματος έχει τυλιγμένο στο αυλάκι της αβαρές και μη εκτατό νήμα του οποίου το άλλο άκρο είναι σταθερά δεμένο στην οροφή. Αφήνουμε το δίσκο ελεύθερο και αυτός κατέρχεται ενώ το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να γλιστρά στο αυλάκι του. Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων των σημείων Α και Γ που βρίσκονται στη κατακόρυφη διάμετρο του δίσκου είναι



α. 1/2.

β. 1.

γ. 2.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

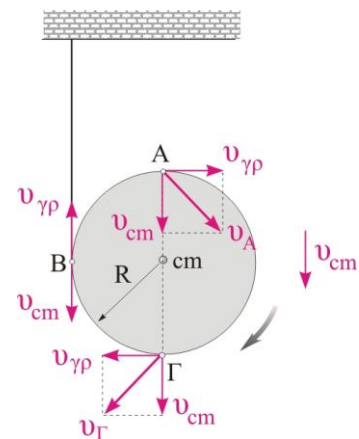
Σωστή απάντηση είναι η (β).

Καθώς το νήμα ξετυλίγεται, η τροχαλία εκτελεί μεταφορική και στροφική κίνηση

Η ταχύτητα κάθε σημείου του δίσκου είναι $\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho}$

Όπου $v_{\gamma\rho} = \omega R$

Οι επιμέρους ταχύτητες των σημείων Α και Γ είναι κάθετες μεταξύ τους.



Για το σημείο Α έχουμε:

$$v_A = \sqrt{v_{\gamma\rho}^2 + v_{cm}^2} = \sqrt{2v_{cm}^2} \quad \text{ή} \quad v_A = v_{cm} \sqrt{2}$$

Για το σημείο Γ:

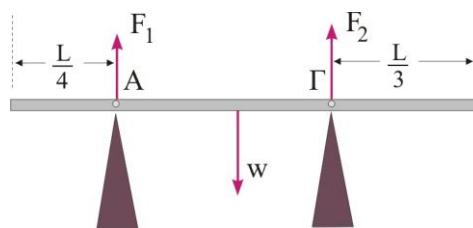
$$v_{\Gamma} = \sqrt{v_{\gamma\rho}^2 + v_{cm}^2} = \sqrt{2v_{cm}^2} \quad \text{ή} \quad v_{\Gamma} = v_{cm} \sqrt{2}$$

Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων των σημείων Α και Γ είναι $\frac{v_A}{v_{\Gamma}} = 1$

Ερώτηση 52.

• Νέο

Η ομογενής οριζόντια ράβδος μήκους L του σχήματος ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε δύο στηρίγματα στα σημεία Α και Γ. Τα στηρίγματα απέχουν από τις άκρες της ράβδου $L/4$ και $L/3$ αντίστοιχα. Ο λόγος των μέτρων των δυνάμεων $\frac{F_1}{F_2}$ που ασκούνται στη ράβδο από τα στηρίγματα είναι



α. $1/2$.

β. $2/3$.

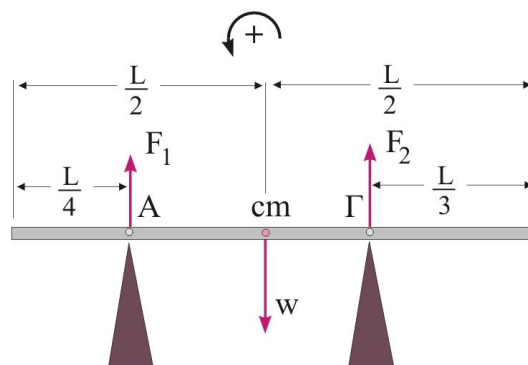
γ. $1/3$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η ράβδος ισορροπεί, επομένως το άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδέν. Επιλέγουμε το κέντρο μάζας της ράβδου.



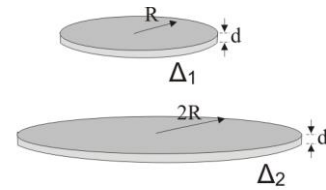
$$\Sigma \tau(\text{cm}) = 0 \quad \text{ή}$$

$$F_2 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) - F_1 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4} \right) = 0 \quad \text{ή}$$

$$F_2 \left(\frac{L}{6} \right) = F_1 \left(\frac{L}{4} \right) \quad \text{ή} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{2}{3}$$

Ερώτηση 53. **Νέο**

Η ροπή αδράνειας ενός δίσκου μάζας M και ακτίνας R ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του βρίσκεται από τη σχέση $I = MR^2/2$. Οι δίσκοι Δ_1, Δ_2 του σχήματος είναι ομογενείς, ίδιου πάχους d και φτιαγμένοι από το ίδιο υλικό. Ο δίσκος Δ_1 έχει ακτίνα R και ο Δ_2 ακτίνα $2R$. Αν η ροπή αδράνειας του δίσκου Δ_1 ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι I_1 , η αντίστοιχη ροπή αδράνειας του δίσκου Δ_2 είναι



α. $4I_1$.

β. $8I_1$.

γ. $16I_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η ροπή αδράνειας του δίσκου μάζας M_1 και ακτίνας R ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του δίνεται από τη σχέση $I_1 = \frac{M_1 R^2}{2}$

Η ροπή αδράνειας του δίσκου μάζας M_2 και ακτίνας $2R$ ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του δίνεται από τη σχέση

$$I_2 = \frac{M_2 (2R)^2}{2} \quad (1)$$

Πρέπει να βρούμε τη μάζα M_2 σε σχέση με τη μάζα M_1 .

Ο όγκος ενός δίσκου ακτίνας R και πάχους d δίνεται από τη σχέση $V = d \cdot A = d \cdot \pi R^2$

Οι δίσκοι Δ_1, Δ_2 του σχήματος είναι ομογενείς και φτιαγμένοι από το ίδιο υλικό επομένως έχουν ίδια πυκνότητα ρ .

$$\rho = \frac{M_1}{V_1} = \frac{M_2}{V_2} \quad \text{ή} \quad \frac{M_1}{d \cdot \pi R^2} = \frac{M_2}{d \cdot \pi (2R)^2} \quad \text{ή} \quad \frac{M_1}{R^2} = \frac{M_2}{4R^2} \quad \text{ή} \quad M_2 = 4M_1$$

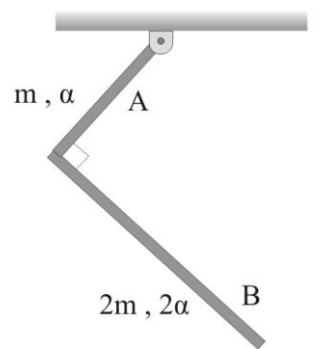
Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$I_2 = \frac{4M_1 (2R)^2}{2} = \frac{16M_1 R^2}{2} \quad \text{ή} \quad I_2 = 16I_1$$

Ερώτηση 54. **Νέο**

Η ροπή αδράνειας μιας ράβδου μάζας m και μήκους a ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδό της δίνεται από τη σχέση $I = ma^2/12$.

Δύο ομογενείς ράβδοι είναι φτιαγμένοι από το ίδιο υλικό και είναι ενωμένες ακλόνητα στην μια τους άκρη ώστε να σχηματίζουν ορθή γωνία. Η ράβδος Α έχει μάζα m και μήκος a . Η ράβδος Β έχει μάζα $2m$ και μήκος $2a$. Το σύστημα των ράβδων κρέμεται από μια άρθρωση που βρίσκεται σε οροφή. Η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από την άρθρωση είναι



α. $4ma^2$.

β. $5ma^2$.

γ. $6ma^2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

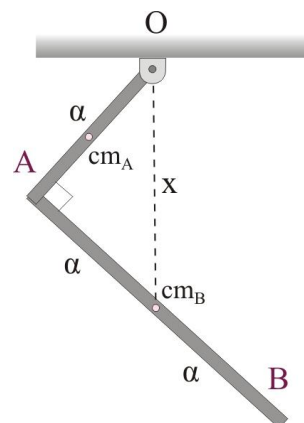
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η ροπή αδράνειας του συστήματος των ράβδων ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από την άρθρωση Ο δίνεται από τη σχέση

$$I_O = I_O^A + I_O^B, \quad (1)$$

Μας δίνεται ότι η ροπή αδράνειας μιας ράβδου μάζας m και μήκους a ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας και είναι κάθετος στο επίπεδό της δίνεται από τη σχέση $I = ma^2/12$. Επομένως θα εφαρμόσουμε το θεώρημα παραλλήλων αξόνων για να βρούμε τη ροπή αδράνειας κάθε ράβδου ως προς το Ο.



Εύρεση της ροπής αδράνειας της ράβδου Α ως προς το Ο.

$$I_O^A = I_{cm} + m \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4} \quad \text{ή} \quad I_O^A = \frac{ma^2}{3}$$

Εύρεση της ροπής αδράνειας της ράβδου Β ως προς το Ο

$$I_O^B = I_{cm} + 2m x^2 \quad \text{όπου} \quad x^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$$

Επομένως

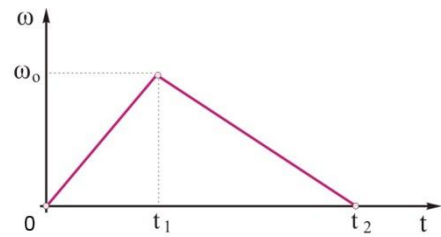
$$I_O^B = I_{cm} + 2m 2\alpha^2 = \frac{2m(2\alpha)^2}{12} + 4m\alpha^2 \quad \text{ή} \quad I_O^B = \frac{56m\alpha^2}{12}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε

$$I_O = I_O^A + I_O^B = \frac{m\alpha^2}{3} + \frac{56m\alpha^2}{12} = \frac{60m\alpha^2}{12} \quad \text{ή} \quad I_O = 5m\alpha^2$$

Ερώτηση 55. **Νέο**

Ένας οριζόντιος δίσκος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Για το χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = t_1 - 0$ ασκείται σε αυτόν ροπή μέτρου τ_1 και τη χρονική στιγμή t_1 , αυτή καταργείται και ασκείται μια δεύτερη ροπή με αποτέλεσμα τη χρονική στιγμή t_2 ο δίσκος να σταματήσει. Στο διπλανό σχήμα δείχνεται η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου σε σχέση με το χρόνο.



Ο δίσκος κατά το χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ εκτέλεσε διπλάσιο αριθμό στροφών σε σχέση με τις στροφές που εκτέλεσε κατά το χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = t_1 - 0$.

Ο λόγος των μέτρων των ροπών $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ είναι

- α. 2 β. $\frac{2}{3}$ γ. $\frac{3}{2}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

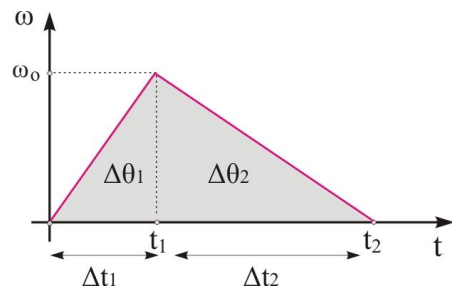
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Στο χρονικό διάστημα Δt_1 στον τροχό ασκείται η ροπή τ_1 και αυτός επιταχύνεται μέχρι να αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0 .

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση.

$$\tau_1 = I \cdot \alpha_{\gamma 1} \quad , \quad (1)$$



Στο χρονικό διάστημα Δt_2 στον τροχό ασκείται η ροπή τ_2 με αποτέλεσμα ο τροχός να επιβραδυνθεί μέχρι να σταματήσει.

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση.

$$\tau_2 = I \cdot |\alpha_{\gamma 2}| \quad , \quad (2)$$

Στο χρονικό διάστημα Δt_1 ο τροχός εκτέλεσε N_1 στροφές.

Στο χρονικό διάστημα Δt_2 ο τροχός εκτέλεσε N_2 στροφές.

$$N_2 = 2N_1 \text{ επομένως } \frac{\Delta\theta_2}{2\pi} = 2 \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \text{ ή } \Delta\theta_2 = 2\Delta\theta_1$$

Το εμβαδόν στο διάγραμμα ω - t αντιστοιχεί στο $\Delta\theta$. Επομένως

$$\Delta\theta_2 = 2\Delta\theta_1 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}\omega_0\Delta t_2 = 2\frac{1}{2}\omega_0\Delta t_1 \quad \text{ή} \quad \Delta t_2 = 2\Delta t_1$$

Τα μέτρα των γωνιακών επιταχύνσεων στα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα είναι

$$\alpha_{\gamma 1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t_1} = \frac{\omega_0}{\Delta t_1}, \quad |\alpha_{\gamma 2}| = \frac{|\Delta\omega|}{\Delta t_2} = \frac{\omega_0}{\Delta t_2} \quad \text{άρα} \quad \alpha_{\gamma 1} = 2|\alpha_{\gamma 2}|$$

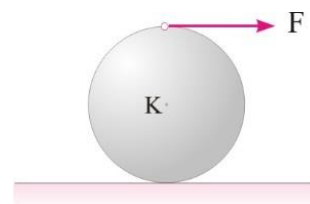
Διαιρώντας τις (1) , (2) κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{I \cdot \alpha_{\gamma 1}}{I \cdot |\alpha_{\gamma 2}|} \quad \text{ή} \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = 2$$

Ερώτηση 56.

• Νέο

Ο κατακόρυφος ομογενής δίσκος του σχήματος έχει μάζα m και ακτίνα R . Κάποια στιγμή ασκείται σε αυτόν οριζόντια εφαπτομενική σταθερή δύναμη μέτρου F , όπως στο σχήμα και αυτός αρχίζει να κυλάει. Αν δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I = mR^2/2$, η στατική τριβή που ασκείται σε αυτόν από το έδαφος



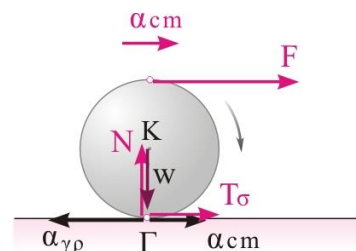
- α. έχει φορά προς τα δεξιά.
- β. έχει φορά προς τα αριστερά.
- γ. είναι μηδέν.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η στατική τριβή ασκείται στο σημείο του κυλίνδρου που βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος. Επομένως πρέπει να βρούμε προς τα που τείνει να κινηθεί το σημείο Γ του κυλίνδρου λόγω της δράσης όλων των άλλων δυνάμεων εκτός της στατικής τριβής, $T_{στ}$. Η $T_{στ}$ θα έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν που τείνει να κινηθεί το σημείο αυτό.



Το σημείο Γ θα αποκτήσει δύο επιταχύνσεις. Την a_{cm} του κέντρου μάζας και την γραμμική, $a_{\gamma\rho}$, λόγω της περιστροφής. Η κατεύθυνση της κίνησης του Γ θα καθοριστεί από τη συνισταμένη τους.

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση.

$$\Sigma F = m a_{cm} \quad \text{ή} \quad a_{cm} = \frac{F}{m}, \text{ προς τα δεξιά.}$$

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση.

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή} \quad FR = \frac{mR^2}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2F}{mR}$$

Η γραμμική επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας είναι

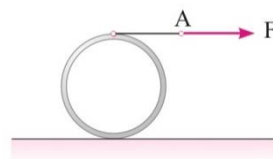
$$a_{\gamma\rho} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R = \frac{2F}{mR} \cdot R \quad \text{ή} \quad a_{\gamma\rho} = \frac{2F}{m}, \text{ προς τα αριστερά.}$$

Παρατηρούμε ότι $a_{\gamma\rho} = 2 a_{cm}$, άρα το σημείο Γ τείνει να κινηθεί προς τα αριστερά και η στατική τριβή ασκείται στο δίσκο έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Ερώτηση 57.



Ο δακτύλιος του σχήματος φέρει μικρή αύλακα στην οποία έχει τυλιχτεί λεπτό, αβαρές και μη εκτατό νήμα. Ασκούμε στο άκρο Α του νήματος οριζόντια δύναμη F και ο δακτύλιος κυλίνεται στο οριζόντιο δάπεδο χωρίς το νήμα να γλιστρά στην αύλακα. Το έδαφος ασκεί στο δακτύλιο στατική τριβή η οποία έχει



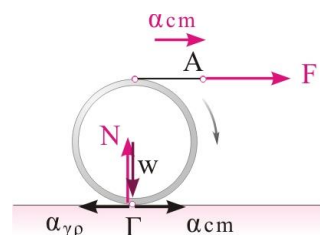
- α. κατεύθυνση προς τα δεξιά.
- β. κατεύθυνση προς τα αριστερά.
- γ. μέτρο ίσο με μηδέν.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Ο δακτύλιος είναι ένα ελεύθερο στερεό και θα περιστραφεί γύρω από τον άξονα συμμετρίας του, ενώ ταυτόχρονα θα μεταφερθεί προς τα δεξιά. Για να σχεδιάσουμε σωστά την κατεύθυνση της στατικής τριβής, T , θα βρούμε προς τα που τείνει να κινηθεί το σημείο Γ του δακτυλίου που είναι σε επαφή με το δάπεδο, λόγω της δράσης όλων των άλλων δυνάμεων εκτός της στατικής τριβής, $T_{στ}$. Η $T_{στ}$ θα έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν που τείνει να κινηθεί το σημείο αυτό.



Το σημείο Γ θα αποκτήσει δύο επιταχύνσεις. Την a_{cm} του κέντρου μάζας και την γραμμική, $a_{γρ}$, λόγω της περιστροφής. Η κατεύθυνση της κίνησης του Γ θα καθοριστεί από τη συνισταμένη τους.

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση.

$$\Sigma F = m a_{cm} \quad \text{ή} \quad a_{cm} = \frac{F}{m}, \text{ προς τα δεξιά.}$$

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση.

$$\Sigma \tau = I \alpha_{γων} \quad \text{ή} \quad FR = mR^2 \alpha_{γων} \quad \text{ή} \quad \alpha_{γων} = \frac{F}{mR}$$

Η γραμμική επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας είναι

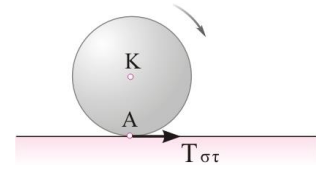
$$\alpha_{γρ} = \alpha_{γων} \cdot R = \frac{F}{mR} \cdot R \quad \text{ή} \quad \alpha_{γρ} = \frac{F}{m}, \text{ προς τα αριστερά.}$$

Παρατηρούμε ότι $a_{cm} = a_{γρ}$, άρα το σημείο Γ δεν τείνει να κινηθεί και επομένως δεν ασκείται στον δακτύλιο στατική τριβή.

Ερώτηση 58.



Ο κύλινδρος του σχήματος κυλίνεται δεξιόστροφα στο οριζόντιο δάπεδο. Στον κύλινδρο ασκούνται μια οριζόντια δύναμη, F , σταθερού μέτρου η οποία ασκείται στο κέντρο μάζας του και η στατική τριβή, $T_{στ}$, που ασκείται στο σημείο A του κυλίνδρου που βρίσκεται σε επαφή με το δάπεδο. Η στατική τριβή έχει φορά προς τα δεξιά. Η οριζόντια δύναμη, F , έχει φορά



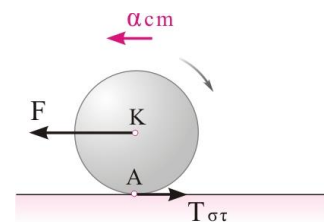
- α. προς τα αριστερά και μέτρο μικρότερο της $T_{στ}$.
- β. προς τα αριστερά και μέτρο μεγαλύτερο της $T_{στ}$.
- γ. προς τα δεξιά και μέτρο μικρότερο της $T_{στ}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας..

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β)

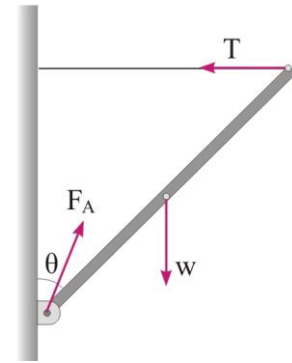
Παρατηρούμε ότι ο κύλινδρος στρέφεται όπως οι δείκτες του ρολογιού, ενώ η μόνη ροπή που του ασκείται από την $T_{στ}$ έχει αντίθετη φορά. Άρα, στροφικά η κίνηση του κυλίνδρου είναι επιβραδυνόμενη.



Αφού ο κύλινδρος κυλάει και μεταφορικά θα επιβραδύνεται. Επομένως η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτόν θα έχουν φορά προς τα αριστερά. Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει η οριζόντια δύναμη, F , να έχει φορά προς τα αριστερά και το μέτρο της να είναι μεγαλύτερο της $T_{στ}$.

Ερώτηση 59. **Νέο**

Η ομογενής ράβδος βάρους w του σχήματος στηρίζεται στην άρθρωση σχηματίζοντας γωνία $\theta = \pi/4$ με τον κατακόρυφο τοίχο και η άλλη άκρη είναι δεμένη μέσω οριζόντιου μη ελαστικού νήματος με τον τοίχο. Η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση έχει μέτρο



- α. $\frac{3w}{2}$.
β. $\frac{w}{2}$.
γ. $\frac{w\sqrt{5}}{2}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

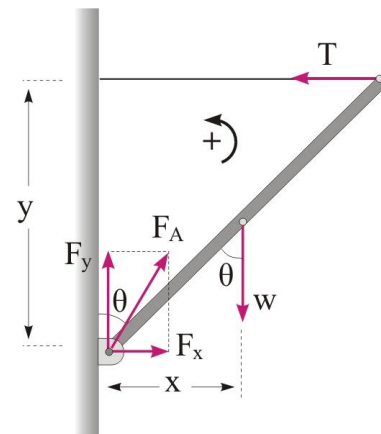
Σωστή απάντηση είναι η (γ)

Η ράβδος ισορροπεί. Αναλύουμε την F_A στους άξονες x και y παίρνουμε συνθήκη ισορροπίας σε κάθε άξονα ξεχωριστά.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad F_x = T, \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F_y = w, \quad (2)$$

Η συνισταμένη των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδέν.



Παίρνουμε $\Sigma \tau = 0$ ως προς την άρθρωση.

$$\Sigma \tau = 0 \quad \text{ή} \quad T \cdot y - w \cdot x = 0 \quad \text{ή} \quad T \cdot L \sin \frac{\pi}{4} - w \cdot \frac{L}{2} \cos \frac{\pi}{4} = 0 \quad \text{ή} \quad T = \frac{w}{2}$$

Η (1) γίνεται $F_x = \frac{w}{2}$

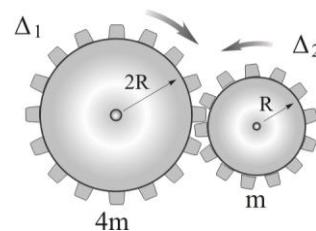
Το μέτρο της δύναμης στην άρθρωση είναι

$$F_A = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(\frac{w}{2}\right)^2 + w^2} = \sqrt{\frac{5w^2}{4}} \quad \text{ή} \quad F_A = w \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ερώτηση 60.

• Νέο

Οι δίσκοι Δ_1 , Δ_2 του σχήματος έχουν μάζες $m_1=4m$, $m_2=m$ και ακτίνες $R_1=2R$, $R_2=R$ αντίστοιχα. Οι δίσκοι φέρουν γρανάζια και μπορούν να στρέφονται χωρίς τριβές γύρω από σταθερούς παράλληλους άξονες. Αν δίνεται ότι η ροπή αδράνειας ενός δίσκου μάζας M και ακτίνας R ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του βρίσκεται από τη σχέση $I=MR^2/2$, ο λόγος των μέτρων των στροφορμών των δύο δίσκων ως προς τους άξονες περιστροφής τους είναι



α. 2.

β. 4.

γ. 8.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

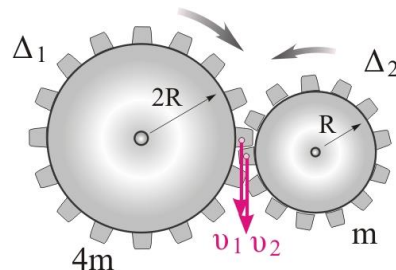
Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Το μέτρο της στροφορμής του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση

$$L = I\omega = \frac{MR^2}{2}\omega$$

Αφού τα γρανάζια των δίσκων 'κουμπώνουν' μεταξύ τους, οι γραμμικές ταχύτητές τους είναι ίδιες, επομένως

$$v_1 = v_2 \quad \text{ή} \quad \omega_1 2R = \omega_2 R \quad \text{ή} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}, \quad (1)$$



Ο λόγος των μέτρων των στροφορμών είναι

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\frac{M_1 R_1^2}{2} \omega_1}{\frac{M_2 R_2^2}{2} \omega_2} = \frac{M_1 R_1^2 \omega_1}{M_2 R_2^2 \omega_2} = \frac{4m \cdot (2R)^2 \omega_1}{m \cdot R^2 \omega_2} \xrightarrow{(1)} \frac{L_1}{L_2} = \frac{4m \cdot (2R)^2}{m \cdot R^2} \frac{1}{2} \quad \text{ή}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = 8$$

Ερώτηση 61. **Νέο**

Ένας δακτύλιος και ένας δίσκος ίδιας μάζας, ίδιας ακτίνας κατέρχονται κυλιόμενοι ένα πλάγιο επίπεδο. Οι ροπές αδράνειας των δύο σωμάτων ως προς τους άξονες

περιστροφής τους δίνονται από τις σχέσεις $I_{\text{Δακτυλίου}} = mR^2$, $I_{\text{Δίσκου}} = \frac{1}{2}mR^2$. Όταν τα δύο σώματα έχουν ίδια γωνιακή ταχύτητα, ω_0 , οι ολικές κινητικές τους ενέργειες συνδέονται με τη σχέση

α. $K_{\text{Δακτυλίου}} = \frac{4}{3} K_{\text{Δίσκου}}$

β. $K_{\text{Δακτυλίου}} = \frac{3}{4} K_{\text{Δίσκου}}$

γ. $K_{\text{Δακτυλίου}} = K_{\text{Δίσκου}}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

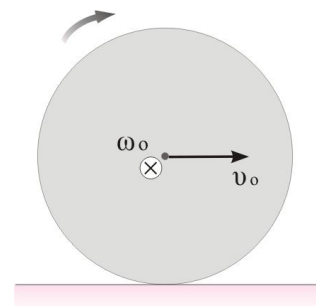
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η ολική κινητική ενέργεια ενός σώματος που κυλάει είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς και της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής και δίνεται από τη σχέση

$$K = K_{\text{μετ}} + K_{\text{στρ}} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

Όπου I είναι η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα περιστροφής του.



Για το δακτύλιο έχουμε

$$K_{\text{Δακτ}} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 \quad \text{ή} \quad K_{\text{Δακτ}} = mR^2\omega_0^2, \quad (1)$$

Για το δίσκο έχουμε

$$K_{\text{Δίσκ}} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2 \quad \text{ή} \quad K_{\text{Δίσκ}} = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2, \quad (2)$$

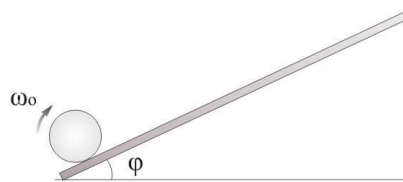
Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{K_{\text{Δακτ}}}{K_{\text{Δίσκ}}} = \frac{mR^2\omega_0^2}{\frac{3}{4}mR^2\omega_0^2} = \frac{4}{3} \quad \text{ή} \quad K_{\text{Δακτ}} = \frac{4}{3} K_{\text{Δίσκ}}$$

Ερώτηση 62.



Ένας δακτύλιος και ένας δίσκος ίδιας μάζας, ίδιας ακτίνας φθάνουν κυλιόμενοι στη βάση ενός πλάγιου επιπέδου με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω_0 και το ανέρχονται κυλιόμενοι. Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι διπλάσια από την αντίστοιχη του δίσκου.



Τα μέγιστα ύψη στα οποία φθάνουν τα δύο σώματα συνδέονται με τη σχέση

α. $h_{\max} (\text{Δακτυλίου}) > h_{\max} (\text{Δίσκου})$

β. $h_{\max} (\text{Δακτυλίου}) < h_{\max} (\text{Δίσκου})$

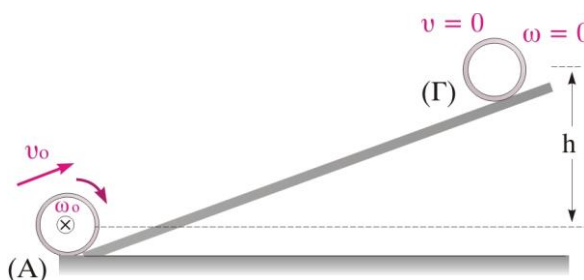
γ. $h_{\max} (\text{Δακτυλίου}) = h_{\max} (\text{Δίσκου})$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α)

Εφαρμόζουμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για ένα κυλιόμενο σώμα από τη βάση του επιπέδου (θέση Α), όπου το σώμα έχει κινητική ενέργεια μέχρι τη θέση (Γ), όπου σταματά στιγμιαία μετατρέποντας την κινητική του ενέργεια σε δυναμική.



$$E_{(A)} = E_{(\Gamma)} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = mgh_{\max}, \quad (1)$$

Έχουμε κύλιση, επομένως $\omega_0 = \frac{v_0}{R}$, (2)

Αντικαθιστώντας τη (2) στην (1) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_0^2}{R^2} = mgh_{\max} \quad \text{ή} \quad v_0^2\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = 2mgh_{\max} \quad \text{ή} \quad h_{\max} = \frac{v_0^2\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)}{2g}$$

Επειδή η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι διπλάσια από την αντίστοιχη του δίσκου σύμφωνα με την παραπάνω σχέση

$$h_{\max} (\text{Δακτυλίου}) > h_{\max} (\text{Δίσκου}).$$

Ερώτηση 63.



Ένας δακτύλιος και ένας ομογενής δίσκος περιστρέφονται γύρω από σταθερούς άξονες που διέρχονται από το κέντρο τους και είναι κάθετοι στο επίπεδό τους. Ο δακτύλιος και ο δίσκος έχουν την ίδια στροφορμή. Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι διπλάσια από αυτήν του δίσκου. Οι κινητικές ενέργειες των δύο σωμάτων συνδέονται με τη σχέση

α. $K_{\text{Δακτυλίου}} = K_{\text{Δίσκου}}$

β. $K_{\text{Δακτυλίου}} < K_{\text{Δίσκου}}$

γ. $K_{\text{Δακτυλίου}} > K_{\text{Δίσκου}}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β)

Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής δίνεται από τη σχέση

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{I^2 \omega^2}{I} \quad \text{ή} \quad K = \frac{L^2}{2I}$$

Για το δακτύλιο έχουμε: $K_{\text{ΔΑΚΤ}} = \frac{L_{\text{ΔΑΚΤ}}^2}{2I_{\text{ΔΑΚΤ}}}$

Για το δίσκο έχουμε: $K_{\text{ΔΙΣΚ}} = \frac{L_{\text{ΔΙΣΚ}}^2}{2I_{\text{ΔΙΣΚ}}}$

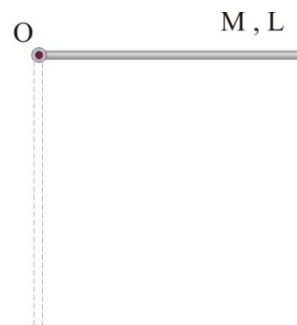
Ισχύει $L_{\text{ΔΙΣΚ}} = L_{\text{ΔΑΚΤ}} = L$. Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{K_{\text{ΔΑΚΤ}}}{K_{\text{ΔΙΣΚ}}} = \frac{\frac{L^2}{2I_{\text{ΔΑΚΤ}}}}{\frac{L^2}{2I_{\text{ΔΙΣΚ}}}} = \frac{I_{\text{ΔΙΣΚ}}}{I_{\text{ΔΑΚΤ}}} = \frac{1}{2} \quad \text{Άρα} \quad K_{\text{Δακτυλίου}} < K_{\text{Δίσκου}}$$

Ερώτηση 64.

• Νέο

Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μήκος L και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της O . Δίνονται η επιτάχυνση βαρύτητας g στην περιοχή και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το άκρο O , $I_O = ML^2/3$. Αφήνουμε τη ράβδο να κινηθεί από την οριζόντια θέση. Όταν γίνει κατακόρυφη, η γωνιακή της ταχύτητα ω θα έχει μέτρο



- α. $\sqrt{\frac{12g}{L}}$ β. $\sqrt{\frac{6g}{L}}$ γ. $\sqrt{\frac{3g}{L}}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

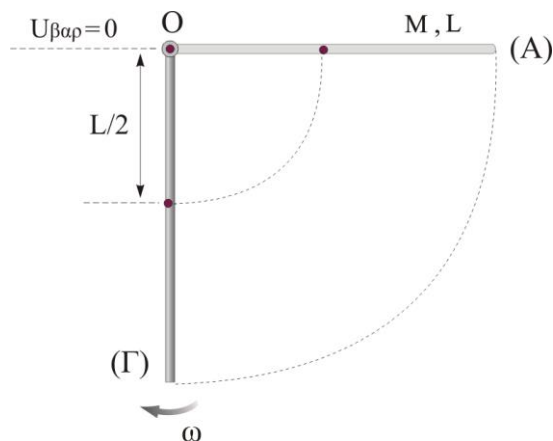
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ)

Εφαρμόζουμε τη διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τη ράβδο από τη στιγμή που η ράβδος αφήνεται ελεύθερη στην οριζόντια θέση (Α) μέχρι τη θέση (Γ), όπου αυτή γίνεται κατακόρυφη.

$$E_{(A)} = E_{(Γ)} \quad \text{ή} \quad 0 = -Mg \frac{L}{2} + \frac{1}{2} I_O \omega^2 \quad \text{ή}$$

$$Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \frac{ML^2}{3} \omega^2 \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$



Ερώτηση 65.



Ένας δακτύλιος και ένας ομογενής δίσκος περιστρέφονται γύρω από σταθερούς άξονες που διέρχονται από το κέντρο τους και είναι κάθετοι στο επίπεδό τους. Ο δακτύλιος και ο δίσκος έχουν την ίδια στροφορμή. Τη χρονική στιγμή $t=0$ ασκείται ταυτόχρονα και στα δύο στερεά η ίδια σταθερή ροπή με αποτέλεσμα μετά από κάποια χρονικά διαστήματα να σταματήσουν. Τα δύο χρονικά διαστήματα συνδέονται με τη σχέση

α. $\Delta t_{\text{Δακτυλίου}} = \Delta t_{\text{Δίσκου}}$

β. $\Delta t_{\text{Δακτυλίου}} > \Delta t_{\text{Δίσκου}}$

γ. $\Delta t_{\text{Δακτυλίου}} < \Delta t_{\text{Δίσκου}}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α)

Σύμφωνα με το 2^ο νόμο του Νεύτωνα, η ροπή που ασκείται στο στερεό ισούται με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του.

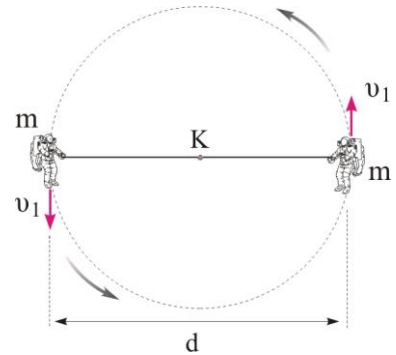
$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

Εφόσον τα δύο στερεά έχουν την ίδια στροφορμή ($L_{\text{αρχ}}=L$) και μετά από χρονικό διάστημα Δt σταματούν ($L_{\text{τελ}}=0$), θα έχουν την ίδια μεταβολή στη στροφορμή τους ($\Delta L=0-L$). Η ροπή τ που ασκείται σε αυτά είναι επιβραδύνουσα και σύμφωνα με την εκφώνηση έχει το ίδιο μέτρο, επομένως

$$\Delta t = \frac{|\Delta L|}{|\tau|}, \text{ άρα } \Delta t_{\text{Δακτυλίου}} = \Delta t_{\text{Δίσκου}}$$

Ερώτηση 66. **Νέο**

Δύο αστροναύτες μάζας m ο καθένας βρίσκονται στο διάστημα έξω από βαρυτικά πεδία και κρατώντας ένα αβαρές και μη εκτατό σχοινί μήκους d περιφέρονται γύρω από το κέντρο μάζας τους K με ταχύτητα μέτρου v_1 . Κάποια στιγμή, τραβούν το σχοινί ώστε η μεταξύ τους απόσταση να γίνει $d/2$, χωρίς να αλλάξει η θέση του κέντρου μάζας K . Το μέτρο, v_2 , της ταχύτητας με την οποία περιφέρονται οι αστροναύτες στην νέα τροχιά είναι



α. $v_2 = v_1$

β. $v_2 = 2v_1$

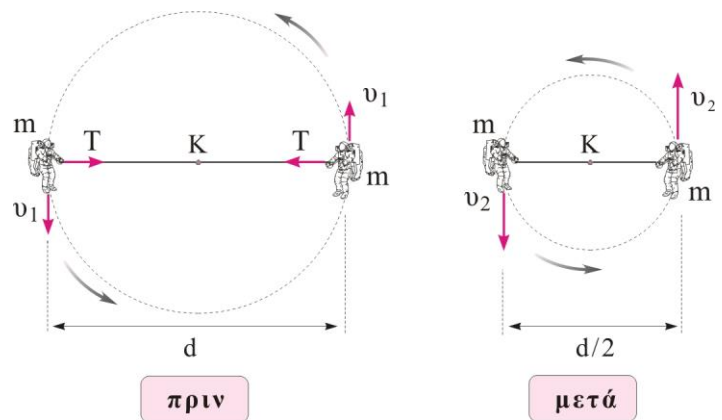
γ. $v_2 = 4v_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β)

Το σύστημα των αστροναυτών είναι μονωμένο (δεν ασκούνται σε αυτούς δυνάμεις από γειτονικά βαρυτικά πεδία) και οι φορείς των δυνάμεων που ασκούνται στο σχοινί όταν το τραβούν διέρχονται από το K , επομένως δεν ασκούνται ροπές στο σύστημα και μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της διατήρησης της στροφορμής ως προς το K .

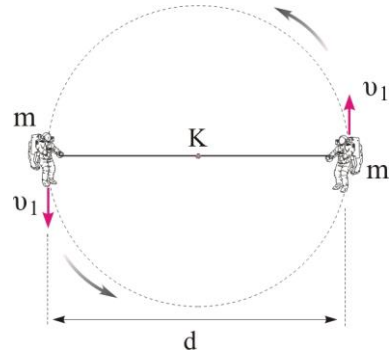


$$L_{\text{πριν}} = L_{\text{μετά}} \quad \text{ή}$$

$$mv_1 \frac{d}{2} + mv_1 \frac{d}{2} = mv_2 \frac{d}{4} + mv_2 \frac{d}{4} \quad \text{ή} \quad v_1 = \frac{v_2}{2}$$

Ερώτηση 67. **• Νέο**

Δύο αστροναύτες μάζας m ο καθένας βρίσκονται στο διάστημα έξω από βαρυτικά πεδία και κρατώντας ένα αβαρές και μη εκτατό σχοινί μήκους d περιφέρονται γύρω από το κέντρο μάζας τους K με ταχύτητα μέτρου u_1 . Κάποια στιγμή, τραβούν το σχοινί ώστε η μεταξύ τους απόσταση να γίνει $d/2$, χωρίς να αλλάξει η θέση του κέντρου μάζας K . Το σύστημα των δύο αστροναυτών αύξησε την κινητική του ενέργεια κατά



α. $\frac{3}{2}mu_1^2$

β. $3mu_1^2$

γ. $\frac{3}{8}mu_1^2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β)

Το σύστημα των αστροναυτών είναι μονωμένο και οι φορείς των δυνάμεων που ασκούνται στο σχοινί όταν το τραβούν διέρχονται από το K , επομένως δεν ασκούνται ροπές στο σύστημα και μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της διατήρησης της στροφορμής ως προς το K .

$$L_{\text{πριν}} = L_{\text{μετα}} \quad \text{ή} \quad mu_1 \frac{d}{2} + mu_1 \frac{d}{2} = mu_2 \frac{d}{4} + mu_2 \frac{d}{4} \quad \text{ή} \quad u_2 = 2u_1$$

Το σύστημα των δύο αστροναυτών πριν το τράβηγμα του σχοινιού έχει ολική ενέργεια

$$K_{\text{πριν}} = 2 \cdot \frac{1}{2} mu_1^2 = mu_1^2$$

Το σύστημα των δύο αστροναυτών μετά το τράβηγμα του σχοινιού έχει ολική ενέργεια

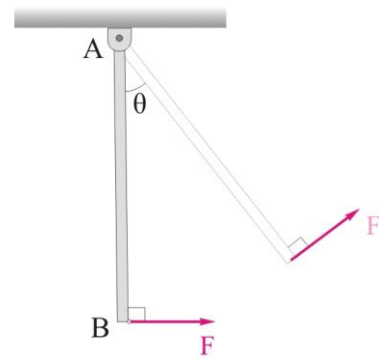
$$K_{\text{μετα}} = 2 \cdot \frac{1}{2} mu_2^2 \xrightarrow{(1)} K_{\text{μετα}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m(2u_1)^2 = 4mu_1^2$$

Το σύστημα των δύο αστροναυτών αύξησε την κινητική του ενέργεια κατά

$$\Delta K = 4mu_1^2 - mu_1^2 = 3mu_1^2$$

Ερώτηση 68. **Νέο**

Η ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M του σχήματος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A . Ασκούμε στο άλλο της άκρο B δύναμη μέτρου $F=Mg/4$ η οποία είναι συνέχεια κάθετη στη ράβδο και την αναγκάζει να στραφεί. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι μηδενικός όταν η γωνία θ είναι



α. 30° .

β. 60° .

γ. 90° .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

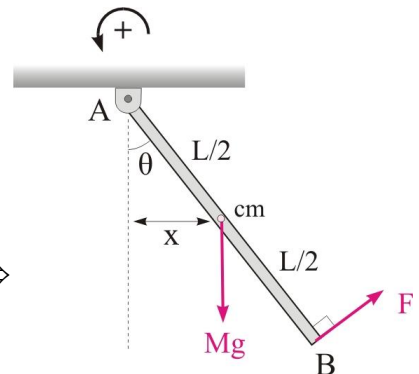
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το A ισούται με τη συνισταμένη των ροπών ως προς τον άξονα αυτόν. Επομένως όταν ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου είναι μηδενικός ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F \cdot L - Mg x = 0 \Rightarrow F \cdot L - Mg \frac{L}{2} \eta \mu \theta = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{MgL}{4} - Mg \frac{L}{2} \eta \mu \theta = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \eta \mu \theta \Rightarrow \theta = 30^\circ$$



Ερώτηση 69.



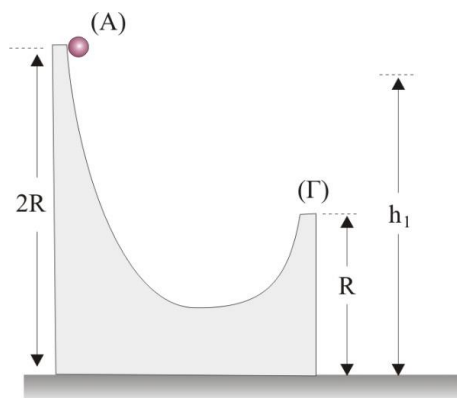
Το σφαιρίδιο του σχήματος αφήνεται στη θέση (Α) ενός καμπύλου οδηγού που απέχει κατακόρυφα $h=2R$ από το οριζόντιο δάπεδο. Το σφαιρίδιο αρχικά κατέρχεται κυλιόμενο, στη συνέχεια ανέρχεται κυλιόμενο και εγκαταλείπει τον οδηγό στη θέση (Γ), που βρίσκεται σε ύψος R από το οριζόντιο δάπεδο. Το σφαιρίδιο κινούμενο κατακόρυφα φτάνει σε μέγιστο ύψος h_1 από το οριζόντιο δάπεδο. Αν γνωρίζουμε ότι στη διάρκεια της κύλισης η $K_{\sigma\tau\rho}$ και $K_{\mu\epsilon\tau}$ συνδέονται με την σχέση

$$\frac{K_{\sigma\tau\rho}}{K_{\mu\epsilon\tau}} = \frac{2}{5}, \text{ τότε το ύψος } h_1 \text{ είναι ίσο με}$$

α. $h_1 = 2R$

β. $h_1 = \frac{12R}{7}$

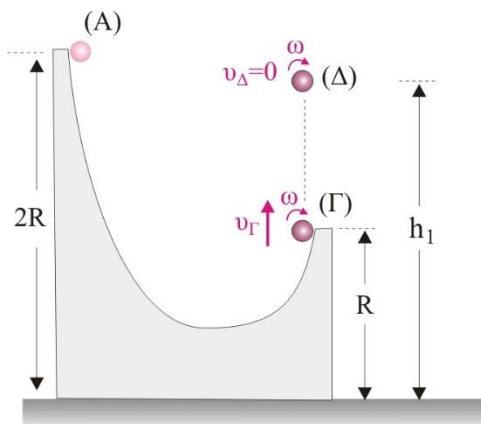
γ. $h_1 = \frac{10R}{7}$



Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Το σφαιρίδιο αφήνεται ελεύθερο από τη θέση (Α) και κυλά στην επιφάνεια εκτελώντας σύνθετη κίνηση με αποτέλεσμα όταν φεύγει από τη θέση (Γ) να έχει μεταφορική και γωνιακή ταχύτητα. Από τη θέση (Γ) μέχρι το μέγιστο ύψος (θέση Δ) ασκείται σε αυτό μόνο το βάρος του που δεν προκαλεί ροπή, με αποτέλεσμα η γωνιακή του ταχύτητα να παραμένει σταθερή. Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ δίνει:



$$U_A = U_\Gamma + K_{\mu\epsilon\tau(\Gamma)} + K_{\sigma\tau\rho(\Gamma)} \Rightarrow mg2R = mgR + K_{\mu\epsilon\tau(\Gamma)} + \frac{2}{5}K_{\mu\epsilon\tau(\Gamma)} \Rightarrow$$

$$K_{\mu\epsilon\tau(\Gamma)} = \frac{5}{7}mgR \text{ και } K_{\sigma\tau\rho(\Gamma)} = \frac{2}{7}mgR$$

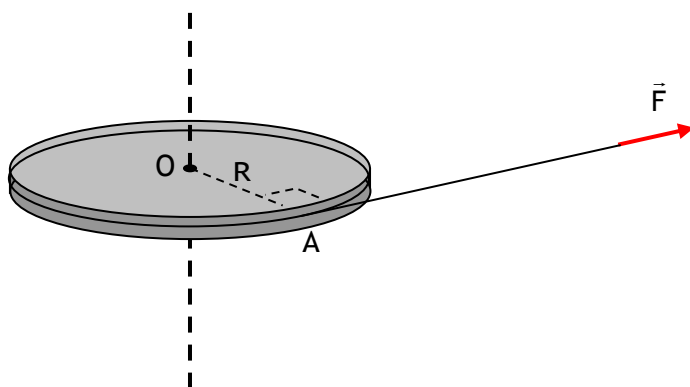
Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Γ και Δ δίνει:

$$U_\Gamma + K_{\mu\epsilon\tau(\Gamma)} + K_{\sigma\tau\rho(\Gamma)} = mgh_1 + K_{\sigma\tau\rho(\Delta)} \Rightarrow mgR + \frac{5}{7}mgR = mgh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{12}{7}R.$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ο ομογενής και ισοπαχής δίσκος του σχήματος έχει ακτίνα $R=10\text{ cm}$ και μάζα $M=2\text{ kg}$, είναι οριζόντιος και μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος και στην περιφέρειά του είναι τυλιγμένο αβαρές, μη εκτατό σχοινί μήκους $\ell=4\text{ m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ ασκούμε στην ελεύθερη άκρη του σχοινιού σταθερή, οριζόντια δύναμη $F=2\text{ N}$ και ο δίσκος ξεκινά να περιστρέφεται. Το σχοινί δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του δίσκου.



Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ του δίσκου.

β) τη χρονική στιγμή t_1 που ξετυλίγεται όλο το σχοινί.

γ) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του δίσκου τη στιγμή κατά την οποία έχει ξετυλιχθεί όλο το σχοινί.

δ) το έργο της δύναμης στη διάρκεια του δεύτερου δευτερολέπτου της κίνησης.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του: $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Λύση

α) (βλ. σελίδα 119 του Σχολικού Βιβλίου)

Από το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης έχουμε:

$$\Sigma\tau = I \cdot a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{\Sigma\tau}{I} \Rightarrow a_\gamma = \frac{F \cdot R}{\frac{1}{2}MR^2} \Rightarrow$$

$$a_{\gamma} = \frac{2F}{MR} = \frac{2 \cdot 2N}{2kg \cdot 0,1m} \Rightarrow a_{\gamma} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

β) Επειδή το σχοινί δεν ολισθαίνει στο δίσκο το μήκος του ℓ είναι ίσο με το μήκος του τόξου s που διαγράφει ένα σημείο του δίσκου. Έτσι, από τον τύπο $s = \theta \cdot R$ βρίσκουμε τη γωνία στροφής μέχρι να ξετυλιχθεί όλο το σχοινί:

$$s = \theta_1 \cdot R \Rightarrow \theta_1 = \frac{s}{R} = \frac{4m}{0,1m} \Rightarrow \theta_1 = 40 \text{ rad}$$

Επειδή a_{γ} = σταθ., ο δίσκος θα εκτελέσει ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση, μέχρι να ξετυλιχθεί όλο το νήμα. Επομένως ισχύει:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\omega} t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2\theta_1}{a_{\gamma\omega\omega}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40\text{rad}}{20\text{rad/s}^2}} \Rightarrow t_1 = 2\text{s}$$

γ) Για την ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση του δίσκου ισχύει:

$$\omega_1 = a_{\gamma\omega\omega} t_1 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{s} \Rightarrow \omega_1 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Μόλις ξετυλιχθεί όλο το σχοινί καταργείται η δύναμη F , επομένως δεν ασκείται, πλέον, ροπή στο δίσκο. Επομένως, από τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\text{s}$ και μετά, ο δίσκος θα εκτελέσει ομαλή στροφική κίνηση με τη σταθερή γωνιακή ταχύτητα που έχει αποκτήσει. Άρα, μετά το ξετύλιγμα του σχοινιού, η γωνιακή ταχύτητα έχει σταθερό μέτρο:

$$\omega_1 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

δ) Το έργο της δύναμης στη διάρκεια του δεύτερου δευτερολέπτου της κίνησης βρίσκεται με εφαρμογή του θεωρήματος έργου - ενέργειας στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

$$W_F = \frac{1}{2} I \omega_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2} I \omega_{\text{αρχ}}^2 \quad (1)$$

Όπου, το $\omega_{\text{αρχ}}$ δηλώνει τη γωνιακή ταχύτητα στην αρχή του δεύτερου δευτερολέπτου (που συμπίπτει με το τέλος του πρώτου) και το $\omega_{\text{τελ}}$ δηλώνει τη γωνιακή ταχύτητα στο τέλος του δεύτερου δευτερολέπτου $\omega_{\text{τελ}} = \omega_1 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$

$$\text{Για το } \omega_{\text{αρχ}} \text{ ισχύει: } \omega_{\text{αρχ}} = a_{\gamma} \cdot t = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 1\text{s} \Rightarrow \omega_{\text{αρχ}} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

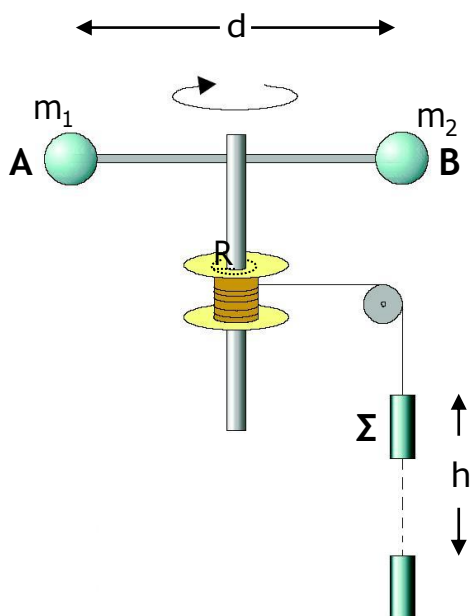
Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$W_F = \frac{1}{2} I (\omega_{\text{τελ}}^2 - \omega_{\text{αρχ}}^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 (\omega_{\text{τελ}}^2 - \omega_{\text{αρχ}}^2) \Rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{4} 2\text{kg} \cdot (0,1\text{m})^2 ((40\text{rad/s})^2 - (20\text{rad/s})^2) \Rightarrow W_F = 6\text{J}$$

Άσκηση 2.

Η οριζόντια και ομογενής ράβδος AB του σχήματος έχει μήκος $d = 2 \text{ m}$ μάζα $M = 3 \text{ kg}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο σωλήνα που περνά από το κέντρο της. Στο σωλήνα έχει προσαρμοστεί, σταθερά, ένας μικρός κύλινδρος ακτίνας $R = 0,1 \text{ m}$. Γύρω από τον κύλινδρο είναι τυλιγμένο πολλές φορές λεπτό νήμα, στην ελεύθερη άκρη του οποίου αναρτάται, μέσω τροχαλίας, ένα σώμα Σ . Στα άκρα A και B της ράβδου έχουν στερεωθεί δύο μικρές σφαίρες με μάζες $m_1 = 1 \text{ kg}$ και $m_2 = 2 \text{ kg}$ αντίστοιχα. Ο σωλήνας, ο κύλινδρος, η τροχαλία και το νήμα θεωρούνται αβαρή. Το νήμα δεν ολισθαίνει στον κύλινδρο.



Αρχικά όλη η διάταξη είναι ακίνητη. Τη στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα Σ αφήνεται να κινηθεί και η ράβδος ξεκινά να περιστρέφεται. Το νήμα ασκεί στον κύλινδρο σταθερή ροπή μέτρου $\tau = 16 \text{ Nm}$.

Να βρείτε:

- Τη συνολική ροπή αδράνειας $I_{\text{ολ}}$ του συστήματος της ράβδου και των δύο σφαιριδίων ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου.
- Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ του παραπάνω συστήματος.
- Το ύψος h κατά το οποίο έχει κατέλθει το σώμα Σ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = \sqrt{10\pi} \text{ s}$.
- Τον αριθμό των περιστροφών $N_{\text{στρ}}$ της ράβδου στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της

$$I = \frac{1}{12} M d^2, \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Λύση

α) Η συνολική ροπή αδράνειας ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ροπών αδράνειας της ράβδου AB, του σφαιριδίου A και του σφαιριδίου B ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου:

$$I_{\text{ολ}} = \frac{1}{12} M d^2 + m_1 \left(\frac{d}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{d}{2} \right)^2 \Rightarrow I_{\text{ολ}} = \frac{1}{12} \cdot 3\text{kg} \cdot (2\text{m})^2 + 1\text{kg} \cdot (1\text{m})^2 + 2 \cdot (1\text{m})^2 \Rightarrow$$

$$I_{\text{ολ}} = 4 \text{ kgm}^2$$

β) Η μόνη ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι η ροπή της τάσης του νήματος. Ο κύλινδρος και ο σωλήνας είναι αβαρή, άρα δεν έχουν ροπή αδράνειας. Από το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για το σύστημα ράβδου - σφαιριδίων, έχουμε:

$$\Sigma \tau = I_{\text{ολ}} a_{\gamma} \Rightarrow a_{\gamma} = \frac{\Sigma \tau}{I_{\text{ολ}}} = \frac{16 \text{ Nm}}{4 \text{ kgm}^2} \Rightarrow a_{\gamma} = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

γ) Το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στον κύλινδρο, έτσι όταν ο κύλινδρος στραφεί κατά γωνία $\Delta\theta$, θα ξετυλιχτεί νήμα μήκους $\Delta s = R \cdot \Delta\theta$ και το σώμα Σ θα κατέβει κατά $\Delta h = \Delta s$. Άρα έχουμε $\Delta h = R \cdot \Delta\theta$. Διαιρώντας 1^ο και 2^ο μέλος με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt που απαιτήθηκε για την παραπάνω μεταβολή παίρνουμε:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = R \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow v = R \cdot \omega,$$

όπου v συμβολίζει την ταχύτητα με την οποία κατέρχεται το σώμα Σ.

Παίρνοντας ρυθμούς μεταβολής της τελευταίας σχέσης προκύπτει:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = R \cdot a_{\gamma}$$

όπου α συμβολίζει την επιτάχυνση με την οποία κατέρχεται το σώμα Σ.

Με αντικατάσταση στην τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\alpha = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,1\text{m} \Rightarrow \alpha = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Από την ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση του Σ έχουμε:

$$h = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (\sqrt{10\pi} \text{ s})^2 \Rightarrow h = 2\pi \text{ m}$$

δ) Από την ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση του συστήματος ράβδου - σφαιριδίων έχουμε:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_\gamma t_1^2 \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} (\sqrt{10\pi} \text{ s})^2 \Rightarrow \theta_1 = 20\pi \text{ rad}$$

Για τον αριθμό περιστροφών ισχύει:

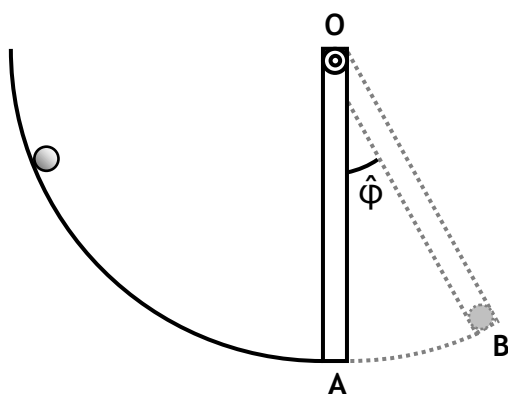
$$N_{\text{σπ}} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N_{\text{σπ}} = \frac{20\pi}{2\pi} \frac{\text{rad}}{\text{rad} / \text{στροφ.}} \Rightarrow N_{\text{σπ}} = 10 \text{ στροφές.}$$

Εναλλακτικά, η γωνία στροφής θ_1 θα μπορούσε να υπολογισθεί από το τόξο στροφής $s = \theta_1 \cdot R$, με δεδομένο ότι το μήκος του νήματος s που ξετυλίχθηκε ισούται με το ύψος h κατά το οποίο μετακινήθηκε το σώμα Σ:

$$h = \theta_1 \cdot R \Rightarrow \theta_1 = 20\pi \text{ rad}.$$

Άσκηση 3.

Μια λεπτή ομογενής ράβδος μήκους $L=0,3\text{ m}$ και μάζας $m=1\text{ kg}$ μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα, που περνά από το άκρο της O , όπως στο σχήμα. Η ράβδος ισορροπεί ακίνητη στη θέση OA . Ένα μικρό σφαιρίδιο μάζας $m=1\text{ kg}$ αφήνεται να κινηθεί εντός τεταρτοκυκλίου που έχει κέντρο του το σημείο O και συναντά τη ράβδο στο σημείο A , έχοντας ταχύτητα μέτρου $v=2\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Το σφαιρίδιο συγκρούεται με τη ράβδο και προσκολλάται στο άκρο της A δημιουργώντας το σύστημα ράβδος - σφαιρίδιο το οποίο έχει ροπή αδράνειας που δίνεται από τη σχέση $I=\frac{4}{3}mL^2$. Το σύστημα ράβδος - σφαιρίδιο ξεκινά να περιστρέφεται γύρω από το άκρο O της ράβδου.



Να βρείτε:

- Τη ροπή αδράνειας I_p του συστήματος ράβδος - σφαιρίδιο, ως προς τον άξονα περιστροφής που περνά από το άκρο O .
- Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του συστήματος ράβδος - σφαιρίδιο αμέσως μετά την κρούση.
- Τη μείωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης.
- Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος - σφαιρίδιο $\frac{dL}{dt}$ όταν διέρχεται από τη θέση OB , η οποία σχηματίζει γωνία $\hat{\phi}=30^\circ$ με την αρχική της θέση.

Δίνονται: $g=10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και $\eta\mu 30^\circ=0,5$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Λύση

α) Η ροπή αδράνειας του συσσωματώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του ισούται με το άθροισμα των ροπών αδράνειας της ράβδου I_p και του σφαιριδίου $I_{\sigma\phi}$ ως προς τον ίδιο άξονα: $I = I_p + I_{\sigma\phi}$.

Με αντικατάσταση, έχουμε:

$$I = I_p + I_{\sigma\phi} \Rightarrow \frac{4}{3}mL^2 = I_p + mL^2 \Rightarrow I_p = \frac{1}{3}mL^2 \Rightarrow I_p = \frac{1}{3}1kg \cdot (0,3m)^2 \Rightarrow I_p = 0,03 kgm^2$$

β) (βλ. σελίδα 124 του Σχολικού Βιβλίου)

Στη θέση Α οι φορείς τόσο του βάρους του σφαιριδίου όσο και του βάρους της ράβδου διέρχονται από τον άξονα περιστροφής άρα έχουν μηδενική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο Ο. Άρα η στροφορμή διατηρείται.

Με αντικατάσταση, στη μαθηματική σχέση της διατήρησης της στροφορμής έχουμε:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow mvL = I\omega \Rightarrow mvL = \frac{4}{3}mL^2\omega \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{3}{4L}v = \frac{3}{4 \cdot 0,3m} \cdot 2 \frac{m}{s} \Rightarrow \omega = 5 \frac{rad}{s}$$

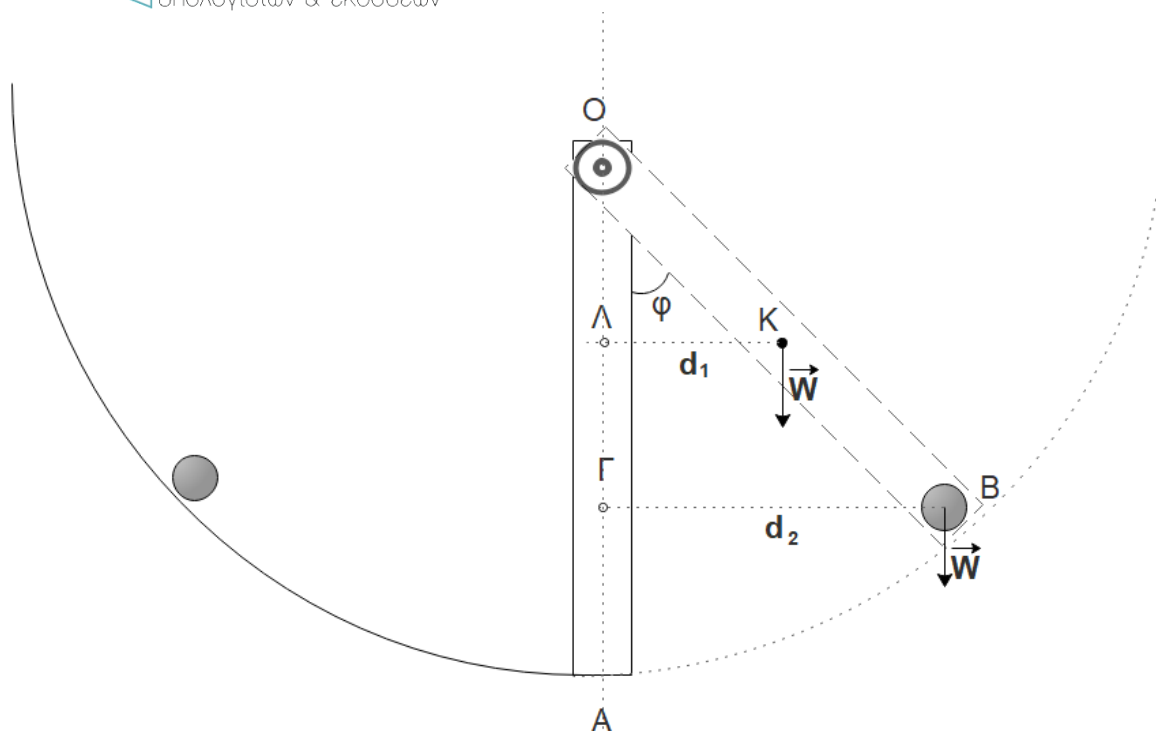
γ) Η μείωση της μηχανικής ενέργειας οφείλεται μόνο στην μείωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος

$$|\Delta E_{\mu\eta\chi}| = |\Delta K| = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow$$

$$|\Delta E_{\mu\eta\chi}| = \frac{1}{2}1kg \cdot \left(2 \frac{m}{s}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}1kg \cdot (0,3m)^2 \cdot \left(5 \frac{rad}{s}\right)^2 \Rightarrow$$

$$|\Delta E_{\mu\eta\chi}| = 2J - 1,5J \Rightarrow |\Delta E_{\mu\eta\chi}| = 0,5J$$

δ)



Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος- σφαιρίδιο $\frac{dL}{dt}$ στη θέση OB ισούται με τη συνολική ροπή που δέχεται το συσσωμάτωμα στην ίδια θέση:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \Rightarrow \frac{dL}{dt} = w \cdot d_1 + w \cdot d_2 \Rightarrow \frac{dL}{dt} = mg(d_1 + d_2)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΒ έχουμε:

$$\eta \mu \hat{\phi} = \frac{d_2}{L} \Rightarrow d_2 = 0,3\text{m} \cdot 0,5 \Rightarrow d_2 = 0,15\text{ m}$$

Επίσης, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΛΚ:

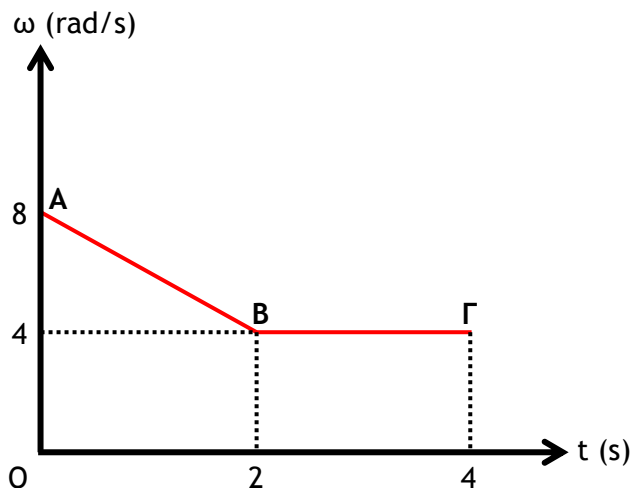
$$\eta \mu \hat{\phi} = \frac{d_1}{(OK)} \Rightarrow d_1 = \frac{0,3\text{m}}{2} \cdot 0,5 \Rightarrow d_1 = 0,075\text{ m}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $\frac{dL}{dt} = mg(d_1 + d_2)$ έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = mg(d_1 + d_2) = 1\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (0,075\text{m} + 0,15\text{m}) \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 2,25 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

Άσκηση 4.

Ένα στερεό Σ περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα ως προς τον οποίο παρουσιάζει ροπή αδράνειας $I = 0,2 \text{ kgm}^2$. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας του στερεού Σ ως προς το χρόνο δίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί:



Να βρείτε:

- την αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1 \text{ s}$ και $t_3 = 3 \text{ s}$.
- τον αριθμό των περιστροφών που εκτέλεσε το στερεό από $t_A = 0$ μέχρι $t_\Gamma = 4 \text{ s}$.
- την ισχύ της δύναμης που ασκείται στο στερεό τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$.
- το μέτρο της στροφορμής του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του τη χρονική στιγμή $t_B = 2 \text{ s}$.

Λύση

α) (βλ. σελίδα 109 του Σχολικού Βιβλίου)

Σε ένα διάγραμμα $\omega = \omega(t)$, η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης ισούται με την κλίση της καμπύλης.

Κίνηση AB:

Από $t_A = 0$ μέχρι $t_B = 2 \text{ s}$ η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\omega = f(t)$ είναι σταθερή, επομένως η γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ γράφεται:

$$a_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{\omega_B - \omega_A}{t_B - t_A} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} - 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2\text{s} - 0\text{s}} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu 1} = -2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Κίνηση ΒΓ:

Από $t_B = 2\text{s}$ μέχρι $t_\Gamma = 4\text{s}$ η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\omega = f(t)$

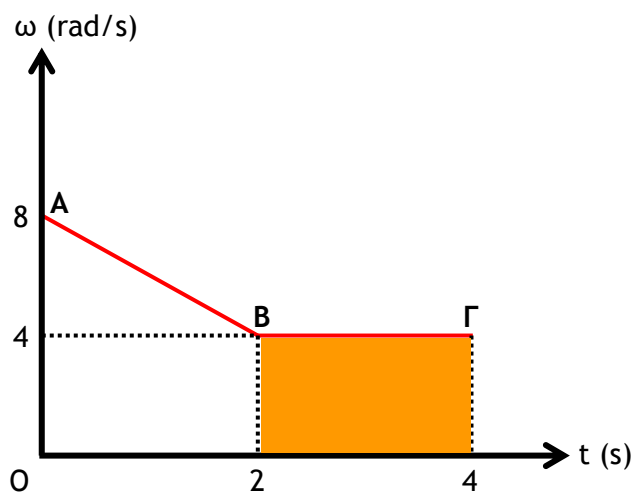
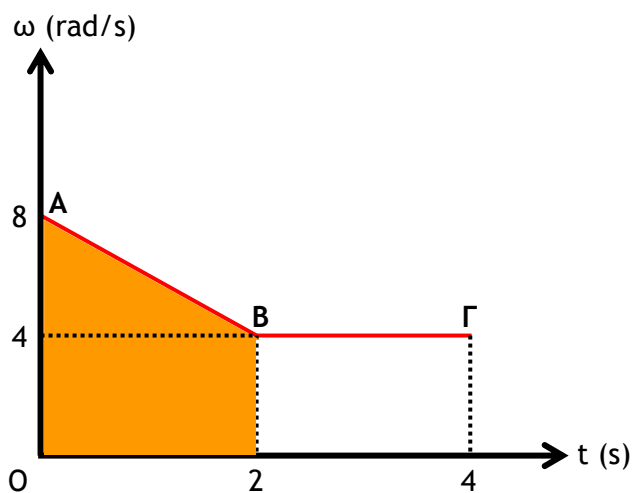
είναι μηδέν, επομένως η γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ είναι μηδέν:

$$a_{\gamma\omega\nu 2} = 0$$

β) Σε ένα διάγραμμα $\omega = \omega(t)$, η γωνία στροφής ισούται με το εμβαδόν του τμήματος που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα του χρόνου t .

Από $t_A = 0$ μέχρι $t_B = 2\text{s}$ το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\omega = f(t)$ δίνει τη γωνία στροφής για το αντίστοιχο χρονικό διάστημα:

$$\theta_1 = \frac{(4+8) \cdot 2}{2} \text{rad} \Rightarrow \theta_1 = 12 \text{rad}$$



Από $t_B = 2\text{s}$ μέχρι $t_\Gamma = 4\text{s}$ το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\omega = f(t)$ δίνει τη γωνία στροφής για το αντίστοιχο χρονικό διάστημα:

$$\theta_2 = 4 \cdot 2\text{rad} \Rightarrow \theta_2 = 8 \text{rad}$$

$$\theta_{\text{ολ}} = \theta_1 + \theta_2 \Rightarrow \theta_{\text{ολ}} = 20 \text{rad}$$

Ο αριθμός περιστροφών δίνεται από τον τύπο $N_{\text{ολ}} = \frac{\theta_{\text{ολ}}}{2\pi}$. Επομένως: $N_{\text{ολ}} = \frac{10}{\pi}$ στροφές.

γ) Η ισχύς της δύναμης δίνεται από τη σχέση: $P = \tau \cdot \omega$, όπου τ η ροπή της δύναμης και ω η γωνιακή ταχύτητα.

Από τον τύπο $a_{\gamma\omega v1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ υπολογίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_1 = 1\text{ s}$:

$$a_{\gamma\omega v1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow -2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \frac{\omega_1 - 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{1\text{s} - 0\text{s}} \Rightarrow \omega_1 = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Με αντικατάσταση στον τύπο $P = \tau \cdot \omega$ έχουμε:

$$P = \tau \cdot \omega_1 \Rightarrow P = I \cdot a_{\gamma\omega v1} \cdot \omega_1 \Rightarrow P = 0,2\text{kgm}^2 \cdot \left(-2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) \cdot \left(6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \Rightarrow$$

$$P = -2,4\text{ W}$$

δ) (βλ. σελίδα 122 του Σχολικού Βιβλίου)

Για τη στροφορμή του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του τη χρονική στιγμή $t_B = 2\text{ s}$ έχουμε:

$$L = I \cdot \omega_B \Rightarrow L = 0,2\text{kgm}^2 \cdot 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow L = 0,8 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

Παρατήρηση: Στη στροφική κίνηση, τα μεγέθη θ , ω , a_γ αντιστοιχούν στα μεγέθη x , v , a της μεταφορικής κίνησης. Επομένως, το διάγραμμα $\omega-t$ αντιστοιχεί στο διάγραμμα $v-t$ που έχει μελετηθεί σε προηγούμενη τάξη.

Άσκηση 5.

Ένας οριζόντιος δίσκος μπορεί να στρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο γύρω από ακλόνητο κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Αρχικά ο δίσκος είναι ακίνητος. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο δίσκο σταθερή ροπή, με αποτέλεσμα ο δίσκος να

αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $a_{\gamma\omega\nu} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Να βρείτε:

α) το μέτρο της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας $\Delta\omega$ σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 4 \text{ s}$.

β) τη ροπή αδράνειας I του δίσκου, αν στο ίδιο χρονικό διάστημα $\Delta t = 4 \text{ s}$ η μεταβολή του μέτρου της στροφορμής του δίσκου είναι $\Delta L = 0,8 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$.

γ) Τη στιγμιαία ισχύ P_1 της ροπής που στρέφει το δίσκο, τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

δ) Τον αριθμό των στροφών N_1 που έχει εκτελέσει ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

Λύση

α) Η γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ είναι σταθερή, οπότε έχουμε:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\omega = a_{\gamma\omega\nu} \Delta t \Rightarrow \Delta\omega = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

β) Η στροφορμή στερεού δίνεται από τον τύπο $L = I\omega$ και η ροπή αδράνειας I του δίσκου είναι σταθερή, οπότε έχουμε:

$$L = I\omega \Rightarrow \Delta L = I \cdot \Delta\omega \Rightarrow I = \frac{\Delta L}{\Delta\omega} \Rightarrow I = \frac{0,8 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}}{40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \Rightarrow I = 0,02 \text{ kgm}^2$$

γ) Η στιγμιαία ισχύς P_1 της ροπής που στρέφει το δίσκο, τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ δίνεται από τον τύπο:

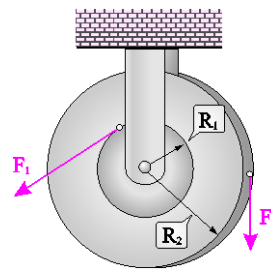
$$P_1 = \tau \cdot \omega_1 \Rightarrow P_1 = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 = 0,02 \text{ kgm}^2 \cdot \left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)^2 \cdot 2 \text{ s} \Rightarrow P_1 = 4 \text{ W}$$

δ) Ο αριθμός των στροφών N_1 που έχει εκτελέσει ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \frac{\frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}t_1^2}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \frac{\frac{1}{2}10\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (2\text{s})^2}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \frac{10}{\pi} \text{ στροφές.}$$

Άσκηση 6.

Η ακίνητη διπλή τροχαλία του σχήματος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας της. Η τροχαλία έχει ακτίνες $R_1 = 10\text{cm}$, $R_2 = 20\text{cm}$ και ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής $I = 1\text{kgm}^2$. Στην τροχαλία που είναι αρχικά ακίνητη, ασκούνται μέσω κατάλληλων αβαρών νημάτων οι δυνάμεις $F_1 = 60\text{N}$ και $F_2 = 40\text{N}$, με σημεία εφαρμογής και κατευθύνσεις όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε:



α) τη συνολική ροπή που δέχεται η τροχαλία.

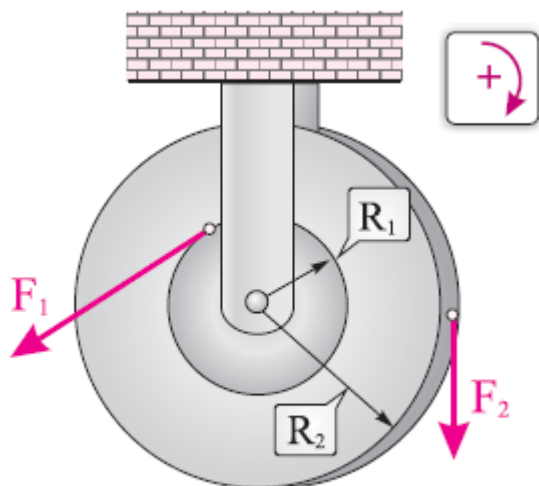
β) τη γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά η τροχαλία.

γ) τη γωνιακή της ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 4\text{ s}$.

δ) τη χρονική στιγμή $t = 4\text{ s}$, το μήκος των νημάτων που έχει τυλιχτεί ή ξετυλιχτεί σε κάθε τροχαλία.

Λύση

α)



$$\Sigma\tau = F_2 R_2 - F_1 R_1 = 40\text{N} \cdot 0,2\text{m} - 60\text{N} \cdot 0,1\text{m} \Rightarrow \Sigma\tau = 2\text{Nm}$$

β) Η γωνιακή επιτάχυνση βρίσκεται από το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη Στροφική κίνηση

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{I} = \frac{2Nm}{1kgm^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 2 \frac{rad}{s^2}$$

γ) Η κίνηση της τροχαλίας είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε η γωνιακή ταχύτητα βρίσκεται από την αντίστοιχη σχέση της κινηματικής περιγραφής της στροφικής κίνησης.

$$\omega = a_{\gamma\omega\nu} \cdot t = 2 \frac{rad}{s^2} \cdot 4s \Rightarrow \omega = 8 \frac{rad}{s}$$

δ) Η τροχαλία στρέφεται δεξιόστροφα, οπότε στην εξωτερική τροχαλία, ακτίνας R_2 , το νήμα ξετυλίγεται, ενώ στην εσωτερική τροχαλία, ακτίνας R_1 , το νήμα τυλίγεται.

Το νήμα που έχει τυλιχθεί ή ξετυλιχτεί βρίσκεται από τη σχέση

$$s = R\vartheta, \text{ όπου } \vartheta \text{ η γωνία στροφής.}$$

Η γωνία στροφής είναι κοινή για όλα τα σημεία της διπλής τροχαλίας και βρίσκεται από τη σχέση

$$\vartheta = \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2 = \frac{1}{2} 2 \frac{rad}{s^2} (4s)^2 \Rightarrow \vartheta = 16rad$$

Έτσι, για τα δύο μήκη των νημάτων έχουμε:

$$\text{- εσωτερική τροχαλία: } s_1 = R_1 \vartheta = 0,1m \cdot 16rad \Rightarrow s_1 = 1,6m$$

$$\text{- εξωτερική τροχαλία: } s_2 = R_2 \vartheta = 0,2m \cdot 16rad \Rightarrow s_2 = 3,2m$$

Άρα στην εσωτερική τροχαλία τυλίχτηκε νήμα μήκους $s_1 = 1,6m$ και από την εξωτερική ξετυλίχτηκε νήμα μήκους $s_2 = 3,2m$.

Άσκηση 7.

Οι τροχοί ενός ποδηλάτου έχουν ακτίνα $R = 0,3\text{m}$ και μάζα $m = 2\text{kg}$ ο καθένας. Το ποδήλατο κινείται στην κατεύθυνση από το νότο προς το βορρά με ταχύτητα 6m/s . Ο ποδηλάτης φρενάρει ομαλά και το σύστημα σταματά μετά από 3s . Σε όλη τη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης οι τροχοί κυλίνουν. Για τον κάθε τροχό:

α) να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειάς του, αν θεωρήσετε ότι όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια.

β) να βρείτε πώς μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητά του σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ) να γράψετε τη σχέση που συνδέει το μέτρο της στροφορμής του σε συνάρτηση με το χρόνο και να τη σχεδιάσετε.

δ) να υπολογίσετε τη ροπή που τον επιβράδυνε και να σχεδιάσετε το διάνυσμά της, καθώς και το διάνυσμα της αρχικής γωνιακής ταχύτητας.

Λύση

α) Επειδή η μάζα του τροχού θεωρείται συγκεντρωμένη όλη στην περιφέρειά του, η ροπή αδράνειας είναι:

$$I = mR^2 = 2\text{kg} \cdot (0,3\text{m})^2 \Rightarrow I = 0,18\text{kgm}^2$$

β) Η κίνηση του τροχού είναι μεταφορικά και στροφικά ομαλά επιβραδυνόμενη. Η γωνιακή ταχύτητα κάθε τροχού δίνεται από τη σχέση $\omega = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} t$ (1)

Επειδή οι τροχοί κυλίνουν, γωνιακή και μεταφορική ταχύτητα συνδέονται με τη σχέση $v_{\text{cm}} = \omega R$. Έτσι για την αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 παίρνουμε:

$$\omega_0 = \frac{v_{\text{cm}(\text{αρχ})}}{R} = \frac{6\text{m/s}}{0,3\text{m}} \Rightarrow \omega_0 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Επειδή οι τροχοί κυλίνουν γωνιακή και μεταφορική επιτάχυνση συνδέονται με τη σχέση $a_{\text{cm}} = a_{\gamma\omega\nu} R$ (2).

Όμως για τη μεταφορική επιτάχυνση έχουμε:

$$a_{\text{cm}} = \frac{\Delta v_{\text{cm}}}{\Delta t} = \frac{0 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3\text{s}} \Rightarrow a_{\text{cm}} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε:

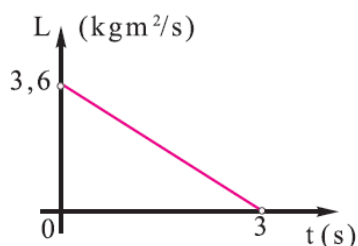
$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{R} = \frac{-2 \frac{m}{s^2}}{0,3m} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = -\frac{20}{3} \frac{rad}{s^2}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) των ω_0 και $a_{\gamma\omega\nu}$ παίρνουμε:

$$\omega = 20 - \frac{20}{3}t \quad (SI) \quad \mu\epsilon \quad 0s \leq t \leq 3s$$

γ) Η στροφορμή του τροχού δίνεται από τη σχέση: $L = I\omega$. Με αντικατάσταση παίρνουμε:

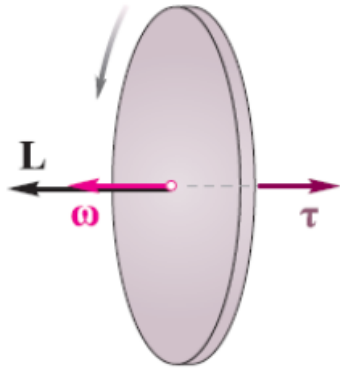
$$L = 0,18(20 - \frac{20}{3}t) \quad (SI) \Rightarrow L = 3,6 - 1,2t \quad (SI) \quad \mu\epsilon \quad 0s \leq t \leq 3s$$



δ) Η ροπή που επιβράδυνε τον τροχό βρίσκεται από τη σχέση:

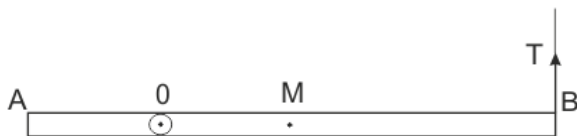
$$\Sigma\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0kgm^2/s - 3,6kgm^2/s}{3s} \Rightarrow \Sigma\tau = -1,2Nm$$

Επειδή το ποδήλατο κατευθύνεται στο βορρά, η γωνιακή ταχύτητα είναι προς τη Δύση. Το αρνητικό πρόσημο για τη ροπή δηλώνει πρόσημο αντίθετο από αυτό της γωνιακής ταχύτητας.



Άσκηση 8.

Η ομογενής ράβδος AB του σχήματος μάζας $M = 2\text{kg}$ και μήκους $L = \frac{12}{7}\text{m}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα κάθετο στη ράβδο, που διέρχεται από το σημείο της O.



Η απόσταση AO είναι ίση με $\frac{L}{4}$. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που

διέρχεται από το κέντρο μάζας της M και είναι κάθετος σ' αυτή είναι $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$. Η

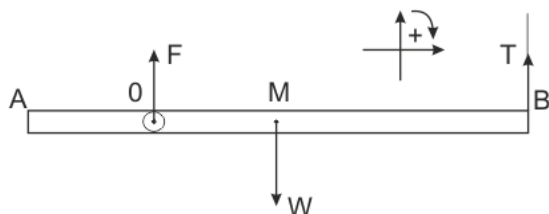
ράβδος διατηρείται στην οριζόντια θέση με τη βοήθεια κατακόρυφου νήματος που είναι δεμένο στο άκρο B. Κόβουμε το νήμα. Να βρείτε:

- την τάση του νήματος πριν αυτό κοπεί.
- τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.
- τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου αμέσως μόλις κοπεί το νήμα.
- τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή διέρχεται από την κατακόρυφη θέση.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο στην κατάσταση ισορροπίας. Από τη συνθήκη ισορροπίας για το άθροισμα των ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής παίρνουμε:



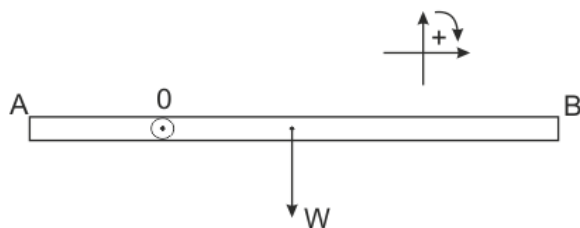
$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow Mg \frac{L}{4} - T \frac{3L}{4} = 0 \Rightarrow T = \frac{Mg}{3} = \frac{2\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2}{3} \Rightarrow T = \frac{20}{3}\text{N}$$

β) Η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς το σημείο O, βρίσκεται από το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (Θεώρημα Steiner).

$$I_{(O)} = I_{cm} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 \Rightarrow I_{(O)} = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{16}ML^2 \Rightarrow I_{(O)} = \frac{7}{48}ML^2 \Rightarrow$$

$$I_{(O)} = \frac{7}{48} 2\text{kg} \left(\frac{12}{7}\text{m}\right)^2 \Rightarrow I_{(O)} = \frac{6}{7}\text{kgm}^2$$

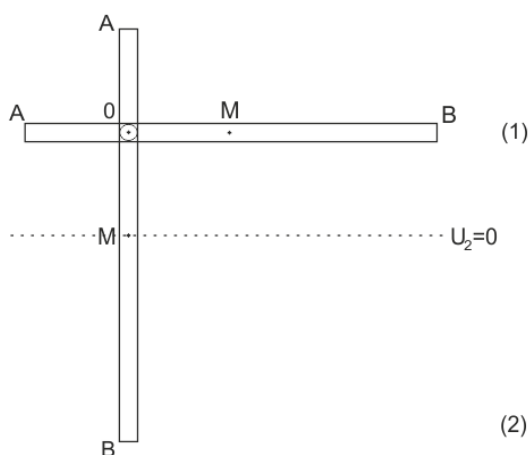
γ) Μόλις κοπεί το νήμα, η μόνη δύναμη που ασκεί ροπή είναι το βάρος.



Από το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_{(O)}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{I_{(O)}} = \frac{Mg \cdot \frac{L}{4}}{\frac{7}{48}ML^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{12g}{7L} = \frac{12 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{7 \cdot \frac{12}{7}\text{m}} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

δ) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου στην κατακόρυφη θέση βρίσκεται με εφαρμογή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της οριζόντιας και της κατακόρυφης θέσης.



$$E_{M\eta\chi(1)} = E_{M\eta\chi(2)} \Rightarrow U_{(1)} + K_{(1)} = U_{(2)} + K_{(2)} \Rightarrow Mg \cdot \frac{L}{4} + 0 = \frac{1}{2} I_{(O)} \omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{2I_{(O)}}} = \sqrt{\frac{2\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot \frac{12}{7}\text{m}}{2 \cdot \frac{6}{7}\text{kgm}^2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{20} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

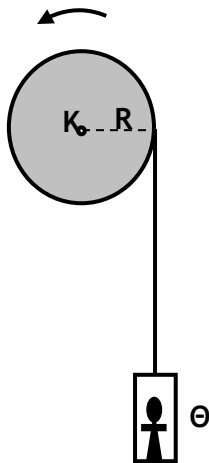
Άσκηση 9.

Ο ανελκυστήρας του σχήματος (α) αποτελείται από το θάλαμο επιβατών συνολικού βάρους $w_{\theta} = 2000\text{N}$ και το τύμπανο περιέλιξης του συρματόσχοινου ακτίνας $R = 0,25\text{m}$, στο οποίο έχει προσαρμοστεί ο κινητήρας του ανελκυστήρα. Ο θάλαμος ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 1\text{m/s}$.

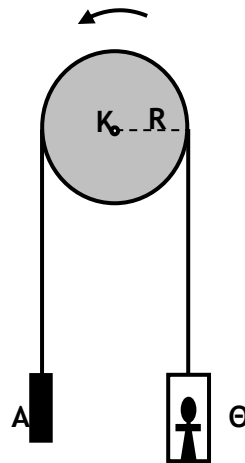
α)

1) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τυμπάνου.

2) Να υπολογίσετε την ισχύ του κινητήρα.



(α)



(β)

β) Στο σχήμα (β) δείχνεται ο ίδιος ανελκυστήρας στον οποίο έχει προσαρμοστεί ένα αντίβαρο Α βάρους $w_A = 1800\text{N}$. Ο θάλαμος ανεβαίνει πάλι με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 1\text{m/s}$.

1) Να υπολογίσετε την νέα ροπή του κινητήρα, που ασκείται στο τύμπανο.

2) Να υπολογίσετε την νέα ισχύ του κινητήρα.

Λύση

α)

1) Όταν ο θάλαμος ανέβει κατά Δy θα τυλιχτεί νήμα μήκους Δs , για το οποίο ισχύει: $\Delta y = \Delta s = R \cdot \Delta \theta$.

Διαιρώντας με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα παίρνουμε:

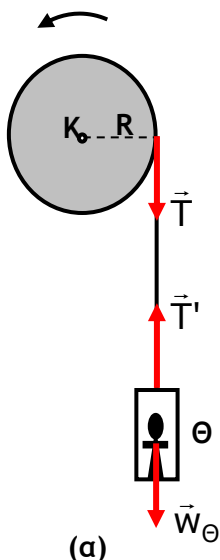
$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \Rightarrow v_{\theta} = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_{\theta}}{R} = \frac{1\text{m/s}}{0,25\text{m}} \Rightarrow \omega = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

2) Επειδή ο θάλαμος ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow w_{\Theta} = T'$$

Όμως $\vec{T}'$ και $\vec{T}$ έχουν ίδιο μέτρο. Άρα το μέτρο της τάσης T του συρματόσχοινου είναι ίσο με το μέτρο του βάρους w_{Θ} του θαλάμου, $T = w_{\Theta}$.

Σχήμα (α):



Επειδή το τύμπανο στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα η συνολική ροπή που ασκείται στο τύμπανο είναι μηδέν, οπότε για τη ροπή τ_1 που ασκεί ο κινητήρας στο τύμπανο ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \tau_1 - T \cdot R = 0 \Rightarrow \tau_1 = T \cdot R$$

Για την ισχύ του κινητήρα, σχήμα (α), έχουμε:

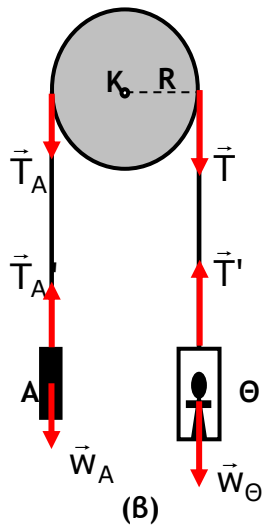
$$P_1 = \tau_1 \cdot \omega \Rightarrow P_1 = w_{\Theta} \cdot R \cdot \frac{v}{R} \Rightarrow P_1 = w_{\Theta} \cdot v = 2000 \text{ N} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow P_1 = 2000 \text{ W}$$

β)

1) Επειδή το τύμπανο στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ισχύει ότι :

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \tau_2 - w_{\Theta} \cdot R + w_A \cdot R = 0 \Rightarrow \tau_2 = w_{\Theta} \cdot R - w_A \cdot R \Rightarrow$$

$$\tau_2 = (w_{\Theta} - w_A) \cdot R = (2000 \text{ N} - 1800 \text{ N}) \cdot 0,25 \text{ m} \Rightarrow \tau_2 = 50 \text{ Nm}$$



Για την ισχύ του κινητήρα έχουμε:

$$P_2 = \tau_2 \cdot \omega \Rightarrow P_2 = (w_\Theta \cdot R - w_A \cdot R) \cdot \frac{v}{R} \Rightarrow P_2 = (w_\Theta - w_A) \cdot v \Rightarrow$$

$$P_2 = (2000\text{N} - 1800\text{N}) \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow P_2 = 200\text{W}$$

Άσκηση 10.

Μια συμπαγής σφαίρα μάζας $m=1\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,2\text{m}$ μπορεί να κυλά (χωρίς να ολισθαίνει) σε πλάγιο επίπεδο γωνίας φ . Όταν αυτή αφεθεί ελεύθερη να κυλήσει στο επίπεδο, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ως προς το κέντρο μάζας της έχει μέτρο $2/7 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$.

α. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα.

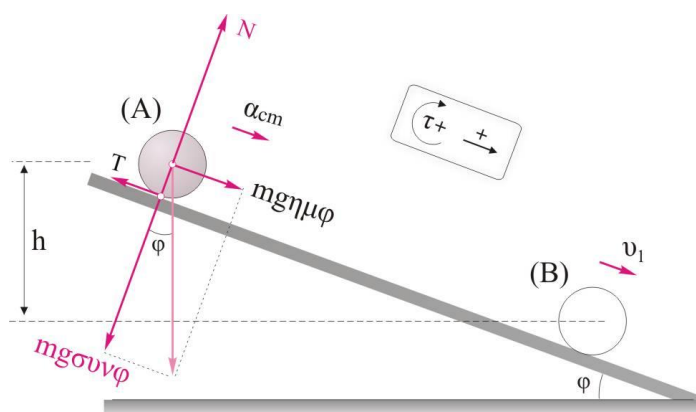
β. Να υπολογίσετε το μέτρο της στατικής τριβής.

γ. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας.

δ. Να υπολογίσετε το ημφ της γωνίας φ του πλάγιου επιπέδου.

Δίνονται: $g=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας $I_{\text{cm}} = 2mR^2/5$.

Λύση



α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι:

- το βάρος που αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες
- η δύναμη στήριξης N από το πλάγιο επίπεδο και
- η δύναμη της στατικής τριβής, T , που προκαλεί την περιστροφή της σφαίρας.

β. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς το κέντρο μάζας της ισούται με τη συνισταμένη των ροπών. Μόνο η στατική τριβή, T , προκαλεί ροπή στη σφαίρα.

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = T \cdot R \Rightarrow T = \frac{dL / dt}{R} = \frac{\frac{2}{7} \text{kgm}^2 / \text{s}^2}{0,2\text{m}} \Rightarrow T = \frac{10}{7} \text{N}$$

γ. Εφόσον η σφαίρα κυλάει, ισχύει: $\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\text{γων}} R$.

Με εφαρμογή του θεμελιώδη νόμου της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση παίρνουμε:

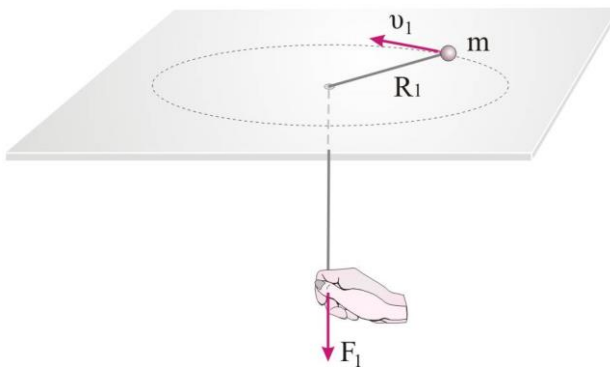
$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\text{γων}} \Rightarrow T \cdot R = \frac{2}{5} m R^2 \frac{\alpha_{\text{cm}}}{R} \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = \frac{5T}{2m} = \frac{5 \cdot \frac{10}{7} \text{N}}{2 \cdot 1\text{kg}} \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = \frac{25}{7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

δ. Με εφαρμογή του θεμελιώδη νόμου της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση παίρνουμε:

$$\Sigma F = m a_{\text{cm}} \Rightarrow mg \eta_{\mu\phi} - T = m a_{\text{cm}} \Rightarrow \eta_{\mu\phi} = \frac{T + m a_{\text{cm}}}{mg} = \frac{\frac{10}{7} \text{N} + 1\text{kg} \cdot \frac{25}{7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1\text{kg} \cdot 10\text{m} / \text{s}^2} \Rightarrow \eta_{\mu\phi} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 11.

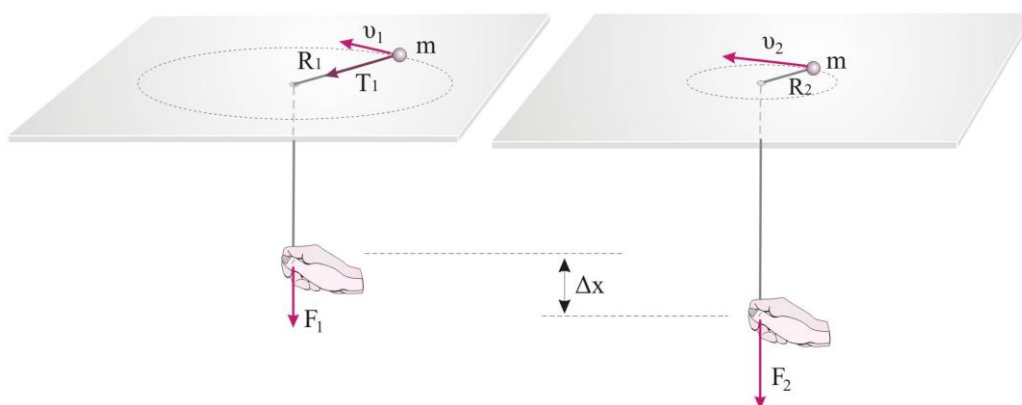
Το σφαιρίδιο του σχήματος έχει μάζα $m=1\text{kg}$ και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R_1=0,5\text{m}$ με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_1=2\text{rad/s}$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο που έχει στο μέσο του οπή. Το σφαιρίδιο είναι δεμένο σε λεπτό αβαρές και μη εκτατό νήμα το οποίο περνά από την κατακόρυφη οπή και καταλήγει στο χέρι του πειραματιστή. Το νήμα μπορεί να ολισθαίνει στα τοιχώματα της οπής χωρίς τριβές. Ο πειραματιστής κατεβάζει κατακόρυφα το χέρι του προσφέροντας στο σφαιρίδιο ενέργεια $7,5\text{J}$, οπότε η ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου μειώνεται σε R_2 .



Να υπολογίσετε:

- το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης που ασκεί το χέρι μέσω του νήματος στο σφαιρίδιο, καθώς αυτό περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_1 .
- το μέτρο της στροφορμής του σφαιριδίου.
- τη γραμμική ταχύτητα περιστροφής του σφαιριδίου στην ακτίνα R_2 .
- την κατακόρυφη μετατόπιση του χεριού του πειραματιστή.

Λύση



- Το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης είναι:

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{R_1} = m\omega_1^2 R_1 \Rightarrow T_1 = 1\text{kg} \cdot (2\text{r/s})^2 \cdot 0,5\text{m} \Rightarrow T_1 = 2\text{N}$$

β. Το μέτρο της στροφορμής δίνεται από τη σχέση

$$L_1 = mv_1 R_1 = m\omega_1 R_1^2 \Rightarrow L_1 = 1\text{kg} \cdot (2\text{r/s}) \cdot (0,5\text{m})^2 \Rightarrow L_1 = 0,5\text{kgm}^2/\text{s}$$

γ. Η ενέργεια που προσέφερε ο πειραματιστής, καθώς κατέβαζε το νήμα με το χέρι του, ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σφαιριδίου.

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_F \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{mv_1^2 + 2W_F}{m}} = \sqrt{\frac{1\text{kg} \cdot (1\text{m/s})^2 + 2 \cdot 7,5\text{J}}{1\text{kg}}} \Rightarrow v_2 = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ. Όταν ο πειραματιστής μειώνει την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς, ο φορέας της δύναμης που ασκεί στο σφαιρίδιο διέρχεται από τον άξονα περιστροφής του, οπότε στο σφαιρίδιο δεν ασκείται εξωτερική ροπή με αποτέλεσμα η στροφορμή του να διατηρείται σταθερή.

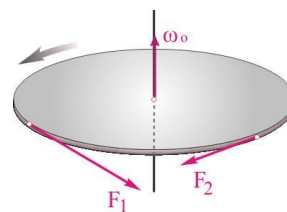
Επομένως $L_2 = L_1 = 0,5\text{kgm}^2/\text{s}$.

$$L_2 = mv_2 R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{L_2}{mv_2} = \frac{0,5\text{kgm}^2/\text{s}}{1\text{kg} \cdot 4\text{m/s}} \Rightarrow R_2 = 0,125\text{m}$$

Άρα το νήμα κατέβηκε κατά $\Delta x = R_1 - R_2 = 0,5\text{m} - 0,125\text{m}$ ή $\Delta x = 0,375\text{m}$

Άσκηση 12.

Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούνται στο δίσκο δύο εφαπτομενικές οριζόντιες σταθερές δυνάμεις $F_1 = 18 \text{ N}$ και F_2 όπως στο σχήμα. Τη στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ που το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου είναι $\omega_1 = 30 \text{ rad/s}$, η F_1 καταργείται και τη στιγμή $t_2 = 20 \text{ s}$, ο δίσκος σταματά στιγμιαία.



- A. Να βρείτε τα μέτρα των γωνιακών επιταχύνσεων του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη στιγμή t_2 που θα σταματήσει στιγμιαία.
- B. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου σε συνάρτηση με το χρόνο από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη στιγμή t_2 σε αριθμημένους άξονες.
- Γ. Να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη στιγμή t_2 .
- Δ. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης F_2 .

Λύση

A. Από 0 έως t_1 , η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται, οπότε η ροπή της F_1 είναι μεγαλύτερη της ροπής της F_2 . Στο δίσκο ασκούνται σταθερές ροπές και αυτός περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Το μέτρο της επιτάχυνσής του από 0 έως t_1 είναι:

$$\alpha_{\gamma\omega v1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega v1} = \frac{30 \text{ r/s} - 10 \text{ r/s}}{5 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega v1} = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Από t_1 έως t_2 καταργείται η F_1 και ασκείται μόνο η σταθερή ροπή της δύναμης F_2 με αποτέλεσμα ο δίσκος να επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό. Στο χρονικό διάστημα $t_2 - t_1 = 15 \text{ s}$, η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου από 30 rad/s μηδενίζεται. Άρα,

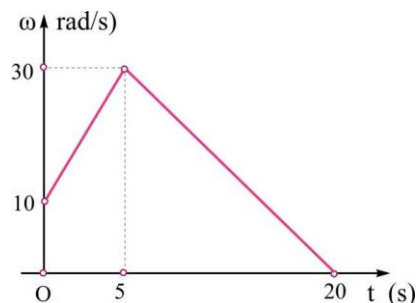
$$|\alpha_{\gamma\omega v2}| = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{30 \text{ r/s}}{15 \text{ s}} \Rightarrow |\alpha_{\gamma\omega v2}| = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

B. Η γωνιακή ταχύτητα σε σχέση με το χρόνο δίνεται από τις σχέσεις:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega v1} \cdot t \Rightarrow \omega = 10 + 4t, \quad 0 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ s}$$

$$\omega = \omega_1 - |\alpha_{\gamma\omega\nu 2}| \Delta t \Rightarrow \omega = 30 - 2(t - 5) \Rightarrow \omega = 40 - 2t, \quad 5s < t \leq 20s$$

Το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο δίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ. Ο αριθμός N των περιστροφών δίνεται από τη σχέση $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$, (1)

Η γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ του δίσκου ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης του ω - t και του άξονα των χρόνων.

$$\Delta\theta = \varepsilon\mu\beta. = \left(\frac{10+30}{2} \right) \cdot 5 \text{ rad} + \frac{1}{2} 15 \cdot 30 \text{ rad} \Rightarrow \Delta\theta = 325 \text{ rad}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε, $N = 162,5 / \pi$ περιστροφές.

Δ. Για το χρονικό διάστημα από 0 έως t_1 , ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής για την περιστροφή γράφεται:

$$\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 1} \Rightarrow F_1 R - F_2 R = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 1}, \quad (2)$$

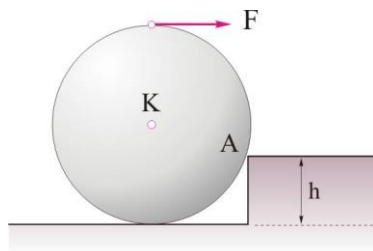
Για το χρονικό διάστημα από t_1 έως t_2 , ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής για την περιστροφή γράφεται: $\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 2} \Rightarrow -F_2 R = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 2}, \quad (3)$

Διαιρώντας τις (2), (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{F_1 R - F_2 R}{-F_2 R} = \frac{I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 1}}{I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu 2}} \Rightarrow \frac{18 - F_2}{-F_2} = \frac{4}{-2} \Rightarrow F_2 = 6 \text{ N}$$

Άσκηση 13.

Η σφαίρα του διπλανού σχήματος έχει μάζα $m=60\text{kg}$, ακτίνα $R=1\text{m}$ και το εμπόδιο έχει ύψος $h=0,4\text{m}$. Ασκούμε στο ψηλότερο σημείο της σφαίρας εφαπτομενικά οριζόντια δύναμη μέτρου $F=400\text{N}$ η οποία παραμένει διαρκώς σταθερή σε κατεύθυνση και μέτρο, με συνέπεια η σφαίρα να υπερπηδά το εμπόδιο.



A. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας.

B. Τη χρονική στιγμή που βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο το σημείο A, το κέντρο μάζας K της σφαίρας και το σημείο εφαρμογής της δύναμης F, να:

1. σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα (να αγνοηθεί η στατική τριβή).
2. υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο A.
3. υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο A.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της $I_{\text{cm}} = 2mR^2/5$.

Λύση

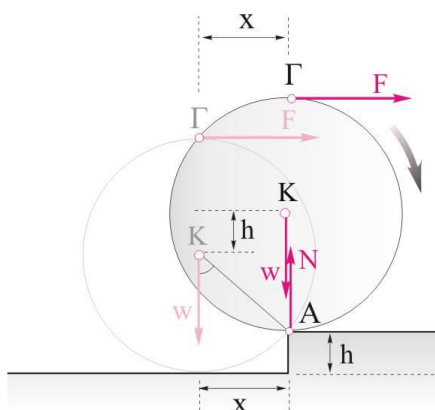
A. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο A βρίσκεται με εφαρμογή του θεωρήματος των παράλληλων αξόνων.

$$I_A = I_{\text{cm}} + mR^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 \Rightarrow I_A = \frac{7}{5}mR^2 = \frac{7}{5}60\text{kg} \cdot (1\text{m})^2 \Rightarrow I_A = 84\text{kgm}^2$$

B.

1. Οι δυνάμεις που ασκούνται στην σφαίρα όταν τα σημεία A, K, Γ βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο είναι:

- η οριζόντια δύναμη F,
- το βάρος w,



- η κάθετη δύναμη στήριξης N.

2. Με εφαρμογή του θεμελιώδη νόμου της Μηχανικής για περιστροφή γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής A παίρνουμε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F \cdot 2R = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{F \cdot 2R}{I_A} = \frac{400\text{N} \cdot 2 \cdot 1\text{m}}{84\text{kgm}^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{200}{21} \text{rad/s}^2$$

3. Με εφαρμογή του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας στη στροφική κίνηση μεταξύ των δύο θέσεων παίρνουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} I_A \omega^2 - 0 = W_F + W_w \quad (2)$$

Η δύναμη F μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της στη διεύθυνση της κατά x. Από το ορθογώνιο τρίγωνο παίρνουμε:

$$R^2 = x^2 + (R-h)^2 \Rightarrow x = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} \Rightarrow x = \sqrt{(1\text{m})^2 - (1\text{m} - 0,4\text{m})^2} \Rightarrow x = 0,8\text{m}$$

$$W_F = Fx = 400\text{N} \cdot 0,8\text{m} \Rightarrow W_F = 320\text{J}$$

$$W_w = U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}} = -mgh = -60\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 0,4\text{m} \Rightarrow W_w = -240\text{J}$$

Με αντικατάσταση στην σχέση (2) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} I_A \omega^2 - 0 = W_F + W_w \Rightarrow \frac{1}{2} 84\text{kgm}^2 \cdot \omega^2 = 320\text{J} - 240\text{J} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{40}{21}} \text{r/s}$$

Άσκηση 14. • Νέο

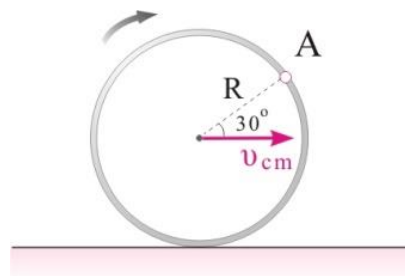
Ένας ποδηλάτης, ενώ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα $v_0 = 10 \text{ m/s}$, ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$, να κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $a=1 \text{ m/s}^2$. Κάθε τροχός του ποδηλάτου έχει ακτίνα $R=20 \text{ cm}$ και μάζα $m=0,5 \text{ kg}$, που θεωρούμε ότι είναι όλη συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του. Για τη χρονική στιγμή $t=10 \text{ s}$ να υπολογίσετε:

A) τη μετατόπιση του ποδηλάτου και την ταχύτητα που θα αποκτήσει.

B) τη στροφορμή του ενός τροχού και το ρυθμό μεταβολής της.

Γ) την κινητική ενέργεια του ενός τροχού και το ρυθμό μεταβολής της.

Δ) το μέτρο της ταχύτητας του σημείου A της περιφέρειας του τροχού, του οποίου η επιβατική ακτίνα σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντια διάμετρο.



Δίνεται το $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Λύση

A) Το ποδήλατο κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα. Άρα η κίνηση του κέντρου μάζας περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$v = v_0 + a_{\text{cm}} t, \quad \Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a_{\text{cm}} t^2$$

Για την μετατόπιση του ποδηλάτου και την ταχύτητα που θα αποκτήσει τη χρονική στιγμή $t=10 \text{ s}$, έχουμε

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a_{\text{cm}} t^2 \Rightarrow \Delta x = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (10 \text{ s})^2 \Rightarrow \Delta x = 150 \text{ m},$$

$$v = v_0 + a_{\text{cm}} t \Rightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ s} \Rightarrow v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

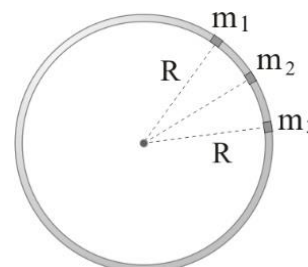
B) Η στροφορμή του τροχού δίνεται από τη σχέση

$$L = I\omega \quad (1)$$

Κάθε τροχός στροφικά εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Η ροπή αδράνειας του τροχού, ως προς τον άξονα περιστροφής του, αφού θεωρούμε ότι όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του, είναι

$$I = m_1 R^2 + m_2 R^2 + m_3 R^2 + \dots \Rightarrow I = (m_1 + m_2 + m_3 + \dots) R^2 \Rightarrow$$

$$I = m R^2 = 0,5 \text{ kg} \cdot (0,2 \text{ m})^2 \Rightarrow I = 0,02 \text{ kgm}^2.$$



Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού συμπίπτει με την ταχύτητα του ποδηλάτου,

$$v_{cm} = v = 20 \frac{m}{s}.$$

Η γωνιακή του ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t=10s$ είναι

$$v_{cm} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v_{cm}}{R} \Rightarrow \omega = \frac{20 \frac{m}{s}}{0,2m} \Rightarrow \omega = 100 \frac{rad}{s}.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1), προκύπτει το μέτρο της στροφορμής

$$L = I\omega \Rightarrow L = 0,02kgm^2 \cdot 100 \frac{rad}{s} \Rightarrow L = 2 \frac{kgm^2}{s}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = I\alpha_{\gamma} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I \frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0,02kgm^2 \cdot \frac{1 \frac{m}{s^2}}{0,2m} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0,1 \frac{kgm^2}{s^2}.$$

Γ) Ο τροχός κάνει σύνθετη κίνηση. Έχει μεταφορική και στροφική κινητική ενέργεια

$$K_{ολ} = K_{\mu} + K_{\pi} \Rightarrow K_{ολ} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow K_{ολ} = \frac{1}{2}0,5kg \cdot \left(20 \frac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{2}0,02kgm^2 \cdot \left(100 \frac{rad}{s}\right)^2 \Rightarrow$$

$$K_{ολ} = 200J.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι

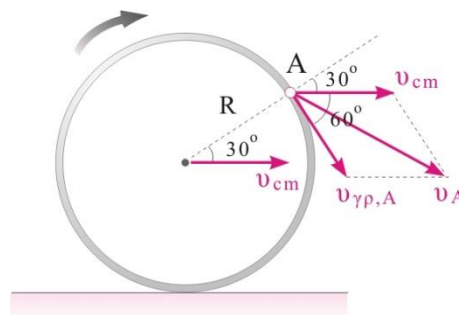
$$\frac{dK_{ολ}}{dt} = \frac{dK_{\mu}}{dt} + \frac{dK_{\pi}}{dt} = \Sigma F \cdot v_{cm} + \Sigma \tau \cdot \omega = m\alpha_{cm}v_{cm} + I\alpha_{\gamma}\omega = m\alpha_{cm}v_{cm} + mR^2 \frac{\alpha_{cm}}{R} \omega \Rightarrow$$

$$\frac{dK_{ολ}}{dt} = m\alpha_{cm}v_{cm} + m\alpha_{cm}\omega R = 2m\alpha_{cm}v_{cm} \Rightarrow \frac{dK_{ολ}}{dt} = 2 \cdot 0,5kg \cdot 1 \frac{m}{s^2} \cdot 20 \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$\frac{dK_{ολ}}{dt} = 20 \frac{J}{s}.$$

Δ) Για να βρούμε το μέτρο της συνολικής ταχύτητας του σημείου A, v_A , θα βρούμε τη συνισταμένη των δύο ταχυτήτων v_{cm} και $v_{\gamma\rho,A}$.

Οι δύο επιμέρους ταχύτητες σχηματίζουν γωνία 60° και είναι ίσου μέτρου. Άρα

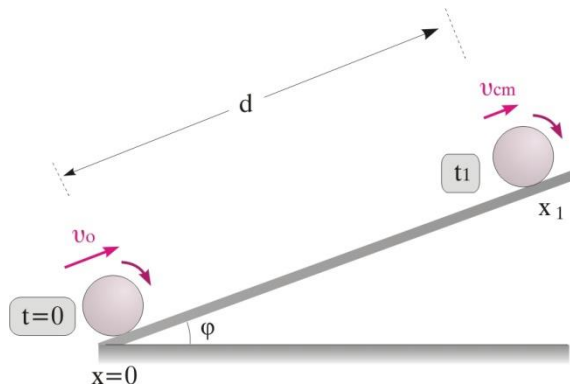


$$v_A = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma p, A}^2 + 2 \cdot v_{cm} \cdot v_{\gamma p, A} \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{cm}^2 + 2 \cdot v_{cm} \cdot v_{cm} \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$v_A = \sqrt{3v_{cm}^2} = v_{cm} \sqrt{3} \Rightarrow v_A = 20\sqrt{3} \frac{m}{s}.$$

Άσκηση 15. • Νέο

Μια κούφια ομογενής σφαίρα, μάζας $m=2\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{ m}$, ανέρχεται κυλιόμενη σε πλάγιο επίπεδο γωνίας $\varphi=30^\circ$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ η σφαίρα έχει μεταφορική ταχύτητα u_0 και διέρχεται από τη θέση $x=0$. Τη χρονική στιγμή t_1 , η σφαίρα διέρχεται από τη θέση $x_1=1,8\text{m}$ και έχει στροφορμή μέτρου $L_1=0,04\text{ kgm}^2/\text{s}$.



A) Να γράψετε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική και τη στροφική κίνηση της σφαίρας.

B) Να υπολογίσετε τη μεταφορική και τη γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας.

Γ) Να υπολογίσετε τη στατική τριβή που δέχεται η σφαίρα από το πλάγιο επίπεδο.

Δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_1 .

Ε) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της σφαίρας τη χρονική στιγμή t_1 .

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της $I = \frac{2}{3} mR^2$, $g=10\text{ m/s}^2$, $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sqrt{43,56} = 6,6$.

Λύση

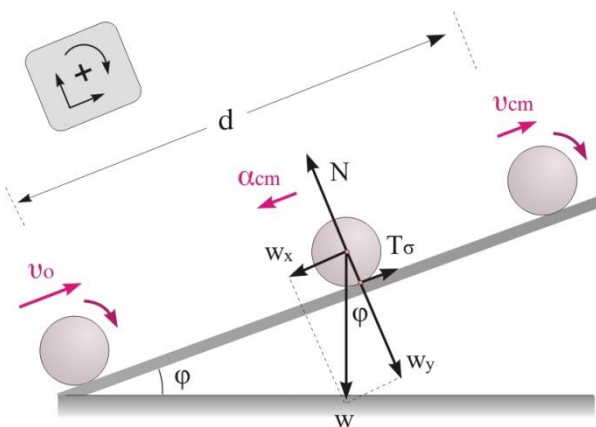
A) Η σφαίρα κάνει σύνθετη κίνηση, με την επίδραση του βάρους και της στατικής τριβής, T_σ . Για την μεταφορική της κίνηση, ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m\alpha_{cm} \Rightarrow T_\sigma - w_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow \\ T_\sigma - mg \cdot \eta\mu\varphi &= m\alpha_{cm} \end{aligned} \quad (1)$$

Στη στροφική κίνηση η μόνη δύναμη που προκαλεί ροπή είναι η στατική τριβή, οπότε ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει

$$\Sigma \tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow -T_\sigma R = I\alpha_\gamma \Rightarrow T_\sigma R = -\frac{2}{3} mR^2 \alpha_\gamma \Rightarrow T_\sigma = -\frac{2}{3} mR \alpha_\gamma \quad (2)$$

B) Επειδή η σφαίρα ανέρχεται κυλιόμενη η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συνδέεται με τη γωνιακή της επιτάχυνση με τη σχέση



$$\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma} R \quad (3)$$

Η σχέση (2) με τη βοήθεια της (3) γίνεται $T_{\sigma} = -\frac{2}{3} m \alpha_{\text{cm}}$ και αντικαθιστώντας στη σχέση (1) υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας της σφαίρας

$$-\frac{2}{3} m \alpha_{\text{cm}} - mg \cdot \eta \mu \varphi = m \alpha_{\text{cm}} \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = -\frac{3}{5} g \cdot \eta \mu \varphi \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = -\frac{3}{5} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\text{cm}} = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από τη σχέση (3) υπολογίζουμε τη γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας

$$\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma} R \Rightarrow \alpha_{\gamma} = \frac{\alpha_{\text{cm}}}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = \frac{-3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,1\text{m}} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = -30 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Γ) Η στατική τριβή που δέχεται η σφαίρα από το πλάγιο επίπεδο προκύπτει από τη σχέση (2)

$$T_{\sigma} = -\frac{2}{3} m R \alpha_{\gamma} \Rightarrow T_{\sigma} = -\frac{2}{3} \cdot 2\text{kg} \cdot 0,1\text{m} \cdot \left(-30 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) \Rightarrow T_{\sigma} = 4\text{N}.$$

Δ) Από τη στροφορμή της σφαίρας υπολογίζουμε τη γωνιακή της ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_1

$$L_1 = I \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{L_1}{\frac{2}{3} m R^2} \Rightarrow \omega_1 = \frac{0,04 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}}{\frac{2}{3} 2\text{kg} \cdot (0,1\text{m})^2} \Rightarrow \omega_1 = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Η κίνηση είναι κύλιση, οπότε για την ταχύτητα του κέντρου μάζας τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$v_{\text{cm}} = \omega_1 R \Rightarrow v_{\text{cm}} = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,1\text{m} \Rightarrow v_{\text{cm}} = 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η μεταφορική κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη και οι εξισώσεις κίνησης δίνουν:

$$v_{\text{cm}} = v_0 + \alpha_{\text{cm}} t_1 \Rightarrow 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = v_0 - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t_1 \quad (\text{SI}) \Rightarrow v_0 = 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t_1 \quad (4)$$

$$d = v_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t_1^2 \Rightarrow 1,8\text{m} = v_0 t_1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t_1^2 \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4) στη σχέση (5) λύνουμε το σύστημα και έχουμε

$$3t_1^2 + 0,6t_1 - 3,6 = 0 \quad (\text{SI}) \quad (6)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτεροβάθμια. Βρίσκουμε πρώτα τη διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0,6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3,6) = 43,56.$$

Οι λύσεις της σχέσης (6) είναι

$$t_1 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{43,56}}{2 \cdot 3} = \frac{-0,6 \pm 6,6}{6} \Rightarrow t_1 = 1s \quad \text{ή} \quad t_1 = -1,2s.$$

Δεκτή είναι η θετική λύση $t_1 = 1s$.

Ε) Η κινητική ενέργεια της σφαίρας ισούται με το άθροισμα της μεταφορικής και της στροφικής. Για τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$K_{ολ} = K_{\mu} + K_{σπ} \Rightarrow K_{ολ} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 \Rightarrow K_{ολ} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}mR^2\omega_1^2 \Rightarrow$$

$$K_{ολ} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 \left(1 + \frac{2}{3}\right) \Rightarrow K_{ολ} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} 2kg \cdot \left(0,3 \frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow K_{ολ} = 0,15J.$$

Άσκηση 16.

• Νέο

Μια συμπαγής ομογενής σφαίρα μάζας $m=0,4\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$ εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, με ταχύτητα κέντρου μάζας v_0 και γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Τη στιγμή $t=0$ της εκτόξευσης, η μεταφορική κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι δεκαπλάσια της στροφικής. Στο μισό του μέγιστου ύψους που φτάνει η σφαίρα, η μηχανική της ενέργεια είναι $E_M=31,68\text{J}$. Θεωρείστε ότι το σημείο εκτόξευσης της σφαίρας βρίσκεται στο επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

Να υπολογίσετε:

Α) την αρχική ταχύτητα v_0 , που εκτοξεύτηκε η σφαίρα.

Β) τη στροφορμή της σφαίρας στην ανώτερή της θέση.

Γ) το λόγο της μεταφορικής προς τη στροφική κινητική ενέργεια τη χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$.

Δ) το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της σφαίρας, όταν ανεβαίνει και βρίσκεται στο μισό του μέγιστου ύψους της.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της $I=\frac{2}{5}mR^2$ και $g=10\text{ m/s}^2$.

Λύση

Α) Η μηχανική ενέργεια της σφαίρας καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης παραμένει σταθερή, γιατί στη σφαίρα ασκείται μόνο η δύναμη του βάρους της που είναι συντηρητική δύναμη. Στο μισό του μέγιστου ύψους που φτάνει η σφαίρα, η μηχανική της ενέργεια είναι $E_M=31,68\text{ J}$ και τόσο είναι σε κάθε θέση, άρα και στη θέση της εκτόξευσής της. Έτσι, για την αρχική ταχύτητα v_0 , που εκτοξεύτηκε η σφαίρα, έχουμε:

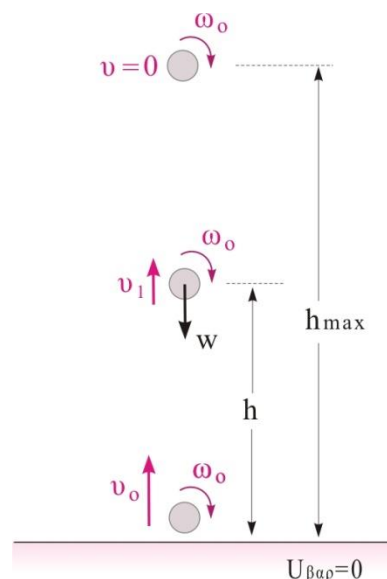
$$E_{\text{μηχ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \Rightarrow E_{\text{μηχ}} = K_{\text{μετ,αρχ}} + K_{\text{στρ,αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \Rightarrow$$

$$E_{\text{μηχ}} = K_{\text{μετ,αρχ}} + \frac{K_{\text{μετ,αρχ}}}{10} + U_{\text{αρχ}} \Rightarrow$$

$$E_{\text{μηχ}} = \frac{11K_{\text{μ,αρχ}}}{10} + U_{\text{αρχ}} \Rightarrow E_{\text{μηχ}} = \frac{11 \cdot \frac{1}{2}mv_0^2}{10} + U_{\text{αρχ}} \Rightarrow$$

$$31,68\text{J} = \frac{11 \cdot \frac{1}{2}0,4\text{kg} \cdot v_0^2}{10} + 0 \Rightarrow$$

$$v_0 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Β) Η σφαίρα δέχεται μόνο τη δύναμη του βάρους της, η οποία έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας του σώματος και δεν προκαλεί ροπή. Έτσι η γωνιακή της ταχύτητα και η στροφορμή της διατηρούνται σταθερές σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου. Τη χρονική στιγμή $t=0$, η μεταφορική κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι δεκαπλάσια της στροφικής. Άρα

$$K_{\text{μετ, αρχ}} = 10K_{\text{στρ, αρχ}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = 10\frac{1}{2}I\omega_0^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = 10\frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega_0^2 \Rightarrow$$

$$\omega_0^2 = \frac{v_0^2}{4R^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{v_0}{2R} \Rightarrow \omega_0 = \frac{12\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 0,1\text{m}} \Rightarrow \omega_0 = 60\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Η στροφορμή της σφαίρας στην ανώτερή της θέση είναι

$$L = I\omega_0 \Rightarrow L = \frac{2}{5}mR^2\omega_0 \Rightarrow L = \frac{2}{5}0,4\text{kg} \cdot (0,1\text{m})^2 \cdot 60\frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow L = 0,096\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}.$$

Γ) Τη χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας είναι

$$v_1 = v_0 - gt \Rightarrow v_1 = 12\frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\text{s} \Rightarrow v_1 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ο λόγος της μεταφορικής προς τη στροφική κινητική ενέργεια είναι

$$\frac{K_{\text{μετ}}}{K_{\text{στρ}}} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2}I\omega_0^2} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega_0^2} = \frac{v_1^2}{\frac{2}{5}R^2\omega_0^2} = \frac{\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\frac{2}{5} \cdot (0,1\text{m})^2 \cdot \left(60\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2} \Rightarrow \frac{K_{\text{μετ}}}{K_{\text{στρ}}} = \frac{5}{18}.$$

Δ) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της σφαίρας είναι

$$U + K = E_{\text{μηχ}} \Rightarrow dU + dK = dE_{\text{μηχ}} \Rightarrow dU + dK = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dt} + \frac{dK}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = \frac{-dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{-dW_B}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{(-mgdy)}{dt} = mgv_2 \quad (1)$$

Θα βρούμε την ταχύτητα της σφαίρας στο μισό του μέγιστου ύψους της, εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

Πρώτα θα εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να βρούμε το μέγιστο ύψος h_{max}

$$E_{\text{μηχ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \Rightarrow K_{\text{μετ, αρχ}} + K_{\text{στρ, αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{μετ, τελ}} + K_{\text{στρ, τελ}} + U_{\text{τελ}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow h_{\max} = \frac{\left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow h_{\max} = 7,2 \text{m}.$$

Τώρα, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης εκτόξευσης και της θέσης του μισού του μέγιστου ύψους

$$E_{\mu\eta\chi} = K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K + U \Rightarrow K_{\mu\epsilon\tau,\alpha\rho\chi} + K_{\sigma\tau\rho,\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\mu\epsilon\tau} + K_{\sigma\tau\rho} + U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg \frac{h_{\max}}{2} \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_0^2 - gh_{\max}} \Rightarrow$$

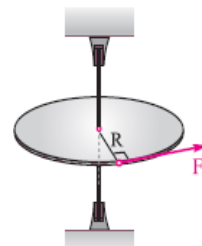
$$v_2 = \sqrt{\left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 7,2 \text{m}} \Rightarrow v_2 = 6\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η σχέση (1) με αριθμητική αντικατάσταση δίνει

$$\frac{dU}{dt} = mgv_2 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = 0,4 \text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = 24\sqrt{2} \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Άσκηση 17. • Νέο

Ένας ομογενής δίσκος, μάζας $m=2\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,1\text{m}$, μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του. Μία οριζόντια εφαπτομενική δύναμη F ασκείται στο δίσκο για χρονικό διάστημα 5 δευτερολέπτων, όπως φαίνεται στο σχήμα, και τον επιταχύνει. Έπειτα η δύναμη παύει να ασκείται και ο δίσκος επιβραδύνεται, λόγω τριβών, μέχρι να σταματήσει.



Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Να υπολογίσετε:

A) τη γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησής του.

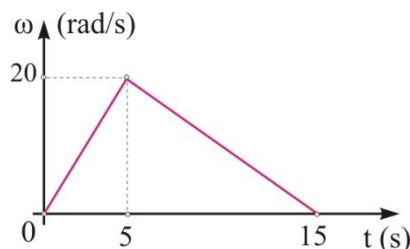
B) το συνολικό αριθμό των στροφών του δίσκου.

Γ) το μέτρο της ροπής της δύναμης της τριβής, αν θεωρήσουμε ότι είναι σταθερή σε όλη τη χρονική διάρκεια περιστροφής του δίσκου.

Δ) το έργο της δύναμης F , για το χρονικό διάστημα που ενήργησε.

Ε) τον ρυθμό κατανάλωσης ενέργειας από την τριβή, τη χρονική στιγμή $t=10\text{s}$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του $I = \frac{1}{2} mR^2$.



Λύση

A) Η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου δίνεται από τη σχέση $\alpha_{\gamma} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Έτσι, στα πρώτα 5 δευτερόλεπτα της κίνησης, που είναι ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, είναι

$$\alpha_{\gamma 1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma 1} = \frac{20 \frac{\text{rad}}{\text{s}} - 0}{5\text{s}} \Rightarrow \alpha_{\gamma 1} = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Στα επόμενα 10 δευτερόλεπτα η κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική και η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου είναι

$$\alpha_{\gamma 2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma 2} = \frac{0 - 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{10\text{s}} \Rightarrow \alpha_{\gamma 2} = -2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Β) Α' τρόπος

Τη γωνιακή μετατόπιση του δίσκου, $\Delta\theta$, θα την υπολογίσουμε από το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση στο διάγραμμα γωνιακής ταχύτητας - χρόνου και τον άξονα του χρόνου

$$\Delta\theta_{ολ} = \frac{1}{2} \cdot 15s \cdot 20 \frac{\text{rad}}{s} \Rightarrow \Delta\theta_{ολ} = 150\text{rad}.$$

Ο συνολικός αριθμός των στροφών του δίσκου είναι

$$N = \frac{\Delta\theta_{ολ}}{2\pi} = \frac{150\text{rad}}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{75}{\pi} \text{ στροφές}.$$

Β' τρόπος

Θα υπολογίσουμε πρώτα τη γωνιακή μετατόπιση του δίσκου, θ_1 , στα πρώτα 5 δευτερόλεπτα της κίνησης

$$\Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma 1} \Delta t^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{\text{rad}}{s^2} \cdot (5s)^2 \Rightarrow \Delta\theta_1 = 50\text{rad}.$$

Θα υπολογίσουμε στη συνέχεια τη γωνιακή μετατόπιση του δίσκου, θ_2 , στα επόμενα 10 δευτερόλεπτα της ομαλά επιβραδυνόμενης στροφικής κίνησης

$$\Delta\theta_2 = \omega_0 \Delta t_2 + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma 2} \Delta t_2^2 = 20 \frac{\text{rad}}{s} \cdot 10s + \frac{1}{2} \cdot \left(-2 \frac{\text{rad}}{s^2}\right) \cdot (10s)^2 \Rightarrow \Delta\theta_2 = 100\text{rad}.$$

Η συνολική γωνιακή μετατόπιση του δίσκου είναι

$$\Delta\theta_{ολ} = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = 50\text{rad} + 100\text{rad} = 150\text{rad}.$$

Ο συνολικός αριθμός των στροφών του δίσκου είναι

$$N = \frac{\Delta\theta_{ολ}}{2\pi} = \frac{150\text{rad}}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{75}{\pi} \text{ στροφές}.$$

Γ) Για τη δεύτερη φάση κίνησης του δίσκου, από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την στροφική κίνηση, υπολογίζουμε το μέτρο της ροπής της δύναμης της τριβής

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma 2} \Rightarrow |\tau_T| = I|\alpha_{\gamma 2}| \Rightarrow |\tau_T| = \frac{1}{2} mR^2 |\alpha_{\gamma 2}| \Rightarrow |\tau_T| = \frac{1}{2} \cdot 2\text{kg} \cdot (0,1\text{m})^2 \cdot 2 \frac{\text{rad}}{s^2} \Rightarrow$$

$$|\tau_T| = 0,02\text{Nm}.$$

Δ) Για την πρώτη φάση κίνησης του δίσκου, από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την στροφική κίνηση, υπολογίζουμε τη δύναμη F

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma 1} \Rightarrow \tau_F - |\tau_T| = I \alpha_{\gamma 1} \Rightarrow FR - |\tau_T| = \frac{1}{2} m R^2 \alpha_{\gamma 1} \Rightarrow F = \frac{\frac{1}{2} m R^2 \alpha_{\gamma 1} + |\tau_T|}{R} \Rightarrow$$

$$F = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kg} \cdot (0,1 \text{ m})^2 \cdot 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} + 0,02 \text{ Nm}}{0,1 \text{ m}} \Rightarrow F = 0,6 \text{ N}.$$

Το έργο της δύναμης F, για το χρονικό διάστημα που ενήργησε, ισούται με

$$W_F = \tau_F \theta_1 \Rightarrow W_F = FR \theta_1 \Rightarrow W_F = 0,6 \text{ N} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 50 \text{ rad} \Rightarrow W_F = 3 \text{ J}.$$

Ε) Ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας από την τριβή δίνεται από τη σχέση

$$\frac{dW_T}{dt} = \frac{(-\tau_T d\theta)}{dt} = -\tau_T \cdot \omega \quad (1)$$

Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τη χρονική στιγμή $t=10\text{s}$, δηλαδή 5 δευτερόλεπτα μετά την έναρξη της επιβραδυνόμενης κίνησης, είναι

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma 2}(t-5) = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}} + \left(-2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) \cdot 5 \text{ s} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

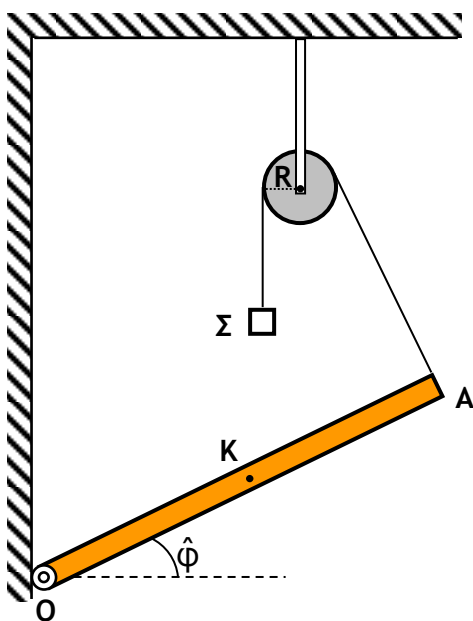
Από τη σχέση (1) με αντικατάσταση υπολογίζουμε τον ρυθμό κατανάλωσης ενέργειας από την τριβή

$$\frac{dW_T}{dt} = -\tau_T \cdot \omega = -0,02 \text{ Nm} \cdot 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dW_T}{dt} = -0,2 \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Η λεπτή, ομογενής ράβδος ΟΑ του σχήματος έχει μήκος L , μάζα M και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα (άρθρωση) που διέρχεται από το άκρο της Ο. Στο άλλο άκρο Α της ράβδου είναι δεμένο ένα αβαρές νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου είναι αναρτημένο, μέσω τροχαλίας ακτίνας R , ένα σώμα Σ μάζας $m_1 = 0,1\sqrt{5} \text{ kg}$.



Το νήμα είναι κάθετο στη ράβδο ΟΑ στο άκρο της Α. Η ράβδος, το σώμα Σ και η τροχαλία ισορροπούν ακίνητα, με τη ράβδο να σχηματίζει γωνία $\varphi = 45^\circ$ με το οριζόντιο δάπεδο. Να βρείτε:

α) το μέτρο της τάσης T_1 του νήματος στο σημείο Α.

β) τη μάζα M της ράβδου.

γ) το μήκος L της ράβδου, αν η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο είναι $I_O = 15\sqrt{10} \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

δ) Το μέτρο της δύναμης F που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο.

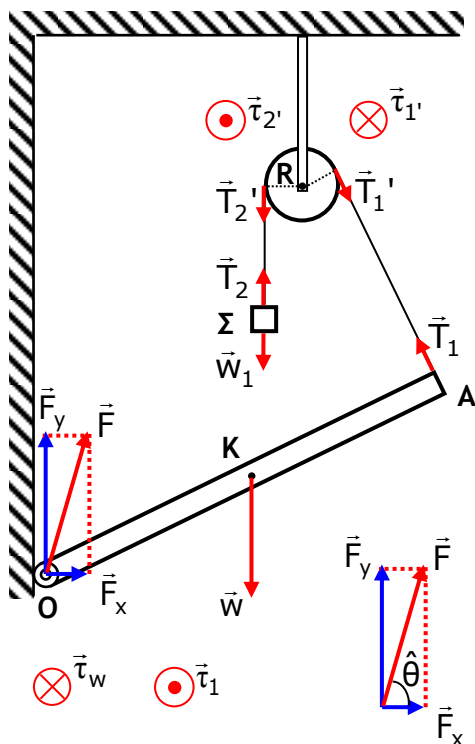
Δίνονται: Η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας

είναι $I_{cm} = \frac{1}{12} Ml^2$

Λύση

α) Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και στο σώμα, καθώς και οι δυνάμεις που ασκούν ροπή στην τροχαλία (ως προς τον άξονά της):



Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_1 = \vec{0} \Rightarrow T_2 = w_1 \Rightarrow T_2 = m_1 g \Rightarrow T_2 = \sqrt{5} \text{ N}$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές, έχουμε:

$$\vec{T}_2' = -\vec{T}_2 \Rightarrow T_2' = T_2 \Rightarrow T_2' = \sqrt{5} \text{ N}$$

Επειδή η τροχαλία ισορροπεί, ισχύει (ως προς τον άξονά της):

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow T_2' \cdot R = T_1' \cdot R \Rightarrow T_2' = T_1' \Rightarrow T_1' = \sqrt{5} \text{ N}$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές, έχουμε:

$$\vec{T}_1' = -\vec{T}_1 \Rightarrow T_1' = T_1 \Rightarrow T_1 = \sqrt{5} \text{ N}$$

β) Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει (ως προς τον άξονα που διέρχεται από το Ο):

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_1 = 0 \Rightarrow \tau_w = \tau_1 \Rightarrow \tau_w = T_1 \cdot L$$

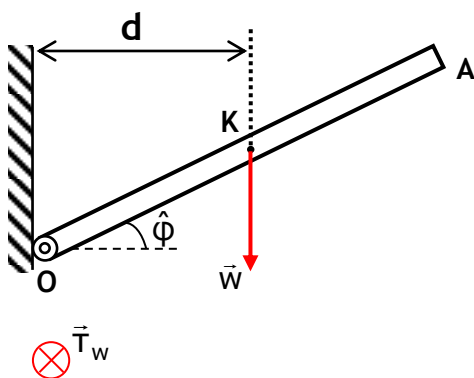
Το μέτρο της ροπής τ_w του βάρους της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο δίνεται από τον τύπο:

$\tau_w = w \cdot d$, όπου d είναι ο μοχλοβραχίονας του βάρους $\vec{w}$. Ισχύει ότι:

$$d = (OK) \cdot \sin \varphi \Rightarrow d = \frac{L}{2} \cdot \sin 45^\circ \Rightarrow d = \frac{L\sqrt{2}}{4}$$

Επομένως:

$$\tau_w = w \cdot d \Rightarrow \tau_w = Mg \cdot d \Rightarrow \tau_w = M \cdot 10 \cdot \frac{L\sqrt{2}}{4} (\text{SI}) \Rightarrow \tau_w = M \cdot \frac{5L\sqrt{2}}{2} (\text{SI})$$



Με αντικατάσταση στη σχέση $\tau_w = T_1 \cdot L$ έχουμε:

$$\tau_w = T_1 \cdot L \Rightarrow M \cdot \frac{5L\sqrt{2}}{2} = \sqrt{5} \cdot L \Rightarrow M = \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}} \text{ kg} \Rightarrow$$

$$M = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \text{ kg} \Rightarrow M = 0,2\sqrt{10} \text{ kg}$$

γ) Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας σχετίζονται με το θεώρημα Steiner.

$$I_{(O)} = I_{cm} + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 \Rightarrow I_{(O)} = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2 \Rightarrow I_{(O)} = \frac{1}{3} ML^2 \Rightarrow$$

$$L = \sqrt{\frac{3 \cdot I_{(O)}}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 15 \cdot \sqrt{10} \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2}{0,2 \cdot \sqrt{10} \text{ kg}}} \Rightarrow L = 0,15 \text{ m}$$

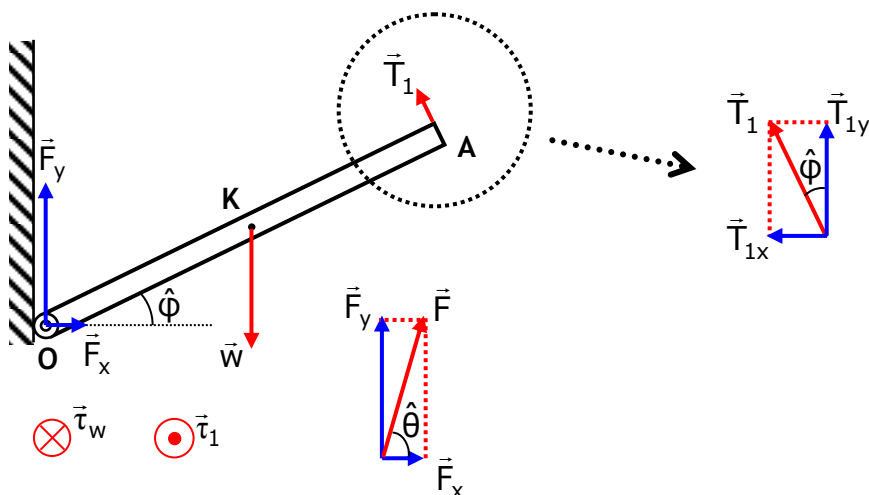
δ) Αναλύουμε την $\vec{T}_1$ σε δύο συνιστώσες: μία κατακόρυφη και μία οριζόντια, όπως έχει αναλυθεί και η $\vec{F}$. Επειδή η $\vec{T}_1$ είναι κάθετη στη ράβδο και η $\vec{T}_{1y}$ είναι κατακόρυφη, η γωνία που σχηματίζουν θα είναι ίση με τη γωνία $\hat{\phi}$ που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση (όπως φαίνεται στο σχήμα).

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow F_x = T_{1x} \Rightarrow F_x = T_1 \eta \mu \phi \Rightarrow F_x = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ N}$$

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow F_y + T_{1y} = w \Rightarrow F_y = Mg - T_1 \sigma \nu \nu \phi \Rightarrow$$

$$F_y = 2\sqrt{10} \text{ N} - \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ N} \Rightarrow F_y = \frac{3}{2} \sqrt{10} \text{ N}$$



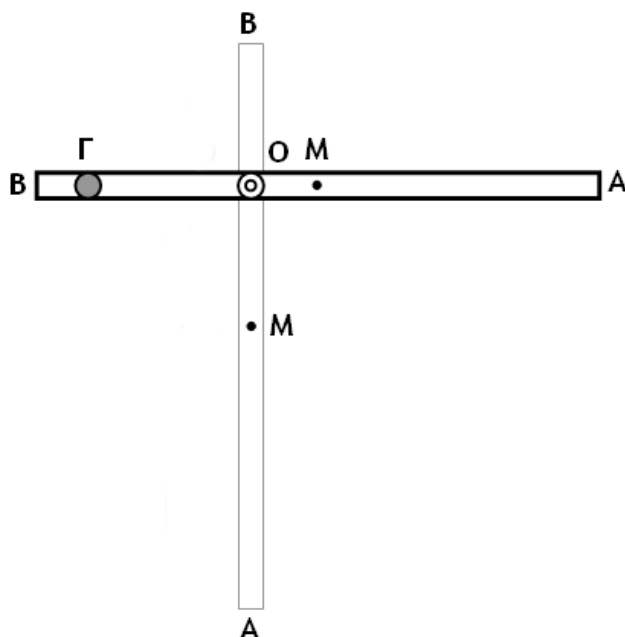
Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 \Rightarrow F^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ N} \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{2} \text{ N} \right)^2 \Rightarrow$$

$$F^2 = \left(\frac{10}{4} + \frac{90}{4} \right) \text{ N}^2 \Rightarrow F^2 = 25 \text{ N}^2 \Rightarrow F = 5 \text{ N}$$

Πρόβλημα 2.

Λεπτή ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΒΑ με μήκος $L = 0,6\sqrt{3} \text{ m}$ και μάζα $M = 5 \text{ kg}$ ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο σημείο της Ο υπάρχει ακλόνητη οριζόντια άρθρωση γύρω από την οποία η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές, ενώ στο σημείο Γ υπάρχει στερεωμένο αμελητέων διαστάσεων σφαιρίδιο μάζας m_1 . Η απόσταση (ΓΟ) είναι ίση με 30 cm , ενώ η απόσταση (ΟΜ) είναι ίση με 10 cm , όπου Μ είναι το μέσο της ράβδου ΒΑ.



α) Να υπολογίσετε τη μάζα m_1 .

β) Ενώ το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία προσκολλάμε στο σημείο Μ σημειακή μάζα $m_2 = \frac{65}{99} \text{ kg}$ με συνέπεια η ράβδος υπό την επίδραση της βαρύτητας να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από το σημείο Ο.

Να υπολογίσετε:

β1) Τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο Ο.

β2) Τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος ράβδου-μαζών στην οριζόντια θέση αμέσως μετά την προσκόλληση της μάζας m_2 .

β3) Τη στροφορμή συστήματος ράβδου-μαζών στην κατακόρυφη θέση.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} ML^2$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

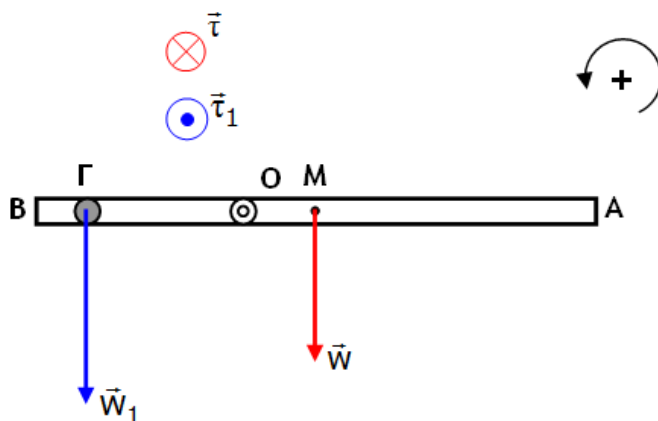
Λύση

α) Οι δυνάμεις που ασκούν ροπή στο σύστημα ράβδος - σφαιρίδιο είναι οι εξής:

το βάρος $\vec{w}$ της ράβδου, που ασκεί τη ροπή $\vec{\tau}$.

το βάρος $\vec{w}_1$ του σφαιριδίου, που ασκεί τη ροπή $\vec{\tau}_1$.

Οι κατευθύνσεις των ροπών φαίνονται στο σχήμα:



Για τη στροφική ισορροπία της ράβδου ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(O)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_{w_1} = 0 \quad (1)$$

Τα μέτρα των ροπών των δυνάμεων είναι:

$$\tau_w = w \cdot (OM) \Rightarrow \tau_w = Mg \cdot (OM) \Rightarrow \tau_w = 50\text{N} \cdot 10^{-1}\text{m} \Rightarrow \tau_w = 5\text{ Nm}$$

$$\tau_{w_1} = w_1 \cdot (\Gamma O) \Rightarrow \tau_{w_1} = m_1 g \cdot (\Gamma O) \Rightarrow \tau_{w_1} = m_1 \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 3 \cdot 10^{-1}\text{m} \Rightarrow \tau_{w_1} = m_1 \cdot 3\text{ (SI)}$$

Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \tau_{w_1} = \tau_w \Rightarrow m_1 \cdot 0,3 = 0,5 \Rightarrow m_1 = \frac{5}{3}\text{ kg}$$

β1) Για τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του ισχύει:

$$I_{\Sigma\text{ΣΤ}(O)} = I_{\text{Ραβδ}(O)} + m_1(O\Gamma)^2 + m_2(OM)^2 \quad (2)$$

Επειδή ο άξονας περιστροφής είναι παράλληλος σε οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Steiner για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της O:

$$I_{\text{Ραβδ}(O)} = I_{\text{cm}} + M \cdot (OM)^2 \Rightarrow I = \frac{1}{12} ML^2 + M \cdot (OM)^2 \Rightarrow$$

$$I_{\text{Ραβδ}(O)} = \left[\frac{1}{12} \cdot 5\text{kg} \cdot (0,6\sqrt{3}\text{m})^2 + 5\text{kg} \cdot (0,1\text{m})^2 \right] \Rightarrow I_{\text{Ραβδ}(O)} = 0,5 \text{ kgm}^2$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε:

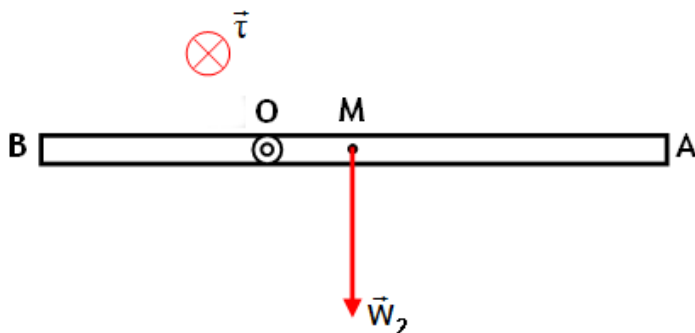
$$I_{\Sigma\text{ΣΤ}(O)} = I_{\text{Ραβδ}(O)} + m_1(O\Gamma)^2 + m_2(OM)^2 = 0,5\text{kgm}^2 + \frac{5}{3}\text{kg} \cdot (0,3\text{m})^2 + \frac{65}{99}\text{kg} \cdot (0,1\text{m})^2 \Rightarrow$$

$$I_{\Sigma\text{ΣΤ}(O)} = \frac{65}{99} \text{ kgm}^2$$

β2) Για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης της ράβδου στην οριζόντια θέση, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης. Οι ροπές του βάρους $\vec{w}$ της ράβδου και του βάρους $\vec{w}_1$ του σφαιριδίου αλληλοαναιρούνται, οπότε η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος θα οφείλεται μόνο στη ροπή του βάρους $\vec{w}_2$.

$$a_\gamma = \frac{\Sigma\tau_{(O)}}{I_{(O)}} = \frac{m_2 g(OM)}{I_{(O)}} \Rightarrow a_\gamma = \frac{\frac{65}{99} \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,1\text{m}}{\frac{65}{99} \text{ kgm}^2} \Rightarrow a_\gamma = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Η κατεύθυνση της επιτάχυνσης είναι ομόρροπη με την κατεύθυνση της συνολικής ροπής, η οποία φαίνεται στο σχήμα:



β3) Η στροφορμή του συστήματος θα βρεθεί από τη σχέση $L = I\omega$ (3)

Για την εύρεση του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας ω στην κατακόρυφη θέση θα χρησιμοποιήσουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας παίρνοντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που διέρχεται από την τελική θέση του κέντρου μάζας της ράβδου.

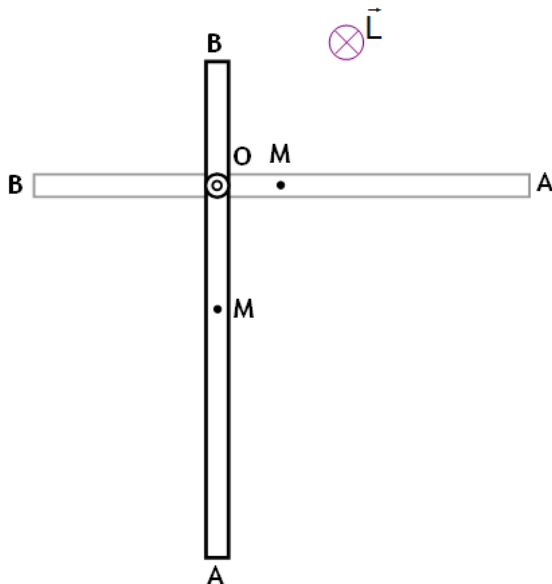
$$U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} = U_{\tau\epsilon\lambda} + K_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow (m_1 + m_2 + M)g(OM) + 0 = m_1g[(OM) + (O\Gamma)] + \frac{1}{2} I_{\Sigma\Upsilon\Upsilon\Gamma(O)} \omega^2 \Rightarrow$$

$$m_2g(OM) = \frac{1}{2} I_{\Sigma\Upsilon\Upsilon\Gamma(O)} \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2m_2g \cdot (OM)}{I_{\Sigma\Upsilon\Upsilon\Gamma(O)}} = \frac{2 \frac{65}{99} \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,1\text{m}}{\frac{65}{99} \text{ kgm}^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε:

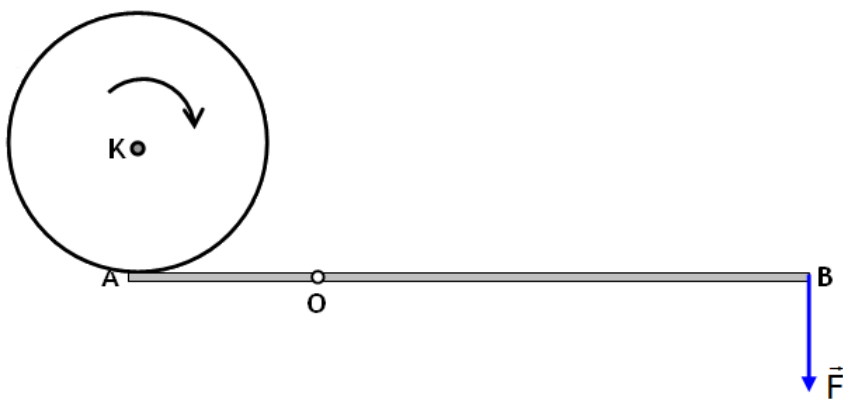
$$L = I\omega \Rightarrow L = \frac{65}{99} \text{ kgm}^2 \cdot \sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow L = \frac{65\sqrt{2}}{99} \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

Η κατεύθυνση της στροφορμής είναι ομόρροπη με την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας και φαίνεται στο σχήμα:



Πρόβλημα 3.

Ο τροχός του σχήματος έχει ακτίνα $R = 0,1\text{ m}$ και στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του με στροφορμή μέτρου $L_0 = 20 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$. Η ράβδος ΑΟΒ του σχήματος έχει μήκος $d = 0,4\text{ m}$, είναι αβαρής και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που περνά από το σημείο Ο και είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής του τροχού. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο άκρο Β της ράβδου κατακόρυφη δύναμη μέτρου $F = 400\text{ N}$ με αποτέλεσμα η ράβδος να εφάπτεται στον τροχό στο άκρο της Α. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, ενώ ο τροχός, λόγω τριβών στο σημείο επαφής με τη ράβδο, επιβραδύνεται και τελικά σταματά. Η τριβή ολίσθησης που ασκεί η ράβδος στον τροχό, όσο αυτός περιστρέφεται, έχει μέτρο $T_{ολ} = 10\text{ N}$.



Να βρείτε:

α) Την απόσταση (ΑΟ).

β) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του τροχού, $\frac{dL}{dt}$, κατά τη διάρκεια της στροφικής του κίνησης.

γ) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του τροχού, $\frac{dK}{dt}$, τη στιγμή που το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας είναι το μισό από το αρχικό.

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο τροχός ακινητοποιείται καθώς και τη μέση ισχύ $|P_{\mu}|$ της ροπής που τον ακινητοποίησε (σε απόλυτη τιμή).

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = 2\text{ kgm}^2$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ τροχού και της ράβδου $\mu = 0,1$.

Λύση

α) Η τριβή ολίσθησης που ασκεί η ράβδος ΑΟΒ στον τροχό, όσο αυτός περιστρέφεται, δίνεται από τον τύπο $T_{ολ} = \mu N$, όπου N η κάθετη δύναμη επαφής που ασκεί η ράβδος ΑΟΒ στον τροχό. Με επίλυση ως προς N και αντικατάσταση έχουμε

$$N = \frac{T_{ολ}}{\mu} = \frac{10N}{0,1} \Rightarrow N = 100 \text{ N}$$

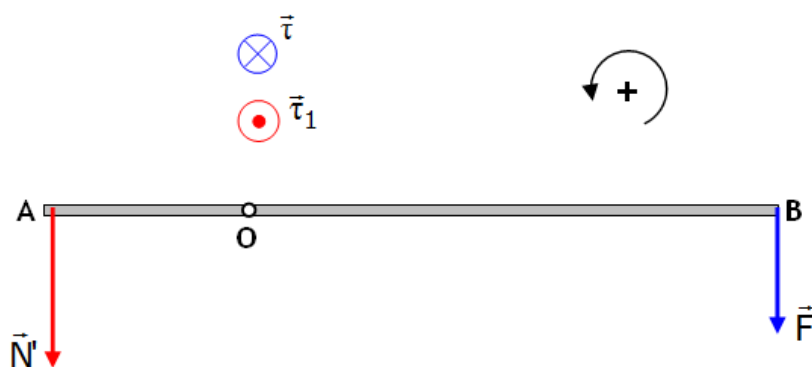
Από τον 3^ο Νόμο Newton, η κάθετη δύναμη επαφής που ασκεί η ράβδος ΑΟΒ στον τροχό έχει ίσο μέτρο με την κάθετη δύναμη επαφής N' που ασκεί ο τροχός στη ράβδο ΑΟΒ (βλ. το παρακάτω σχήμα). Επομένως: $N' = 100 \text{ N}$

Οι δυνάμεις που ασκούν ροπή στη ράβδο ΑΟΒ είναι οι εξής:

η κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$, που ασκεί τη ροπή $\vec{\tau}$

η κάθετη δύναμη επαφής $\vec{N}'$ που ασκεί ο τροχός στη ράβδο ΑΟΒ, που ασκεί τη ροπή $\vec{\tau}_1$.

Οι κατευθύνσεις των ροπών φαίνονται στο σχήμα:



Για να ισορροπεί η ράβδος ΑΟΒ σε οριζόντια θέση, πρέπει να ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \text{ (ως προς το σημείο O)} \quad (1)$$

Θέτουμε $(AO) = x$.

Τα μέτρα των ροπών των δυνάμεων είναι:

$$\tau = F \cdot (OB) \Rightarrow \tau = 400 \cdot (0,4 - x) \text{ (SI)} \Rightarrow \tau = 160 - 400x \text{ (SI)}$$

$$\tau_1 = N' \cdot x \Rightarrow \tau_1 = 100x \text{ (SI)}$$

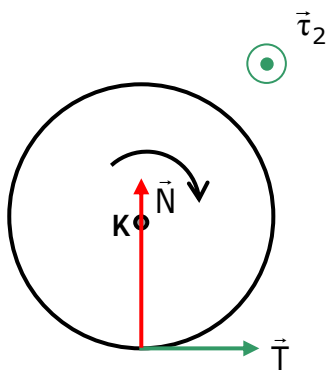
Με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \tau_1 = \tau \Rightarrow 160 - 400x = 100x \Rightarrow 500x = 160 \Rightarrow (AO) = 0,32 \text{ m}$$

β) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του τροχού κατά τη διάρκεια της στροφικής του κίνησης ισούται με το μέτρο της συνολικής ροπής που ασκείται στον

$$\text{τροχό: } \frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \quad (2)$$

Η μόνη δύναμη που ασκεί ροπή στον τροχό είναι η τριβή ολίσθησης, η οποία είναι σταθερή. Η κατεύθυνση της ροπής φαίνεται στο σχήμα.



Το μέτρο της ροπής της τριβής ολίσθησης είναι:

$$\tau_2 = T_{ολ} \cdot R = 10\text{N} \cdot 0,1\text{m} \Rightarrow \tau_2 = 1 \text{ Nm}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = \tau_2 \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega \quad (3)$$

Το μέτρο της αρχικής γωνιακής ταχύτητας ω_0 βρίσκεται από τον τύπο: $L_0 = I \cdot \omega_0$. Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\omega_0 = \frac{L_0}{I} = \frac{20\text{kgm}^2/\text{s}}{2\text{kgm}^2} \Rightarrow \omega_0 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Επομένως, όταν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι το μισό από το αρχικό θα είναι:

$$\omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = (-1\text{Nm}) \cdot 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -5 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο τροχός ακινητοποιείται θα ισχύει $L_1 = 0$.

Επειδή $\frac{dL}{dt} = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = \text{σταθ. έχουμε στο (SI):}$

$$\left| \frac{\Delta L}{\Delta t} \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{0 - L_0}{t_1 - 0} \right| = 1 \Rightarrow \frac{20}{t_1} = 1 \Rightarrow t_1 = 20 \text{ s}$$

Η μέση ισχύς $|P_\mu|$ της ροπής που ακινητοποίησε τον τροχό (σε απόλυτη τιμή) δίνεται από τον τύπο: $|P_\mu| = \left| \frac{W}{t_1} \right|$, όπου W το έργο της ροπής που ακινητοποίησε τον τροχό.

Από το Θεώρημα Έργου - Ενέργειας, για τη στροφική κίνηση αν θέσουμε ως αρχική τη στιγμή $t_0 = 0$ και ως τελική τη στιγμή $t_1 = 20 \text{ s}$, έχουμε:

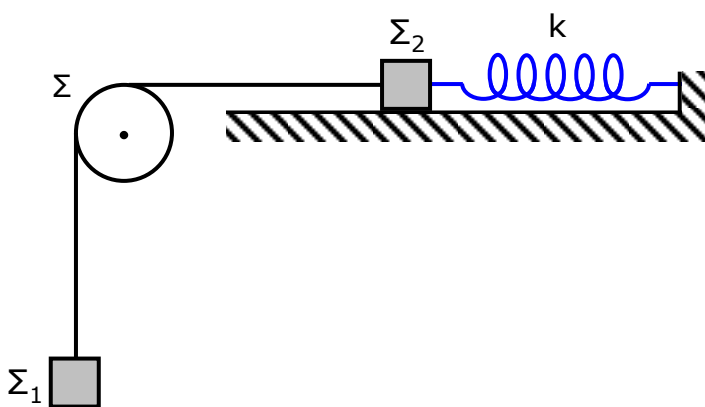
$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 = W \Rightarrow W = -\frac{1}{2} I \omega_0^2 \Rightarrow W = -100 \text{ J}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $|P_\mu| = \left| \frac{W}{t_1} \right|$ έχουμε:

$$|P_\mu| = \frac{W}{t_1} \Rightarrow |P_\mu| = \frac{100\text{J}}{20\text{s}} \Rightarrow |P_\mu| = 5 \text{ W}$$

Πρόβλημα 4.

Η τροχαλία Σ του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της, είναι $I = 0,01 \text{ kgm}^2$ και η ακτίνα της είναι $R = 0,1 \text{ m}$. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο πολλές φορές λεπτό αβαρές και μη εκτατό νήμα, το οποίο δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία. Στη μία άκρη του νήματος έχει αναρτηθεί το σώμα Σ_1 . Στην άλλη άκρη του νήματος έχει προσδεθεί το σώμα Σ_2 , το οποίο βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα ισορροπεί ακίνητο με τη βοήθεια ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, στο οποίο έχει προσδεθεί στο ένα άκρο του το σώμα Σ_2 , ενώ το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο σε ακλόνητο στήριγμα. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζα $m = 1 \text{ kg}$ το καθένα.



α) Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης $F_{ελ}$ που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ_2 , όταν το σύστημα ισορροπεί.

β) Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κόβουμε το νήμα στο σημείο που συνδέει το σώμα Σ_2 με την τροχαλία, με αποτέλεσμα η τροχαλία να ξεκινήσει να περιστρέφεται και το σύστημα ελατήριο - Σ_2 να ξεκινήσει απλή αρμονική ταλάντωση.

Να βρείτε:

β1) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ της τροχαλίας.

β2) Πόσο έχει κατέβει το σώμα Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας γίνεται αριθμητικά ίσο με τη γωνιακή συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συστήματος ελατήριο - Σ_2 .

Β3) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας $\frac{dK}{dt}$ τη χρονική στιγμή t_1 όπως αυτή καθορίζεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Δίνεται: $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα και στην τροχαλία:

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_1 :

η δύναμη $\vec{w}$ είναι το βάρος του σώματος,

η δύναμη $\vec{T}_1$ ασκείται από το κατακόρυφο νήμα.

Επίσης φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_2 :

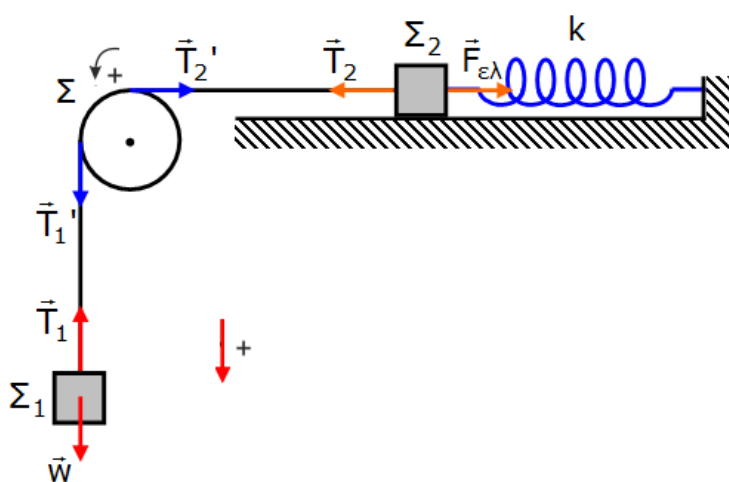
η δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ ασκείται από το ελατήριο,

η δύναμη $\vec{T}_2$ ασκείται από το οριζόντιο νήμα.

Στην τροχαλία Σ έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούν ροπή:

η δύναμη $\vec{T}_1'$ ασκείται από το κατακόρυφο νήμα,

η δύναμη $\vec{T}_2'$ ασκείται από το οριζόντιο νήμα.



Για την ισορροπία του Σ_1 έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_1 = \vec{0} \Rightarrow T_1 = w \Rightarrow T_1 = mg \Rightarrow T_1 = 10 \text{ N}$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές ισχύει:

$$T_1' = T_1 = 10 \text{ N}$$

Για την ισορροπία της τροχαλίας Σ έχουμε:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow T_2' R = T_1' R \Rightarrow T_2' = T_1' = 10 \text{ N}$$

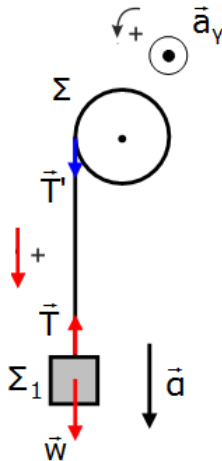
Επειδή το νήμα είναι αβαρές ισχύει:

$$T_2' = T_2 = 10 \text{ N}$$

Για την ισορροπία του Σ₂ έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow F_{ελ} = T_2 \Rightarrow F_{ελ} = 10 \text{ N}$$

Β1) Μόλις κόψουμε το νήμα, η τροχαλία θα ξεκινήσει να περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_\gamma$ και το Σ₁ να κατεβαίνει με επιτάχυνση $\vec{a}$. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ₁ και η δύναμη που ασκεί ροπή στην τροχαλία.



Για τη μεταφορική κίνηση του Σ₁ ισχύει η Θεμελιώδης Εξίσωση της Μηχανικής:

$$\Sigma F_1 = m\alpha \Rightarrow w - T = m\alpha \Rightarrow T = mg - m\alpha \quad (1)$$

Για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας Σ ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση

$$\Sigma \tau = I a_\gamma \Rightarrow T' R = I a_\gamma \Rightarrow T R = I a_\gamma$$

και με αντικατάσταση της T από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$(mg - m\alpha)R = Ia_\gamma \Rightarrow mgR - mR\alpha = Ia_\gamma \quad (2)$$

Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία, η επιτρόχια επιτάχυνση $a_\gamma R$ των σημείων της περιφέρειάς της είναι ίση κατά μέτρο με την επιτάχυνση α του Σ_1 : $\alpha = a_\gamma R$.

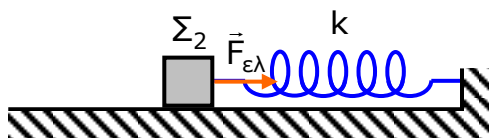
Με αντικατάσταση στην (2) έχουμε:

$$mgR - mR\alpha = Ia_\gamma \Rightarrow mgR - mR^2 a_\gamma = Ia_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{mgR}{I + mR^2} \Rightarrow$$

$$a_\gamma = \frac{1\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 0,1\text{m}}{0,01\text{kgm}^2 + 1\text{kg}(0,1\text{m})^2} \Rightarrow a_\gamma = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

β2) Μόλις κόψουμε το νήμα, το Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή

$$\text{συχνότητα } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100\text{N/m}}{1\text{kg}}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$



Ψάχνουμε πόσο θα έχει κατέβει το σώμα Σ_1 όταν η τροχαλία περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία, το σώμα Σ_1 θα έχει κατέβει κατά h που είναι ίσο με το μήκος Δs του σχοινιού που ξετυλίχτηκε, $h = \Delta s = R\theta$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Έργου - Ενέργειας για την περιστροφή της τροχαλίας. Θεωρούμε ως αρχική θέση τη θέση στην οποία βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και ως τελική τη θέση για την οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας γίνεται $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Το μοναδικό έργο είναι αυτό της τάσης του νήματος. Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T \Rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 - 0 = T' \cdot R \cdot \theta \Rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 = T' \cdot h \quad (3)$$

Το T' βρίσκεται με αντικατάσταση της τιμής $a_\gamma = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ στη σχέση $TR = Ia_\gamma$, έχουμε:

$$T \cdot 0,1\text{m} = 0,01\text{kgm}^2 \cdot 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow T = T' = 5 \text{ N} .$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \cdot 0,01\text{kgm}^2 \cdot \left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = 5\text{N} \cdot h \Rightarrow h = 0,1\text{m}$$

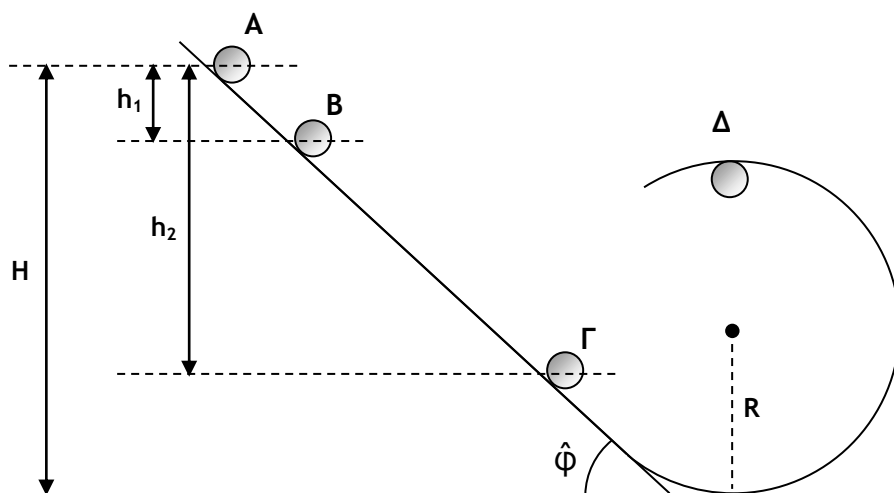
β3) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας $\frac{dK}{dt}$ τη χρονική στιγμή

t_1 δίνεται από τον τύπο: $\frac{dK}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega$. Με αντικατάσταση, έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = T' \cdot R \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 5\text{N} \cdot 0,1\text{m} \cdot 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 5 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Πρόβλημα 5.

Μια συμπαγής ομογενής σφαίρα μάζας $m = 0,7 \text{ kg}$ και ακτίνας r , αφήνεται από το σημείο Α ενός πλάγιου επιπέδου που σχηματίζει γωνία $\hat{\phi}$ με το οριζόντιο δάπεδο. Το σημείο Α βρίσκεται σε ύψος $H = 84 \text{ cm}$ από το οριζόντιο δάπεδο. Η σφαίρα καθώς κατέρχεται κυλιόμενη διέρχεται από τα σημεία Β και Γ που απέχουν από το σημείο Α κατακόρυφη απόσταση h_1 και h_2 αντίστοιχα, με $h_2 = 4h_1$. Μόλις η σφαίρα φτάσει στη βάση του πλάγιου επιπέδου, μπαίνει σε κυκλική στεφάνη ακτίνας $R = 28 \text{ cm}$. Η σφαίρα κυλιόμενη εντός της κυκλικής στεφάνης εκτελεί ανακύκλωση.



α) Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας, α_{cm} , της σφαίρας κατά την κίνησή της στο πλάγιο επίπεδο.

β) Να βρείτε το λόγο των μέτρων $\frac{L_B}{L_\Gamma}$ των στροφορμών της σφαίρας στις θέσεις Β και Γ.

γ) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας v_{cm} στο ανώτερο σημείο της στεφάνης (σημείο Δ στο σχήμα).

δ) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης N που δέχεται η σφαίρα από τη στεφάνη στο σημείο Δ.

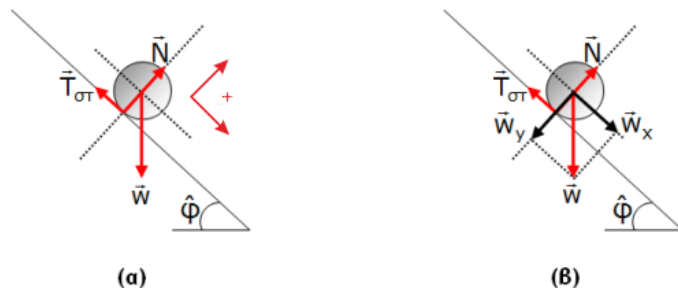
Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_{\text{cm}} = \frac{2}{5}mr^2$, $\eta\mu\hat{\phi} = 0,7$. Η ακτίνα της σφαίρας r είναι πολύ μικρή σε σχέση

με την ακτίνα R της στεφάνης, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα.

Στο σχήμα (α) φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα καθώς κατέρχεται στο πλάγιο επίπεδο. Στο σχήμα (β) έχει αναλυθεί το βάρος $\vec{w}$ σε δύο συνιστώσες:



Για τη μεταφορική κίνηση της σφαίρας ισχύει η Θεμελιώδης Εξίσωση της Μηχανικής:

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_{cm} \Rightarrow w_x - T_{\sigma t} = m\alpha_{cm} \Rightarrow T_{\sigma t} = mg\eta\mu\phi - m\alpha_{cm} \quad (1)$$

Για τη στροφική κίνηση της σφαίρας ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης:

$$\Sigma \vec{\tau} = I\vec{a}_\gamma \Rightarrow T_{\sigma t} \cdot r = \frac{2}{5}mr^2a_\gamma \Rightarrow T_{\sigma t} = \frac{2}{5}mra_\gamma$$

Επειδή η σφαίρα κατέρχεται κυλιόμενη $\alpha_{cm} = a_\gamma r$, οπότε η τελευταία σχέση γίνεται $T_{\sigma t} = \frac{2}{5}m\alpha_{cm}$ (2)

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) έχουμε:

$$T_{\sigma t} = mg\eta\mu\phi - m\alpha_{cm} \Rightarrow \frac{2}{5}m\alpha_{cm} + m\alpha_{cm} = mg\eta\mu\phi \Rightarrow \frac{7}{5}\alpha_{cm} = g\eta\mu\phi \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{5}{7} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,7 \Rightarrow \alpha_{cm} = 5 \frac{m}{s^2}$$

β) Για το λόγο $\frac{L_B}{L_\Gamma}$ των δύο στροφορμών ισχύει:

$$\frac{L_B}{L_\Gamma} = \frac{I\omega_B}{I\omega_\Gamma} \Rightarrow \frac{L_B}{L_\Gamma} = \frac{\omega_B}{\omega_\Gamma} \quad (3)$$

Τα ω_B , ω_Γ θα βρεθούν από τη διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ της θέσης Α και των θέσεων Β, Γ αντίστοιχα. Επειδή η σφαίρα κατέρχεται κυλιόμενη ($v_{cm} = \omega r$), η κινητική της ενέργεια μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} (m r^2 \omega^2 + \frac{2}{5} m r^2 \omega^2) \Rightarrow K = \frac{1}{2} m (r^2 \omega^2 + \frac{2}{5} r^2 \omega^2) \Rightarrow$$

$$K = \frac{7}{10} m r^2 \omega^2 \text{ ή } K = \frac{7}{10} m v_{cm}^2 \quad (4), (5)$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Β και γράφοντας την κινητική ενέργεια με τη μορφή της σχέσης (4) έχουμε (επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο Β):

$$U_B + K_B = U_A + K_A \Rightarrow 0 + \frac{7}{10} m r^2 \omega_B^2 = m g h_1 \Rightarrow \omega_B^2 = \frac{10}{7} \frac{g}{r^2} h_1 \Rightarrow \omega_B = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{10 g}{7} h_1}$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ έχουμε (επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από το σημείο Γ):

$$U_\Gamma + K_\Gamma = U_A + K_A \Rightarrow 0 + \frac{7}{10} m r^2 \omega_\Gamma^2 = m g h_2 \Rightarrow \omega_\Gamma^2 = \frac{10}{7} \frac{g}{r^2} h_2 \Rightarrow \omega_\Gamma = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{10 g}{7} h_2}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε:

$$\frac{L_B}{L_\Gamma} = \frac{\omega_B}{\omega_\Gamma} = \frac{\frac{1}{r} \sqrt{\frac{10 g}{7} h_1}}{\frac{1}{r} \sqrt{\frac{10 g}{7} h_2}} \Rightarrow \frac{L_B}{L_\Gamma} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{L_B}{L_\Gamma} = \frac{1}{2}$$

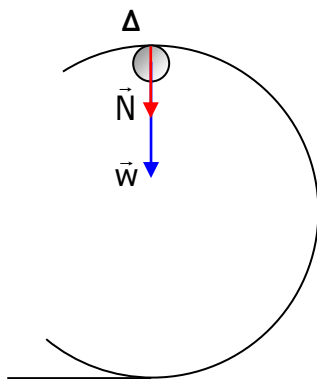
γ) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας, θέτοντας ως αρχική τη θέση Α και ως τελική τη θέση Δ. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $r \ll R$ και γράφοντας την κινητική ενέργεια με τη μορφή της σχέσης (5), έχουμε:

$$U_\Delta + K_\Delta = U_A + K_A \Rightarrow m g 2R + \frac{7}{10} m v_{cm}^2 = m g H + 0 \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7} g (H - 2R)} \Rightarrow$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot (0,84m - 0,56m)} \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{100}{7} \cdot 0,28 \frac{m}{s}} \Rightarrow v_{cm} = 2 \frac{m}{s}$$

δ) Η σφαίρα φτάνοντας στο ανώτερο σημείο Δ της κυκλικής διαδρομής, δέχεται συνισταμένη (κεντρομόλο) δύναμη στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\Sigma F (= F_{\text{κεντρ}}) = \frac{mv_{\text{cm}}^2}{R}$$



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στο σημείο Δ είναι το βάρος της $\vec{w}$ και η δύναμη από τη στεφάνη $\vec{N}$. Με αντικατάσταση έχουμε:

$$mg + N = \frac{mv_{\text{cm}}^2}{R} \Rightarrow N = \frac{mv_{\text{cm}}^2}{R} - mg = \frac{0,7\text{kg} \cdot (2\text{m/s})^2}{0,28\text{m}} - 0,7\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \Rightarrow$$

$$N = 3\text{N}$$

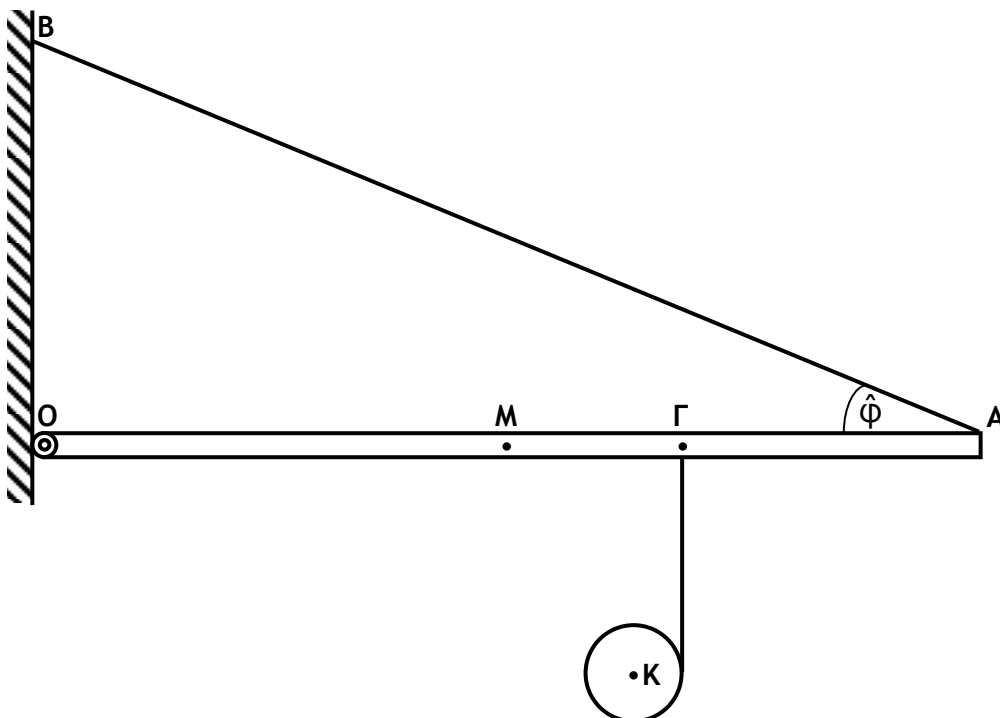
Πρόβλημα 6.

Η ομογενής ράβδος ΟΑ του σχήματος έχει μάζα $M = 4 \text{ kg}$ και μήκος $L = 2 \text{ m}$. Η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια άρθρωσης στο άκρο Ο και νήματος που είναι δεμένο στο άκρο Α και σχηματίζει γωνία 30° με τη ράβδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Από ένα σημείο Γ της ράβδου έχει δεθεί μέσω αβαρούς σχοινιού ένα γιο-γιο μάζας $m = 12 \text{ kg}$, ο κύλινδρος του οποίου έχει ακτίνα $R = 0,1 \text{ m}$. Το γιο-γιο ελευθερώνεται και κατέρχεται διαγράφοντας κατακόρυφη τροχιά, χωρίς ποτέ το σχοινί να γλιστρά. Καθώς το γιο-γιο κατέρχεται το νήμα ΑΒ ασκεί στη ράβδο δύναμη μέτρου $T = 100 \text{ N}$. Να βρείτε:

- το μέτρο της επιτάχυνσης a_{cm} του κέντρου μάζας Κ του γιο-γιο.
- το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του γιο-γιο ως προς τον ελεύθερο άξονα περιστροφής του, που περνά από το κέντρο του Κ.
- την απόσταση (ΟΓ).
- τη δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο (μέτρο και διεύθυνση ως προς τον οριζόντιο άξονα).

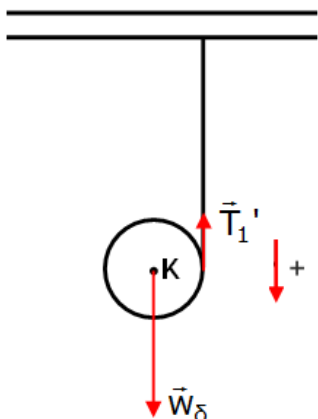
Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του γιο-γιο ως προς τον ελεύθερο άξονα περιστροφής του

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m R^2, \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο γιο-γιο:



Εφαρμόζουμε τη Θεμελιώδη Εξίσωση της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του γιο-γιο:

$$\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_{cm} \Rightarrow w_\delta - T_1' = m\alpha_{cm} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση του γιο-γιο:

$$\Sigma \tau = I_{cm} a_\gamma \Rightarrow T_1' \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 a_\gamma \Rightarrow T_1' = \frac{1}{2} m R a_\gamma \quad (2)$$

Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στο γιο-γιο, το τόξο ds κατά το οποίο έχει στραφεί η περιφέρειά του σε χρόνο dt , θα είναι ίσο με την απόσταση dy κατά την οποία έχει ξετυλιχθεί το νήμα, άρα και ίσο με την απόσταση dy κατά την οποία έχει κατέβει το γιο-γιο. Επομένως:

$$dy = ds = d\theta \cdot R \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot R \Rightarrow$$

$$\frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \Rightarrow \alpha_{cm} = a_\gamma \cdot R$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση $\alpha_{cm} = a_\gamma \cdot R$ στη σχέση (2) έχουμε:

$$T_1' = \frac{1}{2} m \alpha_{cm} \quad (3)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) της T_1' από τη σχέση (3) έχουμε:

$$w_{\delta} - \frac{1}{2} m \alpha_{\text{cm}} = m \alpha_{\text{cm}} \Rightarrow \frac{3}{2} m \alpha_{\text{cm}} = mg \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = \frac{2}{3} g \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = \frac{20}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται με τη συνολική ροπή που ασκείται στο γιο-γιο. Επειδή το βάρος ασκείται στον ελεύθερο άξονα περιστροφής, μόνο η τάση του νήματος ασκεί ροπή στο γιο-γιο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \Rightarrow \frac{dL}{dt} = T_1' \cdot R \quad (4)$$

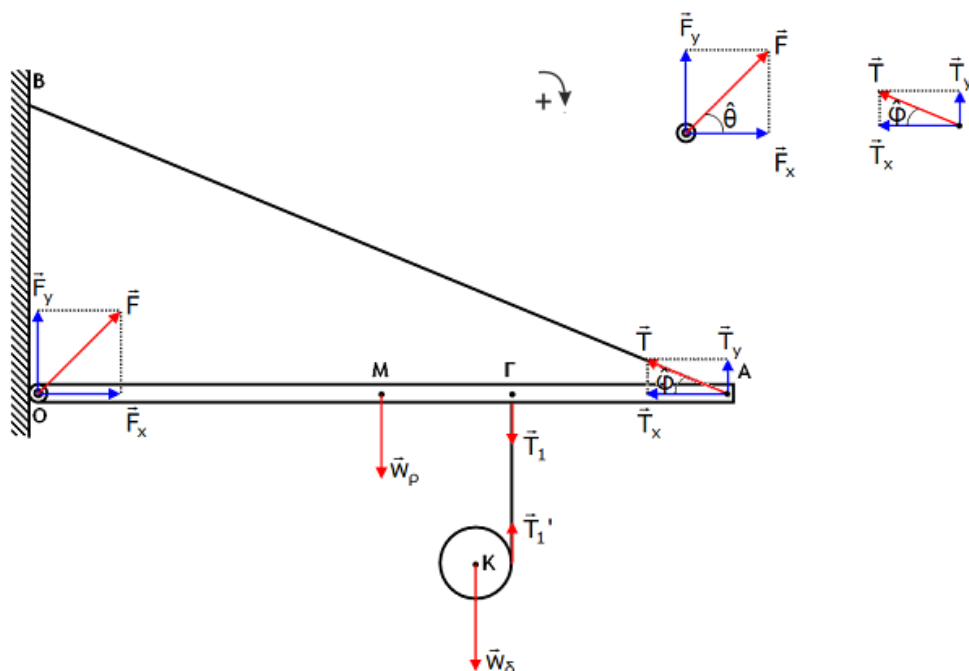
Το μέτρο της T_1' υπολογίζεται από τη σχέση (3) με αντικατάσταση του α_{cm} .

$$\text{Έχουμε } T_1' = \frac{1}{2} 12 \text{kg} \cdot \frac{20}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow T_1' = 40 \text{N}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (4) παίρνουμε

$$\frac{dL}{dt} = 40 \text{N} \cdot 0,1 \text{m} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 4 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

γ) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο.



Από την ανάλυση της τάσης του νήματος $\vec{T}$ έχουμε:

$$T_x = T \cdot \sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow T_x = 100\text{N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T_x = 50\sqrt{3}\text{ N}$$

$$T_y = T \cdot \eta\mu\phi \Rightarrow T_y = 100\text{N} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow T_y = 50\text{ N}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ότι: $\Sigma \vec{\tau} = \vec{0}$. Παίρνοντας ροπές ως προς το σημείο O, έχουμε:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \tau_w + \tau_{T_1} = \tau_{T_y} \Rightarrow w_p \cdot \frac{L}{2} + T_1 \cdot (OG) = T_y \cdot L \quad (5)$$

Το μέτρο του βάρους της ράβδου είναι: $w_p = Mg \Rightarrow w_p = 40\text{ N}$

Το μέτρο της T_1 είναι ίδιο με το μέτρο της T_1' , οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (5) παίρνουμε:

$$40\text{N} \cdot \frac{2}{2}\text{m} + 40\text{N} \cdot (OG) = 50\text{N} \cdot 2\text{m} \Rightarrow (OG) = 1,5\text{ m}$$

δ) Επειδή η ράβδος ισορροπεί, ισχύει ότι:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow F_x - T_x = 0 \Rightarrow F_x = 50\sqrt{3} \text{ N}$$

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow F_y + T_y - w_p - T_1 = 0 \Rightarrow F_y + 50\text{N} - 40\text{N} - 40\text{N} = 0 \Rightarrow F_y = 30 \text{ N}$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

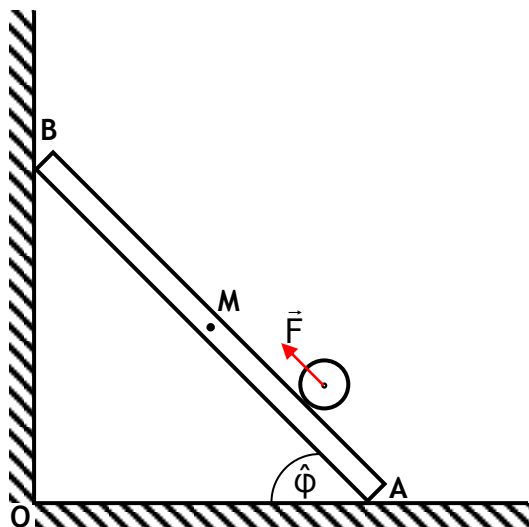
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{8400} \text{ N} \Rightarrow F = 20\sqrt{21} \text{ N}$$

Για τη διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$ υπολογίζουμε την εφθ:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Πρόβλημα 7.

Η λεπτή ομογενής δοκός AB του σχήματος μήκους $L = 7,5\sqrt{2}$ m και μάζας $M = 20$ kg ακουμπά σε λείο κατακόρυφο τοίχο OB και ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία $\hat{\phi} = 45^\circ$ με το οριζόντιο δάπεδο. Ένας ομογενής, λεπτός δίσκος μάζας $m = 1$ kg και ακτίνας R κυλιέται (χωρίς να ολισθαίνει) κατά μήκος της δοκού προς το άκρο B, υπό την επίδραση δύναμης μέτρου $F = 20\sqrt{2}$ N, παράλληλης στη δοκό, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Να βρείτε:

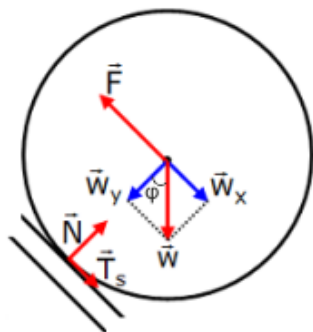
- το μέτρο της επιτάχυνσης a_{cm} του κέντρου μάζας του δίσκου.
- το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας v_{cm} του δίσκου τη στιγμή που φτάνει στο ανώτερο σημείο B της δοκού, αν ο δίσκος ξεκίνησε να κινείται από τη βάση A χωρίς ταχύτητα.
- Το μέτρο και τη διεύθυνση της δύναμης $\vec{A}$ που ασκεί ο δίσκος στη ράβδο.
- Τον ελάχιστο συντελεστή οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και δαπέδου ώστε ο δίσκος να φτάσει στο άκρο B της δοκού, χωρίς η δοκός να ολισθήσει στο δάπεδο.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$,

$$g = 10 \frac{m}{s^2}$$

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο.



Για τις συνιστώσες w_x και w_y του βάρους του δίσκου έχουμε:

$$w_x = w \eta \mu \varphi \Rightarrow w_x = mg \eta \mu 45^\circ \Rightarrow w_x = 5\sqrt{2} \text{ N}$$

$$w_y = w \sigma \upsilon \nu \varphi \Rightarrow w_y = mg \sigma \upsilon \nu 45^\circ \Rightarrow w_y = 5\sqrt{2} \text{ N}$$

Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου:

$$\Sigma \vec{F}_x = m \vec{a}_{cm} \Rightarrow F - w_x - T_s = m a_{cm} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση του δίσκου ως προς τον ελεύθερο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του:

$$\Sigma \tau = I_{cm} a_\gamma \Rightarrow T_s \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 a_\gamma \Rightarrow T_s = \frac{1}{2} m R a_\gamma \quad (2)$$

Επειδή ο δίσκος εκτελεί κύλιση (χωρίς ολίσθηση) ισχύει: $a_{cm} = a_\gamma \cdot R$

Με αντικατάσταση της τελευταίας σχέσης στη σχέση (2) προκύπτει

$$T_s = \frac{1}{2} m a_{cm} \quad (3)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) των F , T_s και w_x υπολογίζουμε το a_{cm} .

$$F - w_x - T_s = m a_{cm} \Rightarrow 20\sqrt{2} \text{ N} - 5\sqrt{2} \text{ N} - \frac{1}{2} m a_{cm} = m a_{cm} \Rightarrow 15\sqrt{2} \text{ N} = \frac{3}{2} m a_{cm} \Rightarrow$$

$$a_{cm} = 10\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

β) Ο δίσκος ανέρχεται με σταθερή επιτάχυνση, άρα οι εξισώσεις της κινηματικής για τη μεταφορική κίνηση γράφονται:

$$v_{cm} = \alpha_{cm} t, \quad L = \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2$$

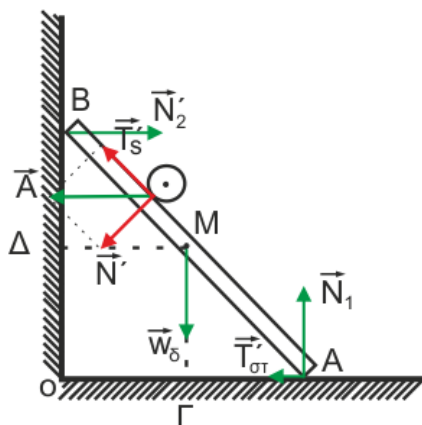
Λύνοντας την πρώτη σχέση ως προς το χρόνο και αντικαθιστώντας στην δεύτερη

$$\text{παίρνουμε: } L = \frac{1}{2} \alpha_{cm} \left(\frac{v_{cm}}{\alpha_{cm}} \right)^2 \Rightarrow L = \frac{v_{cm}^2}{2\alpha_{cm}} \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{2L\alpha_{cm}}$$

Με αντικατάσταση των L , α_{cm} βρίσκουμε:

$$v_{cm} = \sqrt{2 \cdot 7,5\sqrt{2}\text{m} \cdot 10\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow v_{cm} = 10\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Ο δίσκος ασκεί στη δοκό τις δυνάμεις T_s' και N' . Η T_s' έχει ίδιο μέτρο με την T_s (δράση - αντίδραση) και η N' με την N (επίσης δράση-αντίδραση).



Από τη σχέση (3) με αντικατάσταση υπολογίζουμε την T_s , έχουμε:

$$T_s = \frac{1}{2} m \alpha_{cm} = \frac{1}{2} 1\text{kg} \cdot 10\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow T_s = 5\sqrt{2}\text{N}$$

$$\text{Άρα } T_s' = 5\sqrt{2}\text{ N} \quad (4)$$

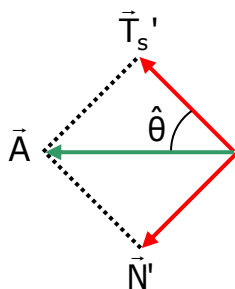
Για τον άξονα τον κάθετο στην κίνηση του δίσκου (άξονας $y'y$) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow N = w_y \Rightarrow N = 5\sqrt{2}\text{ N}$$

$$\text{Άρα } N' = 5\sqrt{2} \text{ N} \quad (5)$$

Από τις (4) και (5) και επειδή οι δυνάμεις $\vec{T}_s'$ και $\vec{N}'$ είναι κάθετες, με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε:

$$A = \sqrt{N'^2 + T_s'^2} \Rightarrow A = \sqrt{(5\sqrt{2}N)^2 + (5\sqrt{2}N)^2} \Rightarrow A = 10 \text{ N}$$

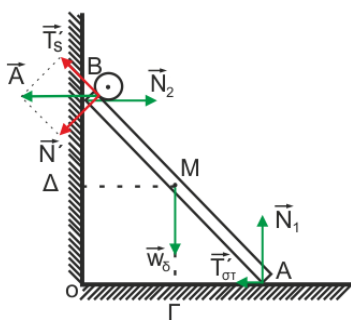


Από το σχήμα φαίνεται ότι:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{N'}{T_s'} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = 1 \Rightarrow \hat{\theta} = 45^\circ$$

Άρα η δύναμη $\vec{A}$ είναι οριζόντια δύναμη, παράλληλη προς το δάπεδο.

δ)



Εφαρμόζουμε τις συνθήκες ισορροπίας για τη δοκό:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow N_1 = w_\delta \Rightarrow N_1 = Mg \Rightarrow N_1 = 200 \text{ N}$$

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow N_2 = T_{\sigma\tau} + A \Rightarrow N_2 = T_{\sigma\tau} + 10 \text{ (SI)} \quad (6)$$

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow N_2 \cdot (OB) = w_{\delta} \cdot (AG) + A \cdot (OB) \Rightarrow$$

$$N_2 \cdot L \eta \mu \varphi = Mg \cdot \frac{L}{2} \sigma \upsilon \nu \varphi + A \cdot L \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$N_2 = \frac{Mg}{2} + A = \frac{200N}{2} + 10N \Rightarrow N_2 = 110N$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (6) βρίσκουμε $T_{\sigma\tau} = 100N$

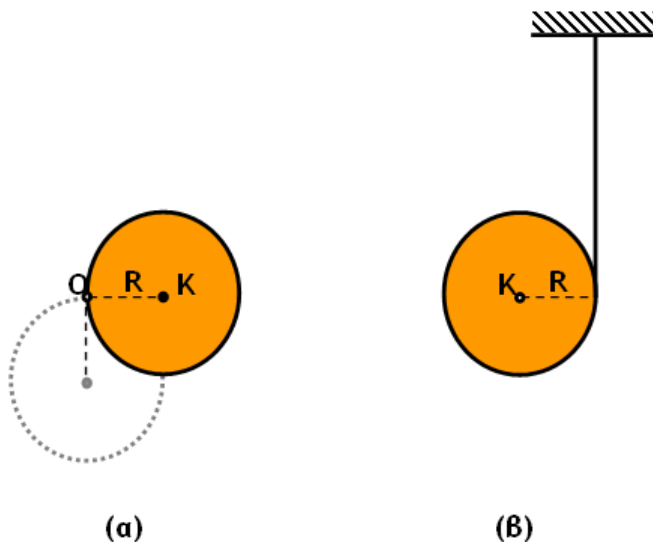
Για να μην ολισθήσει η δοκός πρέπει:

$$T_{\sigma\tau} \leq T_{\sigma\tau(\max)} \Rightarrow T_{\sigma\tau} \leq \mu N_1 \Rightarrow 100N \leq \mu \cdot 200N \Rightarrow \mu \geq 0,5$$

Άρα $\mu_{s,\min} = 0,5$

Πρόβλημα 8.

Ο λεπτός ομογενής δίσκος του σχήματος (α) έχει μάζα $M = 9 \text{ kg}$, ακτίνα $R = \frac{1}{30} \text{ m}$ και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το σημείο O της περιφέρειάς του.



Αρχικά ο δίσκος βρίσκεται σε τέτοια θέση, ώστε η ακτίνα OK που συνδέει το σημείο O με το κέντρο μάζας K του δίσκου (που συμπίπτει με το κέντρο του δίσκου), να είναι οριζόντια. Από αυτή τη θέση αφήνουμε το δίσκο να στραφεί. Η γωνιακή επιτάχυνση με την οποία ο δίσκος ξεκινά τη στροφική του κίνηση έχει μέτρο $a_\gamma = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Να βρείτε:

α) Τη ροπή αδράνειας $I_{(O)}$ του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του που διέρχεται από το σημείο O .

Τυλίγουμε πολλές φορές ένα αβαρές, μη εκτατό νήμα γύρω από έναν ίδιο δίσκο και την ελεύθερη άκρη του νήματος τη στερεώνουμε στην οροφή, σχηματίζοντας ένα γιο-γιο, όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Αφήνουμε ελεύθερο το δίσκο και αυτός ξεκινά να κατέρχεται με το νήμα διαρκώς κατακόρυφο και χωρίς αυτό να γλιστρά ως προς το δίσκο.

β) Να βρείτε τη ροπή αδράνειας I_{cm} του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

γ) Να δείξετε ότι η τάση του νήματος που ασκείται στο δίσκο δε μεταβάλλει την συνολική κινητική του ενέργεια.

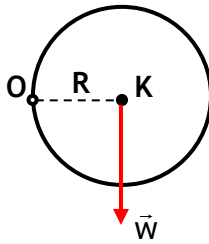
δ) Να βρείτε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του δίσκου όταν έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου.

ε) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της στροφικής κινητικής ενέργειας του δίσκου όταν έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Επίσης δεν θεωρείται γνωστός ο τύπος της ροπής αδράνειας ομογενή δίσκου για άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

Λύση

α) Στο σχήμα φαίνεται η μόνη δύναμη που ασκεί ροπή στο δίσκο:



Από το Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση έχουμε :

$$\Sigma \vec{\tau} = I_{(O)} \vec{a}_\gamma \Rightarrow w \cdot R = I_{(O)} \cdot a_\gamma \Rightarrow I_{(O)} = \frac{MgR}{a_\gamma} \Rightarrow$$

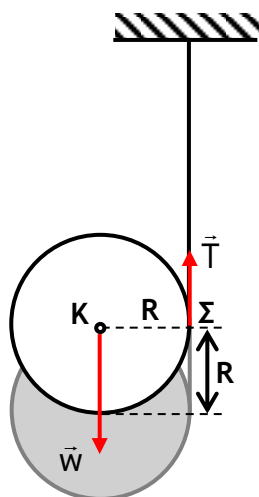
$$I_{(O)} = \frac{9\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{30} \text{m}}{200 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}} \Rightarrow I_{(O)} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{kgm}^2$$

β) Από το Θεώρημα Steiner έχουμε:

$$I_{(O)} = I_{\text{cm}} + MR^2 \Rightarrow I_{\text{cm}} = I_{(O)} - MR^2 \Rightarrow I_{\text{cm}} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{kgm}^2 - 9\text{kg} \cdot \left(\frac{1}{30} \text{m}\right)^2 \Rightarrow$$

$$I_{\text{cm}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2$$

γ) Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο, $\vec{w}$ και $\vec{T}$.



Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στο δίσκο, το τόξο ds κατά το οποίο έχει στραφεί η περιφέρειά του σε χρόνο dt , θα είναι ίσο με την απόσταση dy κατά την οποία έχει ξετυλιχθεί το νήμα, άρα και με την απόσταση dy κατά την οποία έχει κατέβει ο δίσκος. Επομένως:

$$dy = ds = d\theta \cdot R \Rightarrow y_{cm} = \theta \cdot R \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot R$$

Για την ταχύτητα του σημείου Σ, στην περιφέρεια της τροχαλίας, στο οποίο ασκείται η τάση $\vec{T}$ του νήματος έχουμε:

$$\vec{v}_{(\Sigma)} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{στρ}$$

και επειδή: $v_{cm} = \omega \cdot R = v_{στρ}$ και η μεταφορική ταχύτητα είναι αντίθετη από τη στροφική, θα ισχύει:

$$\vec{v}_{(\Sigma)} = \vec{0}$$

Άρα, το σημείο Σ είναι στιγμιαία ακίνητο.

Δηλαδή, η τάση $\vec{T}$ του νήματος ασκείται σε στιγμιαία ακίνητο σημείο. Άρα το έργο της W_T είναι μηδέν με συνέπεια να μην επηρεάζει τη συνολική κινητική ενέργεια του δίσκου (σύμφωνα με το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας - έργου).

δ) Για τον υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας ω του δίσκου όταν έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Έργου - Ενέργειας.

Θέτοντας ως αρχική τη θέση στην οποία αφήνουμε το δίσκο και ως τελική τη θέση στην οποία έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου και με δεδομένο ότι η μόνη δύναμη που προσφέρει έργο είναι το βάρος $\vec{w}$ του δίσκου, έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\text{ολ}} \Rightarrow K_{\text{τελ}} - 0 = W_w \Rightarrow \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 = MgR \Rightarrow$$

$$I_{\text{cm}} \omega^2 + M \omega^2 R^2 = 2MgR \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2MgR}{I_{\text{cm}} + MR^2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 9\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{30} \text{m}}{5 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2 + 9\text{kg} \cdot \left(\frac{1}{30} \text{m}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\epsilon) \frac{dK_{\text{στρ}}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt}$$

Όμως η μόνη ροπή που προκαλείται στο δίσκο και μεταβάλλει τη στροφική του κινητική ενέργεια είναι από την τάση του νήματος T , καθώς η ροπή του βάρους ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με μηδέν. Έτσι παίρνουμε:

$$\frac{dK_{\text{στρ}}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} = \frac{TR d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\text{στρ}}}{dt} = TR\omega \quad (1)$$

Στην τελευταία σχέση ο μόνος άγνωστος είναι η τάση του νήματος T η οποία μπορεί να υπολογιστεί από το θεώρημα έργου ενέργειας μόνο για τη στροφική κίνηση του δίσκου μεταξύ των δύο θέσεων.

$$K_{\text{στρ(τελ)}} - K_{\text{στρ(αρχ)}} = W_{\Sigma\tau} \Rightarrow K_{\text{στρ(τελ)}} - 0 = TR\theta$$

Όμως σύμφωνα με την εκφώνηση $R\theta = R$, άρα η τελευταία σχέση γίνεται:

$$K_{\text{στρ(τελ)}} - 0 = TR \Rightarrow \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2 = TR \Rightarrow T = \frac{I_{\text{cm}} \omega^2}{2R} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2 \cdot \left(20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{30} \text{m}} \Rightarrow$$

$$T = 30\text{N}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = TR\omega = 30\text{N} \cdot \frac{1}{30}\text{m} \cdot 20\frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = 20\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

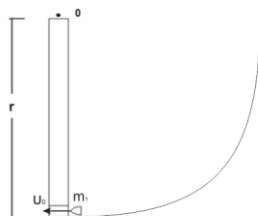
Πρόβλημα 9.

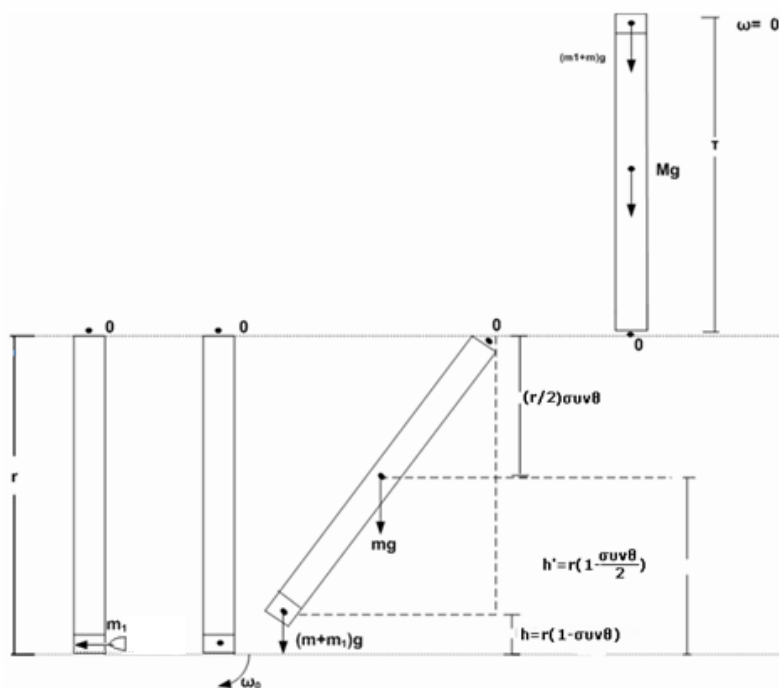
Ένα κομμάτι ξύλου μάζας $m = 0,5\text{Kg}$ είναι ακλόνητα στερεωμένο στο κάτω άκρο ομογενούς και ισοπαχούς ράβδου μάζας $M = 2\text{Kg}$. Το συνολικό μήκος ράβδου και κομματιού από ξύλο είναι $r = 1\text{m}$. Το πάνω άκρο της ράβδου είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο O με τέτοιο τρόπο ώστε η ράβδος να μπορεί να στρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το σημείο O , χωρίς τριβές. Το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο σε κατακόρυφη θέση. Ένα μικρό σώμα Σ , μάζας $m_1 = 0,5\text{Kg}$, που ολισθαίνει σε λείο τεταρτοκύκλιο ακτίνας $r = 1\text{m}$, φτάνοντας στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του, κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα v_0 , προσπίπτει και σφηνώνεται στο ξύλο. Μετά την κρούση το σύστημα ράβδος - ξύλο - βλήμα εκτρέπεται ώστε η μέγιστη απόκλιση της ράβδου από την αρχική κατακόρυφη θέση της να είναι $\theta = 60^\circ$. Να υπολογίσετε:

- τη ροπή αδράνειας του συστήματος σώμα - ξύλο - ράβδος.
- το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.
- το μέτρο της ταχύτητας v_0 του βλήματος πριν την κρούση.
- Το ποσό της θερμότητας, που δημιουργήθηκε στη διάρκεια της κρούσης.
- το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος, ώστε το σύστημα βλήμα-ράβδος- ξύλο, να κάνει ανακύκλωση.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της $I = \frac{Mr^2}{12}$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, οι διαστάσεις του ξύλου και του βλήματος να θεωρηθούν αμελητέες, αντιστάσεις αέρα και τριβές αμελητέες.

Λύση





α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος σώμα - ξύλο - ράβδος ως προς τον άξονα περιστροφής O είναι ίση με: $I_{ολ(O)} = I_{ρ(O)} + I_{ξ(O)} + I_{σ(O)}$ (1)

Επειδή δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της, ενώ η ράβδος θα στραφεί ως προς το σημείο O, με το θεώρημα Steiner θα βρούμε τη ροπή αδράνειάς της ως προς το σημείο αυτό.

$$I_{ρ(O)} = \frac{Mr^2}{12} + M\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{Mr^2}{3} \Rightarrow I_{ρ(O)} = \frac{2}{3} \text{ Kgm}^2 \quad (2)$$

Η ροπή αδράνειας του σώματος ($I_{σ}$) ως προς το O θα είναι:

$$I_{σ(O)} = m_1 r^2 = 0,5 \text{ Kgm}^2 \quad (3)$$

Η ροπή αδράνειας του ξύλου ($I_{ξ}$) ως προς το O θα είναι:

$$I_{ξ(O)} = m r^2 = 0,5 \text{ Kgm}^2 \quad (4)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε την ολική ροπή αδράνειας του συστήματος ($I_{ολ}$) σώμα (m_1) - ξύλο - ράβδος, ως προς το O.

$$I_{ολ(O)} = \left(\frac{2}{3} + 0,5 + 0,5\right) \text{ kgm}^2 \Rightarrow I_{ολ(O)} = \frac{5}{3} \text{ kgm}^2 \quad (5)$$

β) Μετά την κρούση το σύστημα θα στραφεί γύρω από το σημείο O. Αφού δεν υπάρχουν τριβές η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Συνεπώς, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής

δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το κατώτερο σημείο της ράβδου, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, από τη στιγμή που ολοκληρώθηκε η κρούση μέχρις ότου η ράβδος σχηματίσει γωνία $\theta = 60^\circ$ με την κατακόρυφο:

$$\frac{Mgr}{2} + \frac{I_{ολ}\omega^2}{2} = (m + m_1)gh + Mgh' \quad (6)$$

$$\text{όπου } h' = r[1 - (\frac{\sin\theta}{2})] = 0,75m \quad (7)$$

και

$$h = r \cdot (1 - \sin\theta) = 0,5m \quad (8)$$

Αντικαθιστώντας στην (6) τις (5), (7) και (8) βρίσκουμε $\omega = 2\sqrt{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

γ) Το σώμα Σ ελάχιστα πριν την κρούση εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας $r = 1m$, άρα έχει στροφορμή ως προς τον άξονα Ο που βρίσκεται από τη σχέση:

$$L_{\text{σωμ}} = m_1 v_0 r = 0,5v_0 \quad (\text{S.I.}) \quad (9)$$

Επειδή στη διάρκεια της κρούσης του σώματος με το ξύλο, οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ τους είναι εσωτερικές και όλες οι άλλες δυνάμεις έχουν ροπή μηδέν ως προς το Ο, η στροφορμή του συστήματος σώμα-ξύλο - ράβδος διατηρείται, οπότε από την αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε:

$$L_{\text{ολ(πριν)}} = L_{\text{ολ(μετά)}} \Rightarrow L_{\text{σωμ(πριν)}} = L_{\text{συστ(μετά)}} \Rightarrow 0,5v_0 = I_{\text{ολ(Ο)}}\omega \Rightarrow 0,5v_0 = \frac{5}{3}\omega \quad (\text{SI}) \quad (10)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (10) βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος ελάχιστα πριν την κρούση του με το ξύλο.

$$0,5v_0 = \frac{5}{3}\omega \Rightarrow v_0 = \frac{10}{3} \cdot 2\sqrt{3} \text{m/s} \Rightarrow v_0 = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{m/s}$$

$$\delta) Q = \frac{m_1 v_0^2}{2} - \frac{I_{ολ}\omega^2}{2} = \frac{0,5\text{kg} \cdot (\frac{20\sqrt{3}}{3} \text{m/s})^2}{2} - \frac{\frac{5}{3} \text{kgm}^2 (2\sqrt{3} \text{rad/s})^2}{2} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{100}{3} \text{J} - 10\text{J} \Rightarrow Q = \frac{70}{3} \text{J}$$

ε) Έστω ότι το σώμα Σ έχει την κατάλληλη ταχύτητα v_1 ώστε μετά την κρούση το σύστημα να έχει γωνιακή ταχύτητα ω_1 ικανή ώστε να κάνει ανακύκλωση.

Για να κάνει ανακύκλωση θα πρέπει να φτάσει στο ψηλότερο σημείο με γωνιακή ταχύτητα ελάχιστα μεγαλύτερη από το μηδέν. Θα θεωρήσουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος στο ψηλότερο σημείο είναι μηδέν (αν είναι ακριβώς μηδέν θα ισορροπήσει στο σημείο αυτό).

Επειδή η μηχανική ενέργεια διατηρείται για το σύστημα, γράφουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της κατώτερης και της υψηλότερης θέσης. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την κατώτερη θέση:

$$E_{\mu\eta\chi, \alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi, \tau\epsilon\lambda} \Rightarrow U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow U_{\tau\epsilon\lambda} + K_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{Mgr}{2} + \frac{I_{\text{ολ}} \omega_1^2}{2} = (m + m_1)g2r + \frac{Mg3r}{2}.$$

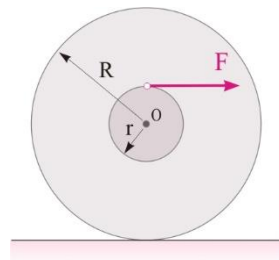
Με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα που πρέπει να έχει η ράβδος αμέσως μετά την κρούση, προκύπτει $\omega_1 = \sqrt{48} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (10) βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος ελάχιστα πριν την κρούση του με το ξύλο.

$$0,5v_1 = \frac{5}{3}\omega_1 \Rightarrow v_1 = \frac{10}{3} \cdot \sqrt{48} \text{ m/s} \Rightarrow v_1 = \frac{40\sqrt{3}}{3} \text{ m/s}$$

Πρόβλημα 10.

Ένας ομογενής κύλινδρος ακτίνας $R = 20\text{cm}$ και μάζας $m = 1,25\text{ kg}$ έχει στο εσωτερικό του αύλακα, ακτίνας $r = 5\text{cm}$, στην οποία έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, στο άκρο του νήματος ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 3\text{N}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο κύλινδρος κυλίνεται, πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογίσετε:



Α) την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Β) τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης F και τη μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$.

Γ) το ρυθμό μεταβολής της στροφικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$.

Δ) το έργο που έχει παραχθεί από τη δύναμη F και την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g = 10\text{ m/s}^2$.

Λύση

Α) Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση, με την επίδραση της δύναμης F και της στατικής τριβής T_σ . Για την μεταφορική της κίνηση, ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει

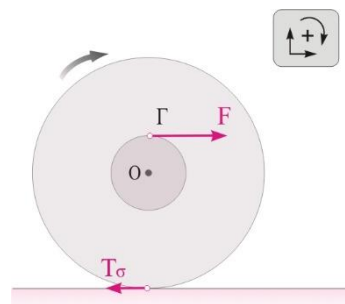
$$\Sigma F_x = m\alpha_{\text{cm}} \Rightarrow F - T_\sigma = m\alpha_{\text{cm}} \Rightarrow T_\sigma = F - m\alpha_{\text{cm}} \quad (1)$$

Για την στροφική κίνηση έχουμε

$$\Sigma \tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow Fr + T_\sigma R = I\alpha_\gamma \Rightarrow Fr + T_\sigma R = \frac{1}{2} mR^2 \alpha_\gamma \quad (2)$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συνδέεται με τη γωνιακή του επιτάχυνση με τη σχέση $\alpha_{\text{cm}} = \alpha_\gamma R$ (3)

Η σχέση (2) με τη βοήθεια της (3) γίνεται: $Fr + T_\sigma R = \frac{1}{2} mR\alpha_{\text{cm}} \quad (4)$



Αντικαθιστώντας τη σχέση (1) στη σχέση (4) υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου

$$Fr + (F - m\alpha_{cm})R = \frac{1}{2}mR\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3} \frac{F}{m} \left(1 + \frac{r}{R}\right) \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3N}{1,25kg} \left(1 + \frac{5 \cdot 10^{-2}m}{20 \cdot 10^{-2}m}\right) \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = 2 \frac{m}{s^2}.$$

Β) Το σημείο εφαρμογής, Γ, της δύναμης F, έχει ταχύτητα που προκύπτει από τη σύνθεση της ταχύτητας του κέντρου μάζας και της γραμμικής του ταχύτητας

$$v_{\Gamma} = v_{cm} + v_{\gamma p, \Gamma}.$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει

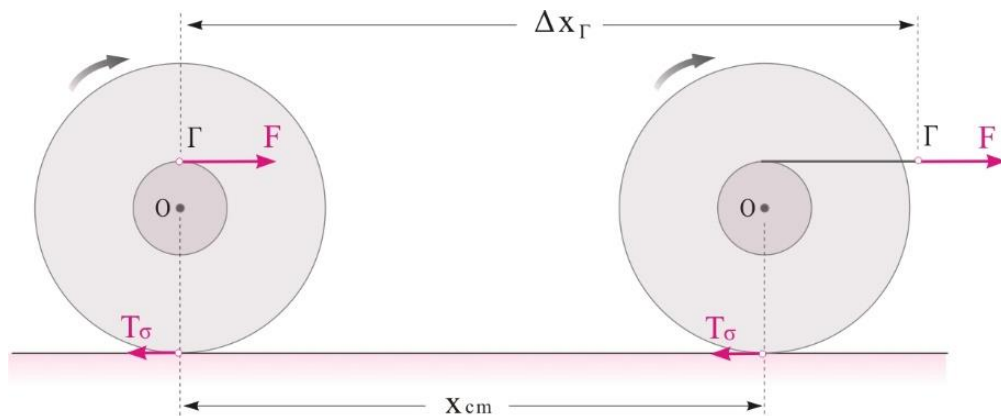
$$\frac{dv_{\Gamma}}{dt} = \frac{dv_{cm}}{dt} + \frac{dv_{\gamma p, \Gamma}}{dt} \Rightarrow \frac{dv_{\Gamma}}{dt} = \frac{dv_{cm}}{dt} + \frac{d(\omega r)}{dt} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\Gamma} = \alpha_{cm} + \alpha_{\gamma} r \Rightarrow \alpha_{\Gamma} = \alpha_{cm} + \frac{\alpha_{cm}}{R} r \Rightarrow$$

$$\alpha_{\Gamma} = 2 \frac{m}{s^2} + \frac{2 \frac{m}{s^2}}{20cm} \cdot 5cm \Rightarrow \alpha_{\Gamma} = 2,5 \frac{m}{s^2}.$$

Η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης F τη χρονική στιγμή t=2s είναι

$$\Delta x_{\Gamma} = \frac{1}{2} \alpha_{\Gamma} t^2 \Rightarrow \Delta x_{\Gamma} = \frac{1}{2} 2,5 \frac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 \Rightarrow \Delta x_{\Gamma} = 5m.$$



Η μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι

$$x_{cm} = \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2 \Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{2} 2 \frac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 \Rightarrow x_{cm} = 4m.$$

Γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου είναι

$$\frac{dK_{\sigma\pi\rho}}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega = I\alpha_{\gamma}\omega = \frac{1}{2}mR^2 \frac{\alpha_{cm}}{R} \frac{v_{cm}}{R} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\pi\rho}}{dt} = \frac{1}{2}m\alpha_{cm}v_{cm} \quad (5)$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας τη χρονική στιγμή $t=2s$ είναι

$$v_{cm} = \alpha_{cm}t \Rightarrow v_{cm} = 2 \frac{m}{s^2} \cdot 2s \Rightarrow v_{cm} = 4 \frac{m}{s}.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (5) βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής της στροφικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t=2s$

$$\frac{dK_{\sigma\pi\rho}}{dt} = \frac{1}{2}m\alpha_{cm}v_{cm} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\pi\rho}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 1,25kg \cdot 2 \frac{m}{s^2} \cdot 4 \frac{m}{s} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\pi\rho}}{dt} = 5 \frac{J}{s}.$$

Δ) Το έργο που έχει παραχθεί από τη δύναμη F μέχρι τη χρονική στιγμή $t=2s$ είναι

$$W_F = F \Delta x_{\Gamma} \Rightarrow W_F = 3N \cdot 5m \Rightarrow W_F = 15J.$$

Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t=2s$ είναι

$$K_{ολ} = K_{\mu} + K_{\pi} \Rightarrow K_{ολ} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$K_{ολ} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{4}mv_{cm}^2 = \frac{3}{4}mv_{cm}^2 \Rightarrow K_{ολ} = \frac{3}{4}1,25kg \cdot \left(4 \frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow K_{ολ} = 15J.$$

Όπως παρατηρούμε το έργο που έχει παραχθεί από τη δύναμη F και η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου έχουν ίσες τιμές, κάτι που προβλέπει και το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, αφού η στατική τριβή δεν προσφέρει ούτε αφαιρεί ενέργεια.

Πρόβλημα 11. **Νέο**

Η ομογενής σανίδα του σχήματος έχει μήκος $L=1\text{m}$, βάρος $w_1=10\text{N}$ και συνδέεται με άρθρωση με τον κατακόρυφο τοίχο στο σημείο Δ. Η σανίδα, με τη βοήθεια κατακόρυφου νήματος που είναι δεμένο στην άκρη της, συγκρατείται σε θέση που σχηματίζει γωνία φ με τον τοίχο, με $\eta\mu\varphi=0,6$, $\sigma\upsilon\mu\varphi=0,8$.

Πάνω στη ράβδο και σε απόσταση $L_1=0,2\text{m}$ από την άρθρωση, ισορροπεί ακίνητο ένα σώμα, Σ, αμελητέων διαστάσεων, βάρους $w_2=10\text{N}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να υπολογίσετε:

Α) τη στατική τριβή που δέχεται το σώμα από τη σανίδα και τη δύναμη που ασκείται στη σανίδα από το σώμα.

Β) την τάση του νήματος και τη δύναμη από την άρθρωση στη σανίδα.

Τη χρονική στιγμή $t=0$ εκτοξεύουμε το σώμα Σ από τη θέση που βρίσκεται προς την κορυφή της σανίδας, με αρχική ταχύτητα $u_0=5\text{m/s}$. Τη χρονική στιγμή που το σώμα φτάνει στο ανώτερο σημείο της σανίδας, το νήμα σπάει. Το σώμα χάνει την επαφή με τη σανίδα και η σανίδα αρχίζει να στρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από την άρθρωση.

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και της σανίδας είναι $\mu=1/3$.

Να υπολογίσετε:

Γ) τη χρονική στιγμή που θα κοπεί το νήμα.

Δ) τη μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση και τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα της σανίδας κατά την κίνησή της.

Δίνονται: το $g=10\text{ m/s}^2$ και ότι η ροπή αδράνειας σανίδας μήκους L και μάζας m ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο της είναι $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} mL^2$.

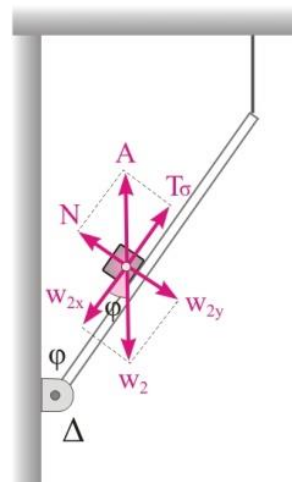
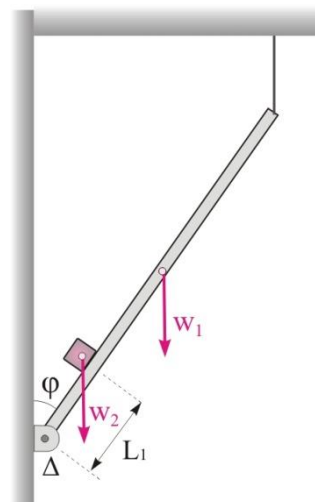
Λύση

Α) Στο σώμα που ισορροπεί πάνω στη σανίδα ασκούνται το βάρος του, w_2 , και η δύναμη από τη σανίδα Α, που αναλύεται σε δύο συνιστώσες, τη στατική τριβή T_σ και την κάθετη δύναμη στήριξης Ν. Αφού το σώμα ισορροπεί, η δύναμη Α που ασκείται στο σώμα από τη σανίδα είναι

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow A = w_2 \Rightarrow A = 10\text{N}.$$

Η δύναμη που ασκείται στη σανίδα από το σώμα είναι η αντίδραση της Α, με μέτρο A' , που ισούται με

$$A' = A = 10\text{N}.$$



Από τη συνθήκη ισορροπίας στον άξονα x υπολογίζουμε τη στατική τριβή που δέχεται το σώμα από τη σανίδα

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{\sigma} - w_{2,x} = 0 \Rightarrow T_{\sigma} = w_2 \sin \varphi \Rightarrow T_{\sigma} = 10\text{N} \cdot 0,8 = 8\text{N}.$$

Β) Στη σανίδα ασκούνται οι εξής δυνάμεις: η τάση του νήματος T , η δύναμη από την άρθρωση F , το βάρος της σανίδας, w_1 , και η δύναμη που ασκείται στη σανίδα από το σώμα, A' , που ισούται με το βάρος του σώματος, w_2 .

Επειδή οι τρεις από τις τέσσερις δυνάμεις (T , w_1 , w_2) βρίσκονται στον κατακόρυφο άξονα, για να ισχύει $\Sigma F_x = 0$ πρέπει και η τέταρτη δύναμη, F , να είναι κατακόρυφη. Άρα, η συνθήκη ισορροπίας για τον άξονα y , μας δίνει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F + T - w_1 - w_2 = 0 \Rightarrow F + T = 10\text{N} + 10\text{N} \Rightarrow$$

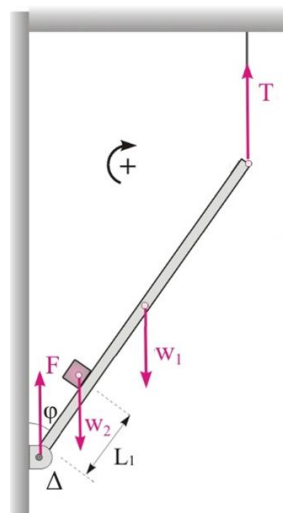
$$F + T = 20\text{N} \quad (1)$$

Επίσης, λόγω της στροφικής ισορροπίας της ράβδου, η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς οποιοδήποτε σημείο της ράβδου είναι ίση με μηδέν. Η συνθήκη στροφικής ισορροπίας ως προς το σημείο της άρθρωσης Δ , δίνει:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow w_1 \frac{L}{2} \eta \mu \varphi + w_2 L_1 \eta \mu \varphi - T L \eta \mu \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{w_1 \frac{L}{2} + w_2 L_1}{L} \Rightarrow$$

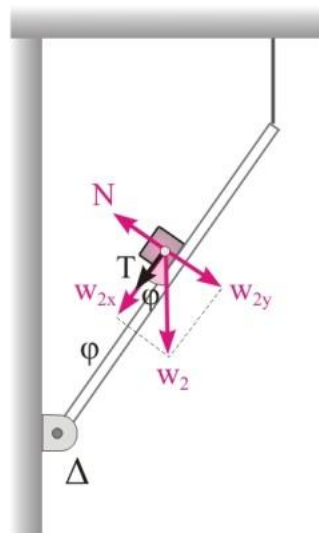
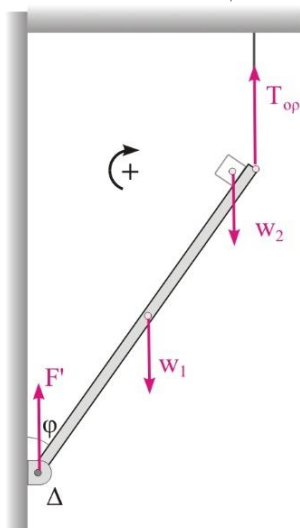
$$T = \frac{10\text{N} \cdot \frac{1\text{m}}{2} + 10\text{N} \cdot 0,2\text{m}}{1\text{m}} \Rightarrow T = 7\text{N}.$$



Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε τη δύναμη από την άρθρωση, F

$$F + T = 20\text{N} \Rightarrow F + 7\text{N} = 20\text{N} \Rightarrow F = 13\text{N}.$$

Γ) Το σώμα κατά την κίνησή του στη σανίδα δέχεται δύο δυνάμεις, το βάρος του και τη δύναμη από το δάπεδο, η οποία αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την κάθετη δύναμη στήριξης, N , και την τριβή ολίσθησης, T . Από τη συνθήκη ισορροπίας για τον άξονα y βρίσκουμε την κάθετη δύναμη στήριξης, N και από τη σχέση $T = \mu N$ θα βρούμε το μέτρο της τριβής ολίσθησης.



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - w_{2y} = 0 \Rightarrow N = w_2 \cdot \eta\mu\phi \Rightarrow$$

$$N = 10\text{N} \cdot 0,6 \Rightarrow N = 6\text{N}.$$

Η τριβή ολίσθησης είναι

$$T = \mu N = \frac{1}{3} \cdot 6\text{N} \Rightarrow T = 2\text{N}.$$

Η κίνηση του σώματος είναι ομαλά επιβραδυνόμενη και η επιτάχυνσή του a είναι:

$$\Sigma F_x = m_2 a \Rightarrow -w_{2x} - T = m_2 a \Rightarrow -w_2 \sigma\upsilon\nu\phi - T = m_2 a \Rightarrow$$

$$a = \frac{-w_2 \sigma\upsilon\nu\phi - T}{m_2} \Rightarrow a = \frac{-10\text{N} \cdot 0,8 - 2\text{N}}{1\text{kg}} \Rightarrow a = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Με σημείο αναφοράς την αρχή της σανίδας, Δ , η εξίσωση της θέσης του σώματος γράφεται:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow x = 0,2 + 5t - \frac{1}{2} 10t^2 \Rightarrow x = 0,2 + 5t - 5t^2 \quad (\text{SI}) \quad (2)$$

Όταν το σώμα φθάνει στο άκρο της σανίδας, $x=1\text{m}$, οπότε η σχέση (2) γίνεται:

$$t^2 - t + 0,16 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτεροβάθμια. Βρίσκουμε πρώτα τη διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 0,16 = 0,36.$$

Οι λύσεις της σχέσης (2) είναι

$$t = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{0,36}}{2} = \frac{1 \pm 0,6}{2} \Rightarrow t = 0,2\text{s} \quad \text{ή} \quad t = 0,8\text{s}.$$

Δεκτή είναι η πρώτη λύση $t = 0,2s$.

Δ) Η σανίδα κατά την κίνησή της θα αποκτήσει τη μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση όταν γίνει οριζόντια, γιατί τότε μεγιστοποιείται ο μοχλοβραχίονας του βάρους της και η ροπή του βάρους. Η ροπή αδράνειας της σανίδας ως προς άξονα που διέρχεται από την άρθρωση, προκύπτει από το θεώρημα Steiner

$$I_{\Delta} = I_{cm} + m_1 \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} m_1 L^2 + m_1 \left(\frac{L}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$I_{\Delta} = \frac{1}{12} m_1 L^2 + m_1 \frac{L^2}{4} \Rightarrow I_{\Delta} = \frac{1}{3} m_1 L^2.$$

Από το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση έχουμε

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma, \max} \Rightarrow w_1 \frac{L}{2} = \frac{1}{3} m_1 L^2 \alpha_{\gamma, \max} \Rightarrow m_1 g \frac{L}{2} = \frac{1}{3} m_1 L^2 \alpha_{\gamma, \max} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma, \max} = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \Rightarrow \alpha_{\gamma, \max} = \frac{3}{2} \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1m} \Rightarrow \alpha_{\gamma, \max} = 15 \frac{rad}{s^2}.$$

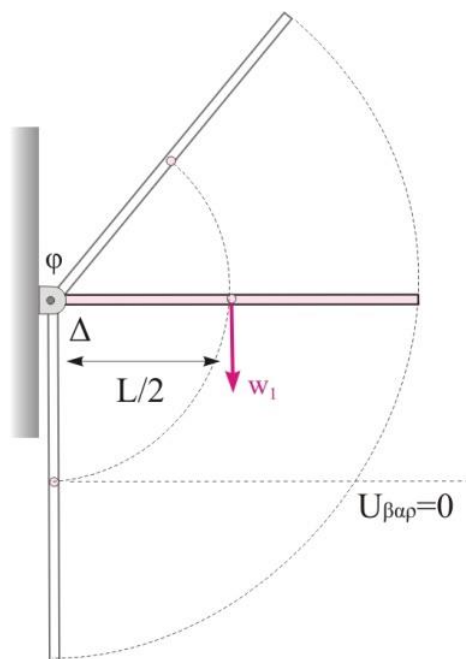
Η σανίδα θα αποκτήσει τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα κατά την κίνησή της όταν γίνει κατακόρυφη, γιατί ως εκείνη τη στιγμή επιταχύνεται.

Η μόνη δύναμη που ασκείται στη σανίδα και παράγει έργο είναι το βάρος της, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. Θεωρούμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το μέσο της σανίδας στην κατακόρυφη θέση

$$E_{\mu\eta\chi, \alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi, \tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow 0 + m_1 g \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \sigma\upsilon\nu\varphi \right) = \frac{1}{2} I \omega_{\max}^2 + 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} m_1 L^2 \omega_{\max}^2 = m_1 g \frac{L}{2} (1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{3g}{L} (1 + \sigma\upsilon\nu\varphi)} \Rightarrow$$

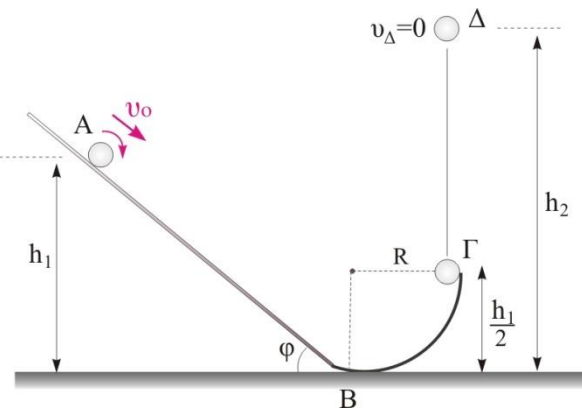
$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10 m/s^2 \cdot (1 + 0,8)}{1m}} \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{54} \frac{rad}{s}.$$



Πρόβλημα 12. **Νέο**

Ένας συμπαγής κύλινδρος μάζας $m=4\text{kg}$ και ακτίνας $r=0,1\text{m}$ κατέρχεται κυλιόμενος σε πλάγιο επίπεδο γωνίας φ , με $\eta\mu\varphi=0,6$, $\sigma\upsilon\eta\varphi=0,8$. Τη χρονική στιγμή $t=0$, ο κύλινδρος διέρχεται από τη θέση Α, που βρίσκεται σε ύψος $h_1 = 2,4\text{ m}$ από τη βάση του πλάγιου επιπέδου με το κέντρο μάζας του να έχει ταχύτητα $u_0=2\text{m/s}$.

Μόλις ο κύλινδρος φτάσει στη βάση του πλάγιου επιπέδου, στο σημείο Β, εισέρχεται, χωρίς απώλεια ενέργειας, σε οδηγό σχήματος τεταρτοκυκλίου, ακτίνας $R=h_1/2$, τον οποίο διατρέχει κυλιόμενος. Όταν φτάσει στο τέλος του τεταρτοκυκλίου, στο σημείο Γ, συνεχίζει κατακόρυφα την κίνησή του μέχρι το σημείο Δ, όπου στιγμιαία σταματά την άνοδό του σε ύψος h_2 και στη συνέχεια κατέρχεται.



Να υπολογίσετε:

Α) την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου κατά την κύλισή του στο πλάγιο επίπεδο.

Β) τη χρονική στιγμή t_1 που ο κύλινδρος φτάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου.

Γ) τη στροφορμή του κυλίνδρου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, όταν αυτός διέρχεται από το σημείο Γ.

Δ) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου στο σημείο Γ, ελάχιστα μετά τη στιγμή που αφήνει τον κυκλικό οδηγό.

Ε) το μέγιστο ύψος, h_2 , που φτάνει ο κύλινδρος.

Δίνονται: $g=10\text{ m/s}^2$ και ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ακτίνας r και μάζας m ως προς τον άξονα συμμετρίας του είναι $I=\frac{1}{2}mr^2$. Επίσης, για τον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας του κυλίνδρου η ακτίνα του να θεωρηθεί αμελητέα.

Λύση

Α) Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση, με την επίδραση του βάρους και της στατικής τριβής T_σ . Για την μεταφορική του κίνηση, ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow w_x - T_\sigma = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg \cdot \eta\mu\varphi - T_\sigma = m\alpha_{cm} \quad (1)$$

Για τη στροφική κίνηση, η μόνη δύναμη που έχει ροπή είναι η στατική τριβή. Έτσι έχουμε

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma} \Rightarrow T_{\sigma} r = I \alpha_{\gamma} \Rightarrow T_{\sigma} r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha_{\gamma} \Rightarrow T_{\sigma} = \frac{1}{2} m r \alpha_{\gamma} \quad (2)$$

Επειδή ο κύλινδρος κατέρχεται κυλιόμενος η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συνδέεται με τη γωνιακή του επιτάχυνση με τη σχέση

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma} r \quad (3)$$

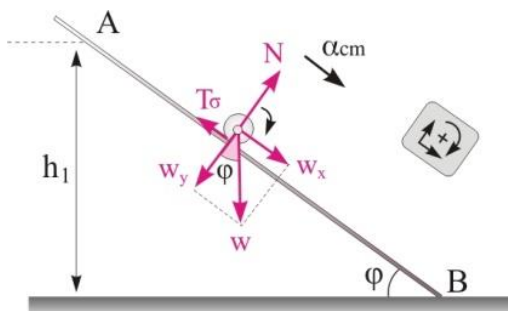
Η σχέση (2) με τη βοήθεια της (3)

γίνεται $T_{\sigma} = \frac{1}{2} m \alpha_{cm}$ και αντικαθιστώντας στη

σχέση (1) υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου

$$m g \cdot \eta \mu \phi - T_{\sigma} = m \alpha_{cm} \Rightarrow m g \cdot \eta \mu \phi - \frac{1}{2} m \alpha_{cm} = m \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3} g \cdot \eta \mu \phi \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{2}{3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,6 \Rightarrow \alpha_{cm} = 4 \frac{m}{s^2}.$$



Β) Με σημείο αναφοράς το σημείο Α, η εξίσωση της θέσης του σώματος γράφεται

$$x = v_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2 \Rightarrow x = 2t + \frac{1}{2} 4 \cdot t^2 \Rightarrow x = 2t + 2t^2 \text{ (SI)} \quad (4)$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_1$ που ο κύλινδρος φθάνει στη βάση του πλάγιου επιπέδου έχουμε

$$\eta \mu \phi = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\eta \mu \phi} \Rightarrow x = \frac{2,4m}{0,6} \Rightarrow x = 4m.$$

Άρα, η σχέση (4) γίνεται: $4 = 2t_1 + 2t_1^2 \Rightarrow t_1^2 + t_1 - 2 = 0$.

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτεροβάθμια. Βρίσκουμε πρώτα τη διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9.$$

Οι λύσεις της σχέσης (4) είναι

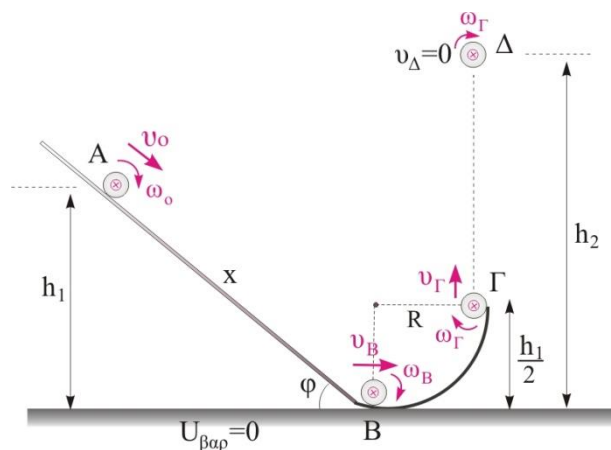
$$t_1 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = 1s \quad \text{ή} \quad t_1 = -2s.$$

Δεκτή είναι η θετική λύση $t_1 = 1s$.

Γ) Η στροφορμή του κυλίνδρου δίνεται από τη σχέση

$$L_{\Gamma} = I \omega_{\Gamma} \quad (5)$$

Για να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα ω_r εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Β και Γ, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος. Θεωρούμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Β. Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται, η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συνδέεται με τη γωνιακή του ταχύτητα με τη σχέση $v_{cm} = \omega r$.



$$E_{μηχ,B} = E_{μηχ,\Gamma} \Rightarrow K_{μετ,B} + K_{στρ,B} + U_B = K_{μετ,\Gamma} + K_{στρ,\Gamma} + U_\Gamma \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_\Gamma^2 + \frac{1}{2}I\omega_\Gamma^2 + mg\frac{h_1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2\omega_B^2 = \frac{1}{2}mv_\Gamma^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2\omega_\Gamma^2 + mg\frac{h_1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{4}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_\Gamma^2 + \frac{1}{4}mv_\Gamma^2 + mg\frac{h_1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4}mv_B^2 = \frac{3}{4}mv_\Gamma^2 + mg\frac{h_1}{2} \Rightarrow v_\Gamma = \sqrt{v_B^2 - \frac{4}{3}g\frac{h_1}{2}} \quad (6)$$

Η ταχύτητα v_B , με την οποία φτάνει ο κύλινδρος στη βάση του πλάγιου επιπέδου είναι

$$v_B = v_0 + a_{cm}t_1 \Rightarrow v_B = 2\frac{m}{s} + 4\frac{m}{s^2} \cdot 1s \Rightarrow v_B = 6\frac{m}{s}.$$

Από τη σχέση (6) υπολογίζουμε τη ταχύτητα v_Γ

$$v_\Gamma = \sqrt{\left(6\frac{m}{s}\right)^2 - \frac{4}{3} \cdot 10\frac{m}{s^2} \frac{2,4m}{2}} \Rightarrow v_\Gamma = 2\sqrt{5}\frac{m}{s}.$$

Η γωνιακή ταχύτητα κυλίνδρου στη θέση Γ είναι

$$v_\Gamma = \omega_\Gamma r \Rightarrow \omega_\Gamma = \frac{v_\Gamma}{r} \Rightarrow \omega_\Gamma = \frac{2\sqrt{5}\frac{m}{s}}{0,1m} \Rightarrow \omega_\Gamma = 20\sqrt{5}\frac{rad}{s}.$$

Τέλος, με αριθμητική αντικατάσταση στη σχέση (5) προκύπτει η στροφορμή του κυλίνδρου.

$$L_\Gamma = I\omega_\Gamma \Rightarrow L_\Gamma = \frac{1}{2}mr^2\omega_\Gamma \Rightarrow L_\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 4kg \cdot (0,1m)^2 \cdot 20\sqrt{5}\frac{rad}{s} \Rightarrow L_\Gamma = 0,4\sqrt{5}\frac{kgm^2}{s}.$$

Δ) Όταν ο κύλινδρος φτάσει στο τέλος του τεταρτοκυκλίου, συνεχίζει κατακόρυφα την κίνησή του, χωρίς να δέχεται καμιά ροπή, άρα η γωνιακή ταχύτητα και η στροφορμή

κινητική ενέργεια παραμένουν σταθερές. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου είναι

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\text{μετ}}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{dW_B}{dt} = -mg \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -mgv_{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -4\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -80\sqrt{5} \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Ε) Για να υπολογίσουμε το μέγιστο ύψος, h_2 , που φτάνει ο κύλινδρος θα εφαρμόσουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Γ και Δ, αφού η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος. Θεωρούμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Γ. Ο κύλινδρος κάνει ομαλή στροφική κίνηση, γιατί το βάρος του δεν δημιουργεί ροπή.

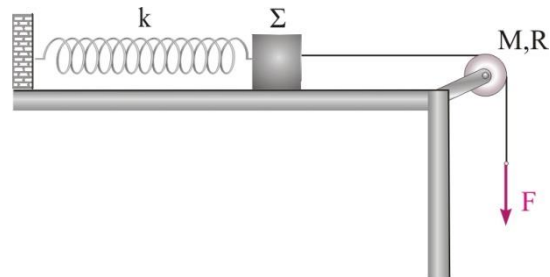
$$E_{\text{μηχ},\Gamma} = E_{\text{μηχ},\Delta} \Rightarrow K_{\text{μετ},\Gamma} + K_{\text{στρ},\Gamma} + U_{\Gamma} = K_{\text{μετ},\Delta} + K_{\text{στρ},\Delta} + U_{\Delta} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{\Gamma}^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}I\omega_{\Gamma}^2 + mg\left(h_2 - \frac{h_1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 = mg\left(h_2 - \frac{h_1}{2}\right) \Rightarrow h_2 = \frac{v_{\Gamma}^2}{2g} + \frac{h_1}{2} \Rightarrow h_2 = \frac{\left(2\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} + \frac{2,4\text{m}}{2} \Rightarrow h_2 = 2,2\text{m}.$$

Πρόβλημα 13. **Νέο**

Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα $M=4\text{kg}$, ακτίνα $R=0,1\text{m}$ και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Το ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k=100\text{ N/m}$ έχει το ένα άκρο ακλόνητα στερεωμένο και το άλλο δεμένο σε σώμα, Σ , μάζας $m=2\text{kg}$. Ένα μη εκτατό οριζόντιο αβαρές σχοινί είναι δεμένο με το σώμα και διέρχεται από την αύλακα της τροχαλίας. Αρχικά το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία και το ελατήριο στο φυσικό του μήκος. Μέσω του σχοινιού ασκούμε σταθερή κατακόρυφη δύναμη, $\vec{F}$, μέτρου 30N , η οποία περιστρέφει την τροχαλία, κινεί το σώμα πάνω στο λείο επίπεδο και επιμηκύνει το ελατήριο. Το σχοινί δεν ολισθαίνει στην τροχαλία. Τη στιγμή που η τροχαλία αποκτά τη μέγιστη γωνιακή της ταχύτητα κόβεται το σχοινί και το σώμα αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



Να υπολογίσετε τη:

Α) γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας τη στιγμή που η δύναμη $\vec{F}$ έχει μετατοπίσει το σημείο εφαρμογής της κατά $x_1=0,2\text{ m}$.

Β) συνάρτηση της τάσης του μέτρου του σχοινιού σε σχέση με την μετατόπιση του σώματος μέχρι τη θέση που θα κοπεί το σχοινί και να τη σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες.

Γ) μέγιστη γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας.

Δ) μέγιστη ταχύτητα του σώματος κατά την ταλάντωσή του.

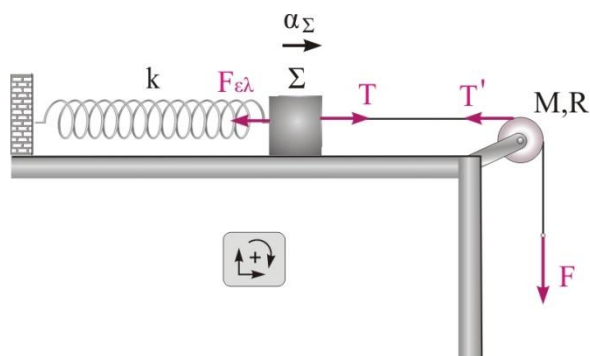
Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα συμμετρίας της $I = \frac{1}{2} MR^2$.

Λύση

Α) Η τροχαλία εκτελεί στροφική κίνηση, με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$ και της τάσης του νήματος $\vec{T}'$. Για την στροφική της κίνηση ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma} \Rightarrow FR - T'R = I \alpha_{\gamma} \Rightarrow$$

$$FR - T'R = \frac{1}{2} MR^2 \alpha_{\gamma} \Rightarrow F - T' = \frac{1}{2} MR \alpha_{\gamma} \quad (1)$$



Για την μεταφορική κίνηση του σώματος Σ , ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει

$$\Sigma F = m\alpha_{\Sigma} \Rightarrow T - F_{ελ} = m\alpha_{\Sigma} \Rightarrow T - kx = m\alpha_{\Sigma} \Rightarrow T = kx + m\alpha_{\Sigma} \quad (2)$$

Η επιτάχυνση του σώματος Σ , α_{Σ} , συμπίπτει με την επιτάχυνση του νήματος και την γραμμική επιτάχυνση, $\alpha_{\gamma\rho}$, των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας

$$\alpha_{\Sigma} = \frac{dv_{\gamma\rho}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_{\Sigma} = \alpha_{\gamma} R \quad (3)$$

Παίρνοντας υπόψη ότι $T' = T$ και τη σχέση (3), η σχέση (1) δίνει

$$F - T = \frac{1}{2} M\alpha_{\Sigma} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2) στην (4) βρίσκουμε τη σχέση που υπολογίζει την επιτάχυνση του σώματος Σ ,

$$F - (kx + m\alpha_{\Sigma}) = \frac{1}{2} M\alpha_{\Sigma} \Rightarrow \alpha_{\Sigma} = \frac{F - kx}{\frac{1}{2} M + m} \quad (5)$$

Όταν η δύναμη $\vec{F}$, μετατοπίσει το σημείο εφαρμογής της κατά $x_1 = 0,2 \text{ m}$, η επιτάχυνση του σώματος είναι

$$\alpha_{\Sigma} = \frac{F - kx_1}{\frac{1}{2} M + m} \Rightarrow \alpha_{\Sigma} = \frac{30\text{N} - 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,2\text{m}}{\frac{1}{2} 4\text{kg} + 2\text{kg}} \Rightarrow \alpha_{\Sigma} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας προκύπτει από τη σχέση (3), είναι

$$\alpha_{\Sigma} = \alpha_{\gamma} R \Rightarrow \alpha_{\gamma} = \frac{\alpha_{\Sigma}}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = \frac{2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,1\text{m}} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = 25 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Β) Τη συνάρτηση της τάσης του σκοινιού σε σχέση με την μετατόπιση του σώματος, x , την βρίσκουμε με συνδυασμό των σχέσεων (2) και (4) απαλείφοντας την επιτάχυνση α_{Σ} .

Η σχέση (4) γίνεται

$$F - T = \frac{1}{2} M\alpha_{\Sigma} \Rightarrow \alpha_{\Sigma} = \frac{2(F - T)}{M} \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (6) στην (2) έχουμε

$$T = kx + m \frac{2(F-T)}{M} \Rightarrow T = \frac{kx + \frac{2mF}{M}}{1 + \frac{2m}{M}} \Rightarrow T = \frac{100 \frac{N}{m} \cdot x + \frac{2 \cdot 2kg \cdot 30N}{4kg}}{1 + \frac{2 \cdot 2kg}{4kg}} \Rightarrow$$

$$T = 50x + 15 \quad (\text{S.I.}) \quad (7)$$

Πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

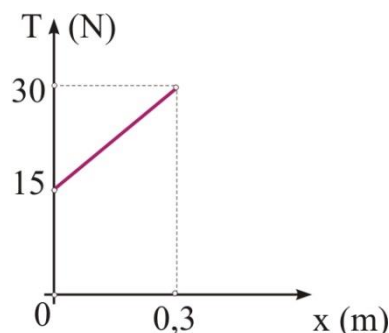
Η κίνηση της τροχαλίας είναι επιταχυνόμενη όσο $F_R > T_R$ ή

$$F > T \quad \text{ή} \quad 30 > 50x + 15 \quad (\text{SI}) \quad \text{ή} \quad 15 > 50x \quad (\text{SI}) \quad \text{ή} \quad x < 0,3\text{m}$$

Άρα, για τη συνάρτηση της τάσης του σκοινιού σε σχέση με την μετατόπιση του σώματος, ισχύει:

$$T = 50x + 15 \quad (\text{S.I.}) \quad \text{με} \quad 0 \leq x < 0,3\text{m}$$

και η γραφική παράσταση του μέτρου της δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ) Α΄ ΤΡΟΠΟΣ

Τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας θα την υπολογίσουμε με εφαρμογή του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την τροχαλία από τη χρονική στιγμή που ασκήθηκε η δύναμη μέχρι να κοπεί το νήμα. Το έργο της τάσης του νήματος, που είναι αρνητικό, θα το υπολογίσουμε από το εμβαδόν στο διάγραμμα τάσης - μετατόπισης.

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F + W_T \Rightarrow \frac{1}{2} I \omega_{\text{max}}^2 - 0 = Fx_3 + W_T \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \omega_{\text{max}}^2 - 0 = Fx_3 + W_T \Rightarrow \omega_{\text{max}} = \sqrt{\frac{4(Fx_3 + W_T)}{MR^2}} \Rightarrow$$

$$\omega_{\text{max}} = \sqrt{\frac{4 \left(30N \cdot 0,3\text{m} - \frac{15N + 30N}{2} \cdot 0,3\text{m} \right)}{4kg \cdot (0,1\text{m})^2}} \Rightarrow \omega_{\text{max}} = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

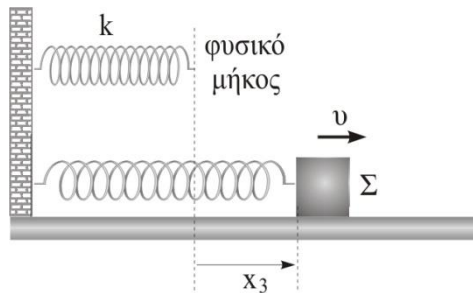
Β΄ ΤΡΟΠΟΣ

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια της τροχαλίας, σε κινητική ενέργεια του σώματος Σ και σε δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

$$W_F = K_{\text{τροχ}} + K_{\Sigma} + U_{\text{ελ}} \Rightarrow Fx_3 = \frac{1}{2} I \omega_{\text{max}}^2 + \frac{1}{2} m (\omega_{\text{max}} R)^2 + \frac{1}{2} k x_3^2 \Rightarrow$$

$$\omega_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2Fx_3 - kx_3^2}{\left(\frac{M}{2} + m\right) R^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \text{ N} \cdot 0,3 \text{ m} - 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,3 \text{ m})^2}{(2 \text{ kg} + 2 \text{ kg}) \cdot (0,1 \text{ m})^2}} \Rightarrow \omega_{\text{max}} = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Δ) Τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος κατά την ταλάντωσή του, την υπολογίζουμε με εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας στην ταλάντωση μεταξύ της θέσης που κόβεται το νήμα και της θέσης ισορροπίας του, από όπου διέρχεται με v_{max} .



$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x_3^2 \Rightarrow$$

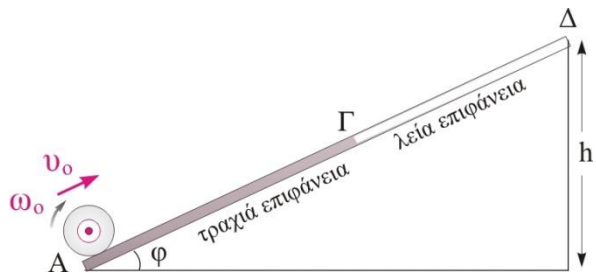
$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{m v^2 + k x_3^2}{m}} = \sqrt{\frac{m (\omega R)^2 + k x_3^2}{m}} \Rightarrow$$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2 \text{ kg} \cdot \left(15 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,1 \text{ m}\right)^2 + 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,3 \text{ m})^2}{2 \text{ kg}}} \Rightarrow$$

$$v_{\text{max}} = \frac{3}{2} \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Πρόβλημα 14. **Νέο**

Το πλάγιο επίπεδο του σχήματος έχει ύψος h και γωνία κλίσης φ , με $\sin\varphi=0,8$ και $\cos\varphi=0,6$. Το πλάγιο επίπεδο από τη βάση του, σημείο Α, μέχρι το σημείο Γ παρουσιάζει τριβή, ενώ το υπόλοιπο τμήμα, από το σημείο Γ μέχρι την κορυφή του, Δ, είναι λείο. Ένας δίσκος ακτίνας r και μάζας m , που κυλίεται φθάνει τη χρονική στιγμή $t=0$, στη βάση του πλάγιου επιπέδου, σημείο Α, με ταχύτητα κέντρου μάζας $u_0=5\text{ m/s}$ και συνεχίζει κυλιόμενος να ανέρχεται στο πλάγιο επίπεδο. Ο δίσκος διέρχεται από το σημείο Γ τη χρονική στιγμή $t_1=0,5\text{ s}$ και φθάνει στο σημείο Δ με μηδενική ταχύτητα.



Να υπολογίσετε:

Α) την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου στην τραχιά επιφάνεια καθώς και τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ δίσκου και επιπέδου, ώστε ο δίσκος να ανέρχεται κυλιόμενος χωρίς να ολισθήσει.

Β) το ύψος h του πλάγιου επιπέδου.

Γ) τη χρονική στιγμή t_3 που η μεταφορική κινητική ενέργεια του δίσκου γίνεται μισή από τη στροφική του κατά την άνοδο.

Δ) Να σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες το λόγο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου προς την γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας, σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 που ο δίσκος φτάνει στην κορυφή του επιπέδου.

Δίνονται: $g=10\text{ m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του $I = \frac{1}{2}mr^2$.

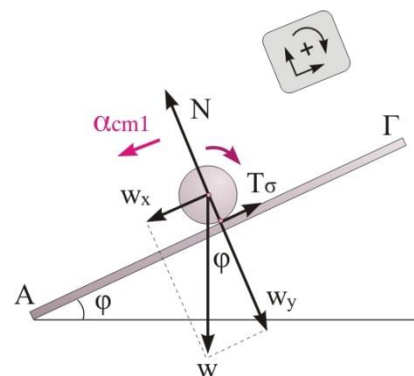
Λύση

Α) Ο δίσκος κάνει σύνθετη κίνηση, με την επίδραση του βάρους και της στατικής τριβής T_σ . Για την μεταφορική του κίνηση, ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει

$$\Sigma F_X = m\alpha_{cm,1} \Rightarrow T_\sigma - w_x = m\alpha_{cm,1} \Rightarrow$$

$$T_\sigma - mg \cdot \eta\mu\varphi = m\alpha_{cm,1} \quad (1)$$

Στη στροφική κίνηση η μόνη δύναμη που έχει ροπή είναι η στατική τριβή, οπότε ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει



$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma} \Rightarrow -T_{\sigma} R = I \alpha_{\gamma} \Rightarrow T_{\sigma} R = -\frac{1}{2} m R^2 \alpha_{\gamma} \Rightarrow T_{\sigma} = -\frac{1}{2} m R \alpha_{\gamma} \quad (2)$$

Επειδή ο δίσκος ανέρχεται κυλιόμενος η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συνδέεται με τη γωνιακή του επιτάχυνση με τη σχέση

$$\alpha_{\text{cm},1} = \alpha_{\gamma} R \quad (3)$$

$$\text{Η σχέση (2) με τη βοήθεια της (3) γίνεται } T_{\sigma} = -\frac{1}{2} m \alpha_{\text{cm},1} \quad (4)$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (1) υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} m \alpha_{\text{cm},1} - mg \cdot \eta \mu \varphi &= m \alpha_{\text{cm},1} \Rightarrow \alpha_{\text{cm},1} = -\frac{2}{3} g \cdot \eta \mu \varphi \\ \Rightarrow \alpha_{\text{cm},1} &= -\frac{2}{3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,6 \Rightarrow \alpha_{\text{cm},1} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Για να ανέρχεται ο δίσκος κυλιόμενος, πρέπει η εμφανιζόμενη στατική τριβή να είναι μικρότερη από την οριακή τριβή, δηλαδή $T_{\sigma} \leq T_{\text{op}}$ (6)

Θα υπολογίσουμε τα μέτρα των T_{σ} και T_{op} .

Η στατική τριβή που δέχεται ο δίσκος από το πλάγιο επίπεδο προκύπτει από τις σχέσεις (4) και (5)

$$T_{\sigma} = \frac{1}{3} mg \eta \mu \varphi.$$

Στον άξονα y ο δίσκος ισορροπεί, άρα

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_y = mg \cdot \sigma \nu \nu \varphi.$$

Η οριακή τριβή δίνεται από τη σχέση:

$$T_{\text{op}} = \mu_{\sigma} N \Rightarrow T_{\text{op}} = \mu_{\sigma} mg \sigma \nu \nu \varphi$$

Με αντικατάσταση στην σχέση (6) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} T_{\sigma} \leq T_{\text{op}} &\Rightarrow \frac{1}{3} mg \eta \mu \varphi \leq \mu_{\sigma} N \Rightarrow \frac{1}{3} mg \eta \mu \varphi \leq \mu_{\sigma} mg \sigma \nu \nu \varphi \Rightarrow \\ \mu_{\sigma} &\geq \frac{1}{3} \frac{\eta \mu \varphi}{\sigma \nu \nu \varphi} \Rightarrow \mu_{\sigma} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{0,6}{0,8} \Rightarrow \mu_{\sigma} \geq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Άρα ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ δίσκου και επιπέδου, ώστε ο δίσκος να ανέρχεται κυλιόμενος (χωρίς να ολισθήσει) είναι $\mu_{\sigma, \min} = \frac{1}{4}$.

Β) Η μεταφορική κίνηση του δίσκου είναι ομαλά επιβραδυνόμενη και οι εξισώσεις κίνησής του με σημείο αναφοράς το σημείο Α είναι:

$$v = v_0 + \alpha_{cm,1}t \Rightarrow v_{\Gamma} = 5 - 4t \text{ (SI)}$$

$$x = v_0t + \frac{1}{2}\alpha_{cm,1}t^2 \Rightarrow x = 5t - \frac{1}{2} \cdot 4t^2 \text{ (SI)}.$$

Για τη χρονική στιγμή $t_1=0,5s$, που ο δίσκος διέρχεται από το σημείο Γ, οι εξισώσεις δίνουν:

$$v_{\Gamma} = 5 \frac{m}{s} - 4 \frac{m}{s^2} \cdot 0,5s \Rightarrow v_{\Gamma} = 3 \frac{m}{s}.$$

$$x_1 = 5 \frac{m}{s} \cdot 0,5s - \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{m}{s^2} \cdot (0,5s)^2 \Rightarrow x_1 = 2m.$$

Ο δίσκος μετά το σημείο Γ κινείται σε λείο επίπεδο. Για την μεταφορική του κίνηση, ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm,2} \Rightarrow -w_x = m\alpha_{cm,2} \Rightarrow$$

$$-mg \cdot \eta\mu\phi = m\alpha_{cm,2} \Rightarrow \alpha_{cm,2} = -g \cdot \eta\mu\phi \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm,2} = -10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,6 \Rightarrow \alpha_{cm,2} = -6 \frac{m}{s^2}.$$

Η μεταφορική κίνηση του δίσκου συνεχίζει να είναι ομαλά επιβραδυνόμενη και οι εξισώσεις κίνησης για την κίνησή του στο λείο επίπεδο με σημείο αναφοράς το Α είναι:

$$v = v_{\Gamma} + \alpha_{cm,2}(t - t_1) \Rightarrow v = 3 - 6(t - 0,5) \text{ (SI)}$$

(6)

$$x = x_1 + v_{\Gamma}(t - t_1) + \frac{1}{2}\alpha_{cm,2}(t - t_1)^2 \Rightarrow x = 2 + 3 \cdot (t - 0,5) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (t - 0,5)^2 \text{ (SI)} \quad (7)$$

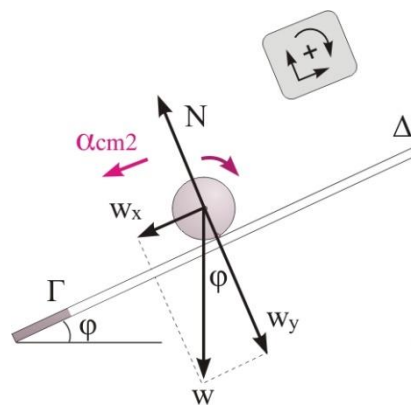
Για τη χρονική στιγμή t_2 που ο δίσκος φτάνει στο σημείο Δ, με μηδενική ταχύτητα, η σχέση (6) δίνει:

$$v_{\Delta} = 3 - 6(t_2 - 0,5) \text{ (SI)} \Rightarrow 0 = 3 - 6t_2 + 3 \text{ (SI)} \Rightarrow t_2 = 1s.$$

Με αντικατάσταση στην σχέση (7) βρίσκουμε το συνολικό μήκος, d , του πλάγιου επιπέδου

$$x = 2 + 3 \cdot (t - 0,5) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (t - 0,5)^2 \text{ (SI)} \Rightarrow d = 2 + 3(1 - 0,5) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (1 - 0,5)^2 \text{ (SI)} \Rightarrow$$

$$d = 2,75m$$



Το ύψος h του πλάγιου επιπέδου προκύπτει από το μήκος του

$$h\mu\phi = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d h\mu\phi \Rightarrow h = 2,75m \cdot 0,6 \Rightarrow h = 1,65m.$$

Γ) Κατά την κίνηση του δίσκου από το σημείο Α μέχρι το Γ, που είναι κύλιση, η μεταφορική κινητική ενέργεια είναι συνεχώς διπλάσια από τη στροφική του, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\frac{K_{\mu}}{K_{\sigma\tau\rho}} = \frac{\frac{1}{2}mv_{cm}^2}{\frac{1}{2}I\omega^2} = \frac{mv_{cm}^2}{\frac{1}{2}mr^2\omega^2} = \frac{2v_{cm}^2}{(r\omega)^2} \Rightarrow \frac{K_{\mu}}{K_{\sigma\tau\rho}} = 2$$

.

Τη χρονική στιγμή t_1 η μεταφορική κινητική ενέργεια είναι

$$K_{\mu\epsilon\tau} = \frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 \text{ και η στροφική } K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 \quad (8)$$

Ψάχνουμε τη χρονική στιγμή t_3 κατά την οποία η μεταφορική κινητική ενέργεια του

$$\text{δίσκου } K_{\mu,3} \text{ γίνεται η μισή από τη στροφική του, } K_{\mu,3} = \frac{K_{\sigma\tau\rho}}{2}$$

Η τελευταία σχέση με τη βοήθεια της (8) δίνει:

$$K_{\mu,3} = \frac{K_{\sigma\tau\rho}}{2} \Rightarrow K_{\mu,3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{8}mv_{\Gamma}^2 \Rightarrow v_3^2 = \frac{1}{4}v_{\Gamma}^2 \Rightarrow v_3 = \pm \frac{v_{\Gamma}}{2}$$

Άρα, ψάχνουμε τη χρονική στιγμή t_3 κατά την οποία το σώμα έχει ταχύτητα

$$v_3 = \frac{v_{\Gamma}}{2} = 1,5 \frac{m}{s}$$

Με αντικατάσταση στην σχέση (6) βρίσκουμε τη χρονική στιγμή t_3 .

$$1,5 = 3 - 6(t_3 - 0,5) \text{ (SI)} \Rightarrow 6t_3 = 4,5 \text{ (SI)} \Rightarrow t_3 = 0,75s.$$

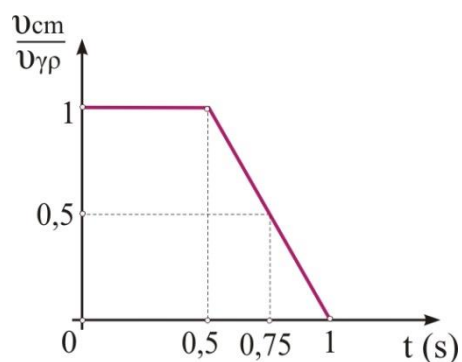
Δ) Κατά την κίνηση του δίσκου από το σημείο Α μέχρι το Γ, που είναι κύλιση, το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου και το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας, είναι ίσες, άρα ο λόγος τους ισούται με τη μονάδα. Κατά την κίνηση του δίσκου από το σημείο Γ μέχρι το Δ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου μειώνεται ομαλά, ενώ η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας παραμένει σταθερή, επειδή στο λείο επίπεδο δεν υπάρχει ροπή. Η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή, ίση με αυτή που είχε ο δίσκος στο σημείο Γ. Άρα

$$\frac{v_{cm}}{v_{\gamma\rho,\Gamma}} = \frac{v_{\Gamma} + \alpha_{cm,2}(t - t_1)}{v_{\Gamma}} = \frac{3 - 6(t - 0,5)}{3} \text{ (SI)} \Rightarrow \frac{v_{cm}}{v_{\gamma\rho,\Gamma}} = 2 - 2t \text{ (SI)}.$$

Ο λόγος της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου προς την γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας, σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 που ο δίσκος φτάνει στην κορυφή του επιπέδου είναι

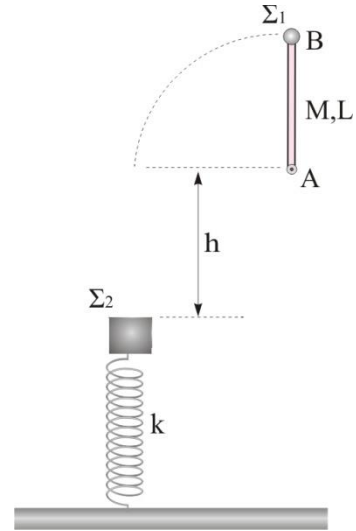
$$\frac{v_{cm}}{v_{\rho, \Gamma}} = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 \leq t \leq 0,5s \\ 2 - 2t \text{ (SI)} & \text{για } 0,5s \leq t \leq 1s \end{cases}$$

Στο διπλανό διάγραμμα δείχνεται ο λόγος των ταχυτήτων σε συνάρτηση με το χρόνο.



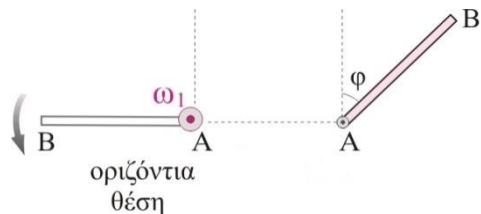
Πρόβλημα 15. **Νέο**

Η ράβδος AB του σχήματος έχει μήκος $L = 8\text{cm}$, μάζα $M = 0,3\text{kg}$ και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A. Στο άλλο άκρο B της ράβδου βρίσκεται προσκολλημένο ένα κομμάτι στόκου, Σ_1 , μάζας m_1 . Δίνουμε στη ράβδο, από τη θέση του σχήματος, μία αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 και αυτή αρχίζει να περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο με φορά αντίθετη αυτής του ρολογιού. Μόλις η ράβδος φθάνει στην οριζόντια θέση για πρώτη φορά, το κομμάτι στόκου αποκολλάται χωρίς απώλεια ενέργειας και κινούμενο κατακόρυφα προς τα κάτω, μετά από μετατόπιση $h = 10\text{cm}$ από τη θέση απόσπασής, συγκρούεται μετωπικά πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 0,1\text{kg}$ που ισορροπεί πάνω σε ιδανικό κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 10\text{N/m}$, το οποίο έχει το κάτω άκρο του ακλόνητα στερεωμένο στο έδαφος. Το συσσωμάτωμα αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y = A\eta\mu(5\sqrt{2}t + \frac{5\pi}{6})$ (SI), θεωρώντας ως χρονική στιγμή $t = 0$ τη στιγμή της κρούσης και ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω.



Να υπολογίσετε:

- Α) τη μάζα m_1 του στόκου και το πλάτος A της ταλάντωσης του συσσωματώματος.
- Β) την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- Γ) την ταχύτητα u_1 που έχει το κομμάτι του στόκου τη στιγμή που αποκολλάται από τη ράβδο.
- Δ) την αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 της ράβδου.
- Ε) την γωνιακή ταχύτητα ω_2 της ράβδου, όταν σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο, με το συνημίτονο της γωνίας φ να είναι $\cos\varphi = \frac{2}{3}$.



Δίνεται: το $g = 10\text{ m/s}^2$ και ότι η ροπή αδράνειας

ράβδου μήκους L και μάζας M ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο της είναι $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$.

Λύση

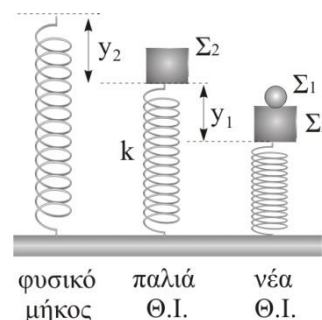
- Α) Το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = 5\sqrt{2}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Η σταθερά επαναφοράς D ισούται με τη σταθερά ελατηρίου k και από τη σχέση της με την κυκλική συχνότητα υπολογίζουμε τη μάζα m_1 του στόκου

$$D = k = (m_1 + m_2) \omega^2 \Rightarrow m_1 = \frac{k}{\omega^2} - m_2 \Rightarrow m_1 = \frac{10 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{\left(5\sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2} - 0,1\text{kg} \Rightarrow m_1 = 0,1\text{kg}.$$

Στην αρχική θέση ισορροπίας, το σώμα μάζας m_2 ισορροπεί με την επίδραση του βάρους και της δύναμης του ελατηρίου, με το ελατήριο παραμορφωμένο κατά y_2 :

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w_2 = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_2 g = k y_2 \Rightarrow$$

$$y_2 = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow y_2 = \frac{0,1\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10 \frac{\text{N}}{\text{m}}} \Rightarrow y_2 = 0,1\text{m}.$$



Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας, η οποία είναι μετατοπισμένη προς τα κάτω κατά y_1 από την αρχική θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m_2 . Η απόσταση y_1 βρίσκεται από τη συνθήκη ισορροπίας στη νέα θέση

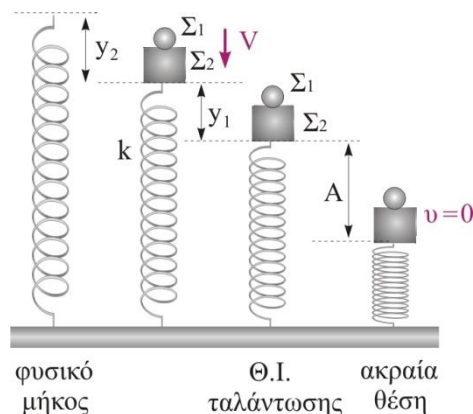
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w_{12} = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow (m_1 + m_2) g = k(y_1 + y_2) \Rightarrow y_1 = \frac{(m_1 + m_2) g}{k} - y_2 \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{(0,1\text{kg} + 0,1\text{kg}) \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10 \frac{\text{N}}{\text{m}}} - 0,1\text{m} \Rightarrow y_1 = 0,1\text{m}.$$

Από την εξίσωση της ταλάντωσης και με δεδομένο ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ το συσσωμάτωμα έχει απομάκρυνση y_1 , υπολογίζουμε το πλάτος A της ταλάντωσης του συσσωματώματος

$$y_1 = A \sin\left(5\sqrt{2}t + \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow 0,1\text{m} = A \sin \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 0,1\text{m} = A \frac{1}{2} \Rightarrow A = 0,2\text{m}.$$

Β) Με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση του συσσωματώματος, μεταξύ της θέσης αμέσως μετά την κρούση, η οποία απέχει y_1 από τη νέα θέση ισορροπίας και της ακραίας θέσης βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος



$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}ky_1^2 \Rightarrow$$

$$V^2 = \frac{k(A^2 - y_1^2)}{m_1 + m_2} \Rightarrow |V| = \sqrt{\frac{k(A^2 - y_1^2)}{m_1 + m_2}} \Rightarrow$$

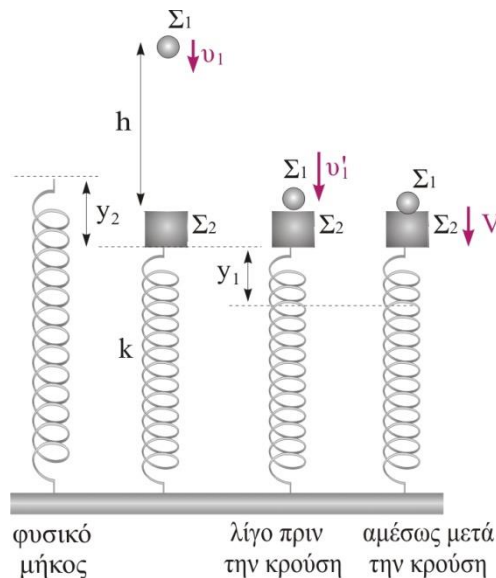
$$|V| = \sqrt{\frac{10 \frac{N}{m} [(0,2m)^2 - (0,1m)^2]}{0,2kg}} \Rightarrow |V| = \sqrt{1,5} \frac{m}{s}.$$

Γ) Το κομμάτι του στόκου αποκολλάται από τη ράβδο με ταχύτητα u_1 και προσπίπτει με ταχύτητα u_1' , στο σώμα μάζας m_2 μετά από μετατόπιση $h=10cm$.

Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για αυτή την κίνηση, θεωρώντας στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας τη θέση της πλαστικής κρούσης, δίνει

$$E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + m_1gh = \frac{1}{2}m_1u_1'^2 + 0 \Rightarrow u_1'^2 + 2gh = u_1'^2 \quad (1)$$



Τα σώματα συγκρούονται πλαστικά και αν συμβολίσουμε με V την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση, η αρχή διατήρησης της ορμής δίνει

$$\vec{p}_{\piριν} = \vec{p}_{μετά} \quad \text{ή} \quad m_1u_1' + 0 = (m_1 + m_2)V \quad (2)$$

Η σχέση (2) δίνει την ταχύτητα u_1' του στόκου

$$m_1u_1' + 0 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow u_1' = \frac{(m_1 + m_2)V}{m_1} \Rightarrow u_1' = \frac{(0,1kg + 0,1kg)\sqrt{1,5} \frac{m}{s}}{0,1kg}$$

$$u_1' = 2\sqrt{1,5} \frac{m}{s}.$$

Τέλος, η σχέση (1) δίνει την ταχύτητα u_1 που έχει το κομμάτι του στόκου τη στιγμή που αποκολλάται από τη ράβδο

$$u_1'^2 + 2gh = u_1'^2 \Rightarrow u_1 = \sqrt{u_1'^2 - 2gh} \Rightarrow u_1 = \sqrt{\left(2\sqrt{1,5} \frac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,1m}$$

$$u_1 = 2 \frac{m}{s}.$$

Δ) Βρίσκουμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το άκρο της, Α, σύμφωνα με το θεώρημα Steiner

$$I_{p,A} = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 = \frac{1}{3} \cdot 0,3\text{kg} \cdot (0,08\text{m})^2 \Rightarrow$$

$$I_{p,A} = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{kgm}^2.$$

Η συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου - στόκου είναι

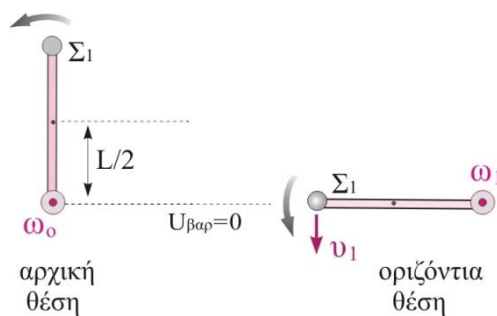
$$I_{ολ} = I_{p,A} + I_{στ} = \frac{1}{3}ML^2 + m_1L^2 \Rightarrow I_{ολ} = \frac{1}{3} \cdot 0,3\text{kg} \cdot (0,08\text{m})^2 + 0,1\text{kg} \cdot (0,08\text{m})^2 \Rightarrow$$

$$I_{ολ} = 12,8 \cdot 10^{-4} \text{kgm}^2.$$

Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου ω_1 , όταν γίνει οριζόντια, προκύπτει από την ταχύτητα του στόκου v_1

$$v_1 = \omega_1 L \Rightarrow \omega_1 = \frac{v_1}{L} = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,08\text{m}} \Rightarrow \omega_1 = 25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Για τον υπολογισμό της αρχικής γωνιακής ταχύτητας ω_0 της ράβδου εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για τη ράβδο μεταξύ της αρχικής κατακόρυφης θέσης και της οριζόντιας. Θεωρούμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη ράβδο στην οριζόντια θέση



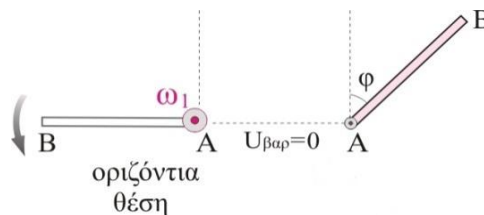
$$E_{μηχ, αρχ} = E_{μηχ, τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}I_{ολ}\omega_0^2 + m_1gL + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_{ολ}\omega_1^2 + 0 \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{I_{ολ}\omega_1^2 - 2m_1gL - MgL}{I_{ολ}}} = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{(2m_1 + M)gL}{I_{ολ}}} \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \sqrt{\left(25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{(2 \cdot 0,1\text{kg} + 0,3\text{kg})10\text{m/s}^2 \cdot 0,08\text{m}}{12,8 \cdot 10^{-4} \text{kgm}^2}} \Rightarrow$$

$$\omega_0 = 12,5\sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Ε) Για τον υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας ω_2 της ράβδου, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, για την οριζόντια και την τελική θέση. Θεωρούμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη ράβδο στην οριζόντια θέση.



$$E_{\mu\eta\chi, \alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi, \tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I_{\rho, A} \omega_1^2 + 0 = \frac{1}{2} I_{\rho, A} \omega_2^2 + Mg \frac{L}{2} \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{I_{\rho, A} \omega_1^2 - MgL\sigma\upsilon\nu\varphi}{I_{\rho, A}}} \Rightarrow$$

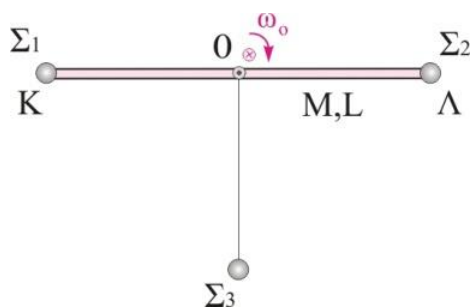
$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{MgL\sigma\upsilon\nu\varphi}{I_{\rho, A}}} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\left(25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{0,3\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 0,08\text{m} \cdot \frac{2}{3}}{6,4 \cdot 10^{-4} \text{kgm}^2}} \Rightarrow$$

$$\omega_2 = 5\sqrt{15} \frac{\text{rad}}{\text{s}} .$$

Πρόβλημα 16.



Η ράβδος ΚΛ του σχήματος είναι ομογενής, έχει μήκος $L=0,5\text{m}$, μάζα $M=0,3\text{kg}$ και μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσο της, Ο. Στα άκρα της ράβδου είναι στερεωμένες δύο σημειακές σφαίρες, Σ_1 και Σ_2 , με μάζες $m_1=0,1\text{kg}$ και $m_2=0,2\text{kg}$, αντίστοιχα. Δίνουμε στο σύστημα ράβδου – μαζών, στην οριζόντια θέση, αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=10\text{rad/s}$, με φορά όπως η φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Μόλις η ράβδος γίνει κατακόρυφη, η σφαίρα Σ_2 συγκρούεται πλαστικά με ακίνητη σημειακή σφαίρα Σ_3 , μάζας $m_3=0,2\text{kg}$, η οποία κρέμεται από λεπτό αβαρές νήμα.



Να υπολογίσετε:

- Α)** τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου – σφαιρών Σ_1, Σ_2 .
- Β)** την ταχύτητα της σφαίρας Σ_2 όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη και ελάχιστα πριν τη σύγκρουσή της με τη σφαίρα Σ_3 .
- Γ)** τη δύναμη που ασκεί η ράβδος στη σφαίρα Σ_1 (μέτρο και κατεύθυνση), όταν αυτή διέρχεται από το ψηλότερο σημείο της τροχιάς της και ελάχιστα πριν τη σύγκρουση των σφαιρών Σ_2, Σ_3 .
- Δ)** τη θερμότητα που παράγεται κατά την πλαστική κρούση.

Δίνονται: $g=10\text{ m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της $I = \frac{1}{12} ML^2$.

Λύση

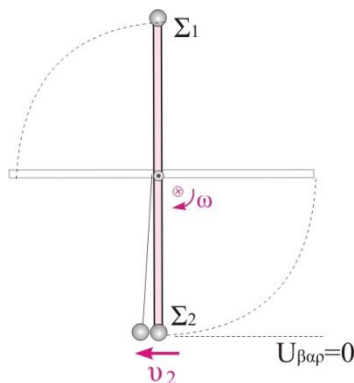
Α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου - σφαιρών Σ_1, Σ_2 ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου είναι

$$I_{O, \alpha\rho\chi} = I_p + I_1 + I_2 = \frac{1}{12} ML^2 + m_1 \left(\frac{L}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{L}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$I_{O, \alpha\rho\chi} = \frac{1}{12} \cdot 0,3\text{kg} \cdot (0,5\text{m})^2 + 0,1\text{kg} \cdot (0,25\text{m})^2 + 0,2\text{kg} \cdot (0,25\text{m})^2 \Rightarrow$$

$$I_{O, \alpha\rho\chi} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{kgm}^2.$$

Β) Για τον υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας ω του συστήματος ράβδου - σφαιρών Σ_1 , Σ_2 , όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της αρχικής οριζόντιας θέσης και της τελικής κατακόρυφης θέσης. Θεωρούμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη σημειακή σφαίρα Σ_3



$$E_{\text{μηχ},\alpha\rho\chi} = E_{\text{μηχ},\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I_{O,\alpha\rho\chi} \omega_0^2 + (m_1 + m_2 + M) g \frac{L}{2} = \frac{1}{2} I_{O,\alpha\rho\chi} \omega^2 + m_1 g L + M g \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{I_{O,\alpha\rho\chi} \omega_0^2 - m_1 g L + m_2 g L}{I_{O,\alpha\rho\chi}}} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{(m_2 - m_1) g L}{I_{O,\alpha\rho\chi}}} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{(0,2\text{kg} - 0,1\text{kg}) \cdot (10\text{m/s}^2) \cdot 0,5\text{m}}{2,5 \cdot 10^{-2} \text{kgm}^2}} \Rightarrow$$

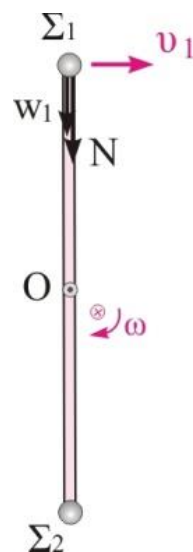
$$\omega = 2\sqrt{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η ταχύτητα της σφαίρας Σ_2 όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη, προκύπτει από τη γωνιακή ταχύτητα ω ,

$$v_2 = \omega \frac{L}{2} \Rightarrow v_2 = 2\sqrt{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \frac{0,5\text{m}}{2} \Rightarrow v_2 = \frac{\sqrt{30}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γ) Η σφαίρα Σ_1 εκτελεί κυκλική κίνηση και τη χρονική στιγμή που βρίσκεται στην ανώτερη θέση της τροχιάς της δέχεται δύο δυνάμεις: το βάρος της και τη δύναμη N που της ασκεί η ράβδος. Εκείνη τη στιγμή το σύστημα ράβδου - σφαιρών δεν δέχεται ροπή, άρα δεν υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση στο σύστημα, ούτε γραμμική (επιτρόχιος) επιτάχυνση στη σφαίρα Σ_1 . Κατά συνέπεια, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στη σφαίρα Σ_1 στη θέση αυτή "παίζουν" μόνο το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

Άρα,



$$\Sigma F = F_k \Rightarrow m_1 g + N = \frac{m_1 v_1^2}{\frac{L}{2}} \Rightarrow N = \frac{m_1 \left(\omega \frac{L}{2} \right)^2}{\frac{L}{2}} - m_1 g \Rightarrow$$

$$N = m_1 \omega^2 \frac{L}{2} - m_1 g \Rightarrow$$

$$N = 0,1 \text{ kg} \cdot \left(2\sqrt{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \cdot \frac{0,5 \text{ m}}{2} - 0,1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow N = 2 \text{ N}.$$

Η φορά της δύναμης N είναι προς το κέντρο της ράβδου, O , όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Δ) Μετά την κρούση η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου - σφαιρών Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 είναι

$$I_{O, \text{τελ}} = I_p + I_1 + I_2 + I_3 = I_{O, \text{αρχ}} + I_3 \Rightarrow I_{O, \text{τελ}} = I_{O, \text{αρχ}} + m_3 \left(\frac{L}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$I_{O, \text{τελ}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2 + 0,2 \text{ kg} \cdot (0,25 \text{ m})^2 \Rightarrow I_{O, \text{τελ}} = \frac{3}{80} \text{ kgm}^2.$$

Κατά την πλαστική κρούση των σφαιρών Σ_2 , Σ_3 ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής για το όλο σύστημα, καθώς δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές. Έτσι, για τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος, ω' , μετά την κρούση έχουμε

$$L_{\text{πριν}} = L_{\text{μετά}} \Rightarrow I_{O, \text{αρχ}} \omega = I_{O, \text{τελ}} \omega' \Rightarrow \omega' = \frac{I_{O, \text{αρχ}}}{I_{O, \text{τελ}}} \omega = \frac{2,5 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2}{\frac{3}{80} \text{ kgm}^2} \cdot 2\sqrt{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\omega' = \frac{4}{3} \sqrt{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Η θερμότητα που παράγεται κατά την πλαστική κρούση ισούται με

$$Q = K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}} = \frac{1}{2} I_{O, \text{αρχ}} \omega^2 - \frac{1}{2} I_{O, \text{τελ}} \omega'^2 \Rightarrow$$

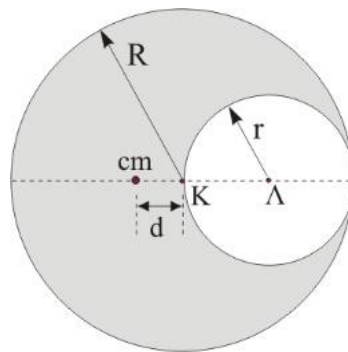
$$Q = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2 \cdot \left(2\sqrt{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{80} \text{ kgm}^2 \cdot \left(\frac{4}{3} \sqrt{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow$$

$$Q = 0,5 \text{ J}.$$

Πρόβλημα 17. **Νέο**

Ένας ισοπαχής κυκλικός δίσκος έχει ακτίνα $R = \frac{5}{13} \text{ m}$, μάζα

$M = 13 \text{ kg}$ και μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του K . Από το δίσκο αφαιρούμε ένα μικρότερο κυκλικό δίσκο ακτίνας $r = R/2$, του οποίου το κέντρο Λ βρίσκεται πάνω στην οριζόντια διάμετρο, δεξιότερα από το κέντρο K και σε απόσταση $R/2$ από αυτό. Το σώμα που δημιουργείται έχει κέντρο μάζας που βρίσκεται πάνω στην ευθεία $K\Lambda$ και αριστερότερα του K κατά $d = R/6$. Αφήνουμε το σώμα ελεύθερο να κινηθεί από τη θέση του σχήματος, δηλαδή από τη θέση όπου κέντρο μάζας σώματος, cm , σημείο K και σημείο Λ βρίσκονται πάνω στην οριζόντια διάμετρο.



Να υπολογίσετε:

Α) τη ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, που διέρχεται από το σημείο K .

Β) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος στην θέση που αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί.

Γ) τη στροφορμή του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του, όταν η ευθεία $K\Lambda$ γίνει κατακόρυφη.

Δ) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή που η διεύθυνση $K\Lambda$ σχηματίζει με την κατακόρυφη διεύθυνση γωνία φ , με $\eta\mu\varphi = 0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,6$.

Δίνονται: $g = 10 \text{ m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας δίσκου ακτίνας R και μάζας M ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο του, $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$.

Λύση

Α) Η ροπή αδράνειας του σώματος, I , προκύπτει αν από τη ροπή αδράνειας, I_Δ , ολόκληρου του δίσκου, αφαιρέσουμε τη ροπή αδράνειας, που συνεισέφερε ο δίσκος που αφαιρέθηκε $I_{\delta,K}$.

Η μάζα m του δίσκου που αφαιρούμε προκύπτει από την πυκνότητα του δίσκου. Έστω, V ο όγκος όλου του δίσκου, V' ο όγκος του δίσκου που αφαιρέσαμε, h το πάχος του δίσκου και ρ η πυκνότητά του. Είναι

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{m}{V'} \Rightarrow \frac{M}{\pi R^2 h} = \frac{m}{\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 h} \Rightarrow m = \frac{M}{4}.$$

Η ροπή αδράνειας $I_{\delta,K}$ του δίσκου που αφαιρέσαμε, ακτίνας r και μάζας m , ως προς άξονα που διέρχεται από το K προκύπτει από το θεώρημα Steiner

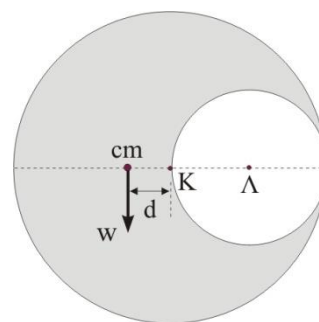
$$I_{\delta,K} = I_{cm} + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{M}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{\delta,K} = \frac{3}{32}MR^2.$$

Άρα η ροπή αδράνειας του σώματος που απομένει μετά την αφαίρεση του μικρού δίσκου είναι

$$I = I_{\Lambda} - I_{\delta,K} = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{3}{32}MR^2 \Rightarrow I = \frac{13}{32}MR^2 = \frac{13}{32} \cdot 13\text{kg} \cdot \left(\frac{5}{13}\text{m}\right)^2 \Rightarrow$$

$$I = \frac{25}{32}\text{kgm}^2.$$

Β) Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση υπολογίζουμε τη γωνιακή επιτάχυνση του σώματος στην θέση που αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Ροπή έχει μόνο το βάρος του σώματος, που ασκείται στο κέντρο μάζας, το οποίο βρίσκεται πάνω στην ευθεία $ΚΛ$ και αριστερότερα του K κατά $d=R/6$.



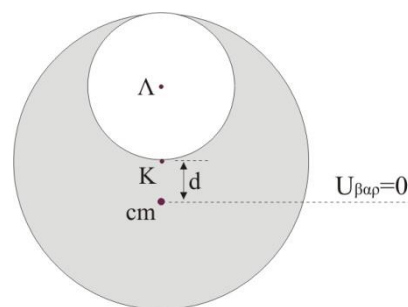
$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma} \Rightarrow \tau_w = I\alpha_{\gamma} \Rightarrow wd = \frac{13}{32}MR^2\alpha_{\gamma} \Rightarrow$$

$$(M-m)g\frac{R}{6} = \frac{13}{32}MR^2\alpha_{\gamma} \Rightarrow$$

$$\frac{3M}{4}g\frac{R}{6} = \frac{13}{32}MR^2\alpha_{\gamma} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = \frac{4}{13}\frac{g}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = \frac{4}{13} \cdot \frac{10\text{m/s}^2}{\frac{5}{13}\text{m}} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma} = 8\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Γ) Για τον υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας ω_1 του σώματος, όταν η ευθεία $ΚΛ$ γίνει κατακόρυφη, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. Θεωρούμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος στην τελική θέση.



$$E_{\mu\eta\chi, \alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi, \tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$0 + \frac{3M}{4}gd = \frac{1}{2}I\omega_1^2 + 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3M}{4}g\frac{R}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{32}MR^2\omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{8}{13}\frac{g}{R}} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{8}{13} \cdot \frac{10\text{m/s}^2}{\frac{5}{13}\text{m}}} \Rightarrow$$

$$\omega_1 = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

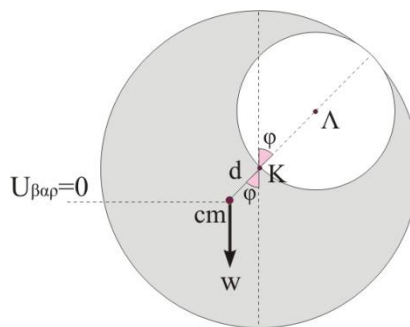
Η στροφορμή του σώματος όταν η ευθεία ΚΛ γίνει κατακόρυφη είναι

$$L = I\omega_1 = \frac{25}{32}\text{kgm}^2 \cdot 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow L = \frac{25}{8} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}.$$

Δ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega_2 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \tau_w \cdot \omega_2 \quad (1)$$

Για τον υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας ω_2 του σώματος τη χρονική στιγμή που η διεύθυνση ΚΛ σχηματίζει με την κατακόρυφη διεύθυνση γωνία φ , εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. Θεωρούμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος στην τελική θέση



$$E_{\mu\eta\chi, \alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi, \tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow 0 + \frac{3M}{4}gd\sin\varphi = \frac{1}{2}I\omega_2^2 + 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3M}{4}g\frac{R}{6}\sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{32}MR^2\omega_2^2 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{8}{13}\frac{g\sin\varphi}{R}} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{8}{13} \cdot \frac{10\text{m/s}^2 \cdot 0,6}{\frac{5}{13}\text{m}}} \Rightarrow$$

$$\omega_2 = \sqrt{9,6} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Από τη σχέση (1) βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας

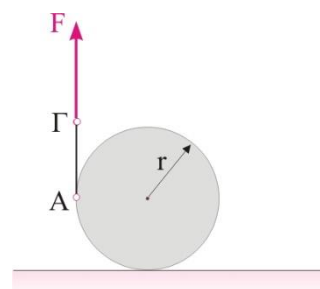
$$\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega_2 = wd\eta\mu\varphi \cdot \omega_2 = \frac{3M}{4}g\frac{R}{6}\eta\mu\varphi \cdot \omega_2 \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{3}{4} \cdot 13\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot \frac{5}{6}\text{m} \cdot 0,8 \cdot 4\sqrt{0,6} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = 10\sqrt{2,4} \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Πρόβλημα 18. **Νέο**

Ο κύλινδρος του σχήματος έχει μάζα $m = 3 \text{ kg}$, ακτίνα r και γύρω του είναι τυλιγμένο αβαρές και μη ελαστικό νήμα. Τη χρονική στιγμή $t=0$ ασκούμε στην άκρη του νήματος, σημείο Γ , δύναμη $\vec{F}$, η οποία παραμένει διαρκώς κατακόρυφη. Η δύναμη $\vec{F}$ έχει τη μέγιστη τιμή που μπορούμε να εφαρμόσουμε, ώστε ο κύλινδρος να κυλάει οριζόντια χωρίς να ολισθαίνει και χωρίς να χάνει την επαφή με το έδαφος. Το νήμα ξετυλίγεται, χωρίς να γλιστρά στο αυλάκι. Ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και οριζόντιου επιπέδου είναι $\mu_{op}=1/3$.



A) Να γράψετε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική και τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου.

B) Να υπολογίσετε τα μέτρα της δύναμης $\vec{F}$ και της στατικής τριβής.

Γ) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1 , που το σημείο εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}$, θα μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά $y = 0,9m$.

Δ) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1 .

Ε) Να υπολογίσετε την ισχύ της δύναμης $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή t_1 .

Δίνονται: $g=10 \text{ m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του $I = \frac{1}{2}mr^2$.

Λύση

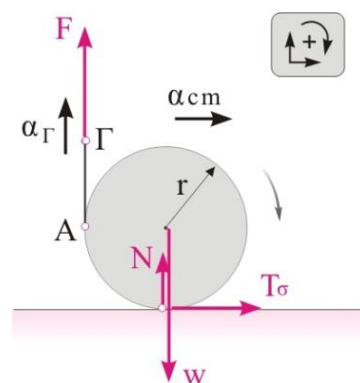
A) Ο κύλινδρος με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$ και της στατικής τριβής, $\vec{T}_\sigma$, εκτελεί σύνθετη κίνηση. Για την μεταφορική της κίνηση, ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow T_\sigma = m\alpha_{cm} \quad (1)$$

Για την στροφική κίνηση έχουμε

$$\Sigma \tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow Fr - T_\sigma r = I\alpha_\gamma \Rightarrow Fr - T_\sigma r = \frac{1}{2}mr^2\alpha_\gamma \Rightarrow$$

$$F - T_\sigma = \frac{1}{2}m\alpha_\gamma \quad (2)$$



Β) Επειδή ο κύλινδρος κυλίνεται, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του, a_{cm} , συνδέεται με τη γωνιακή του επιτάχυνση με τη σχέση $a_{cm} = \alpha_{\gamma} r$ (3)

Η σχέση (2) με τη βοήθεια της (3) γίνεται

$$Fr - T_{\sigma} r = \frac{1}{2} m r a_{cm} \quad (4)$$

Απαλείφοντας την επιτάχυνση του κέντρου μάζας από τις σχέσεις (1) και (4) με διαίρεση κατά μέλη έχουμε

$$\frac{T_{\sigma}}{Fr - T_{\sigma} r} = \frac{m a_{cm}}{\frac{1}{2} m r a_{cm}} \Rightarrow \frac{T_{\sigma}}{Fr - T_{\sigma} r} = \frac{2}{r} \Rightarrow T_{\sigma} = \frac{2F}{3} \quad (5)$$

Στον άξονα y ο κύλινδρος ισορροπεί, άρα

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F = w \Rightarrow N = mg - F.$$

Προκειμένου ο κύλινδρος να κυλίνεται, χωρίς να ολισθαίνει πρέπει

$$T_{\sigma} \leq T_{op} \Rightarrow \frac{2F}{3} \leq \mu_{op} N \Rightarrow \frac{2F}{3} \leq \mu_{op} (mg - F) \Rightarrow F \leq \frac{3\mu_{op} mg}{2 + 3\mu_{op}} \quad (6)$$

Εφόσον η δύναμη $\vec{F}$ έχει τη μέγιστη τιμή που μπορούμε να εφαρμόσουμε, ώστε ο κύλινδρος να κυλάει οριζόντια χωρίς να ολισθαίνει, η σχέση (6) δίνει

$$F = F_{max} = \frac{3\mu_{op} mg}{2 + 3\mu_{op}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3kg \cdot 10 \frac{m}{s^2}}{2 + 3 \cdot \frac{1}{3}} \Rightarrow F = 10N.$$

$$\text{Η σχέση (5) δίνει τη στατική τριβή } T_{\sigma} = \frac{2F}{3} \Rightarrow T_{\sigma} = \frac{20}{3} N.$$

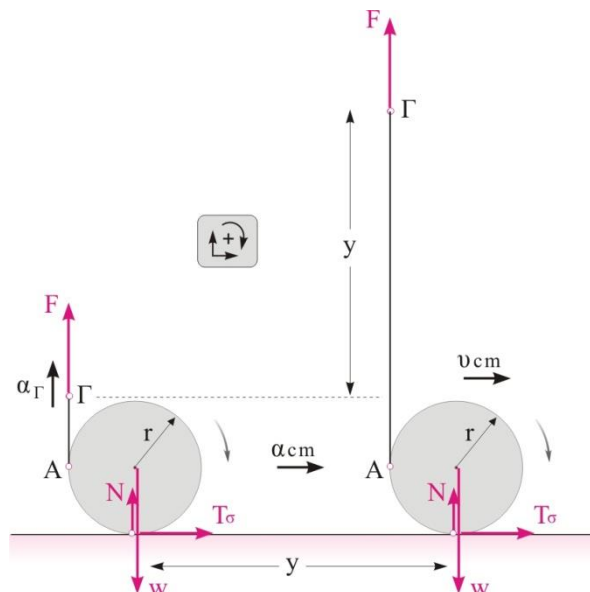
Γ) Η κίνηση του κυλίνδρου είναι κύλιση, οπότε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου ισούται με το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης των σημείων της περιφέρειας του κυλίνδρου και κατά συνέπεια και της κατακόρυφης επιτάχυνσης και σημείου Γ. Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας

$$T_{\sigma} = m a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{T_{\sigma}}{m} \Rightarrow a_{cm} = \frac{\frac{20}{3} N}{3kg} \Rightarrow a_{cm} = a_{\Gamma} = \frac{20}{9} \frac{m}{s^2}.$$

Το σημείο Γ κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και η μετατόπισή του, $y = 0,9\text{m}$, μας δίνει τη χρονική στιγμή t_1

$$y = \frac{1}{2} \alpha_{\Gamma} t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2y}{\alpha_{\Gamma}}} \Rightarrow$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,9\text{m}}{\frac{20\text{ m}}{9\text{ s}^2}}} \Rightarrow t_1 = 0,9\text{s}.$$



Δ) Α' τρόπος

Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας προκύπτει η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1

$$\Delta K = W_F \Rightarrow K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F \Rightarrow K_{\text{τελ}} - 0 = Fy \Rightarrow K_{\text{τελ}} = 10\text{N} \cdot 0,9\text{m} \Rightarrow$$

$$K_{\text{τελ}} = 9\text{J}.$$

Β' τρόπος

Βρίσκουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας τη χρονική στιγμή t_1

$$v_{\text{cm}} = \alpha_{\text{cm}} t_1 \Rightarrow v_{\text{cm}} = \frac{20\text{ m}}{9\text{ s}^2} \cdot 0,9\text{s} \Rightarrow v_{\text{cm}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι

$$K_{\text{τελ}} = K_{\mu} + K_{\pi} \Rightarrow K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \Rightarrow$$

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{4} m v_{\text{cm}}^2 = \frac{3}{4} m v_{\text{cm}}^2 \Rightarrow K_{\text{τελ}} = \frac{3}{4} \cdot 3\text{kg} \cdot \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow K_{\text{τελ}} = 9\text{J}.$$

Ε) Η ισχύς της δύναμης τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$P_F = \frac{dW_F}{dt} = \frac{Fdy}{dt} \Rightarrow P_F = Fv_{\Gamma} = Fv_{\text{cm}} \Rightarrow P_F = 10\text{N} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow P_F = 20 \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 29/07/2020

Επιμέλεια: Δημήτριος Κλαυδιανός, Παναγιώτης Μπετσάκος, Αντώνιος Παλόγος, Γεώργιος Παπαλεξίου, Ηλίας Ποντικός, Κωνσταντίνος Στεφανίδης, Παναγιώτης Τσουμάκης

Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Βασίλειος Ραυτόπουλος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης