

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο: ΚΥΜΑΤΑ

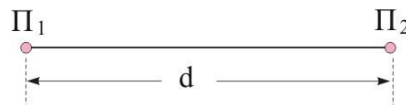
ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΥΜΑΤΩΝ - ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ - ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Οι πηγές Π_1 και Π_2 του σχήματος είναι σύγχρονες, ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος και δημιουργούν κύματα μήκους κύματος λ . Αν η απόσταση μεταξύ των πηγών είναι $d=1,3\lambda$, τότε επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ τα σημεία ενισχυτικής συμβολής που υπάρχουν είναι



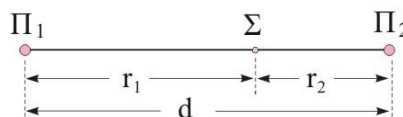
- α. 3.
- β. 4.
- γ. 5.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή είναι η απάντηση (α).

Για το σημείο (Σ), η συνθήκη για ενισχυτική συμβολή είναι



$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad (1)$$

Από την εκφώνηση, γνωρίζουμε ότι

$$r_1 + r_2 = 1,3\lambda \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε

$$2r_1 = 1,3\lambda + N\lambda \quad \text{ή} \quad r_1 = 0,65\lambda + \frac{N}{2}\lambda$$

Για την απόσταση r_1 γνωρίζουμε ότι $0 < r_1 < 1,3\lambda$.

Για: $N=0$, $r_1=0,65\lambda$ (δεκτό)

$N=1$, $r_1=1,15\lambda$ (δεκτό)

$N = 2$, $r_1 = 1,65\lambda$ (απορρίπτεται)

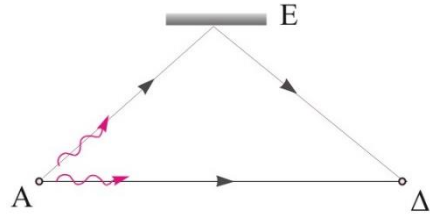
$N = -1$, $r_1 = 0,15\lambda$ (δεκτό)

$N = -2$, $r_1 = -0,35\lambda$ (απορρίπτεται).

Η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής για το συγκεκριμένο πεδίο ορισμού ($0 < r_1 < 1,3\lambda$) μας δίνει 3 σημεία, για $N=0,1$ και -1 .

Ερώτηση 2.

Στο σημείο (Δ) συμβαίνει συμβολή των κυμάτων που ξεκινούν από την πηγή Α και φθάνουν στο σημείο (Δ) απευθείας (διαδρομή ΑΔ) και από ανάκλαση στην επιφάνεια Ε (διαδρομή ΑΕΔ). Το μήκος κύματος είναι $\lambda=4\text{cm}$.



Αν στο σημείο Δ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή και η απόσταση ΑΔ είναι 20cm τότε το πιθανό μήκος της διαδρομής ΑΕΔ είναι

α. 26cm.

β. 16cm.

γ. 28cm.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή είναι η απάντηση (γ)

Για να έχουμε ενισχυτική συμβολή στο (Δ), θα πρέπει να ισχύει

$$(AE\Delta) - (A\Delta) = N \cdot \lambda \quad \text{ή} \quad (AE\Delta) - 20\text{cm} = N \cdot 4\text{cm} \quad \text{ή} \quad (AE\Delta) = N \cdot 4\text{cm} + 20\text{cm}$$

Η σχέση αυτή ικανοποιείται για

$$N = -1 \text{ δίνοντας } (AE\Delta) = 16 \text{ cm}$$

$$N = 2 \text{ δίνοντας } (AE\Delta) = 28 \text{ cm}$$

Επειδή όμως πρέπει $(AE\Delta) > (A\Delta)$, η απόσταση (ΑΕΔ) είναι 28cm.

Ερώτηση 3.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου αποκαθίσταται στάσιμο κύμα με μήκος κύματος λ . Τα σημεία M_1 και M_2 του μέσου απέχουν αντίστοιχα $\lambda/12$ και $5\lambda/8$ από τον ίδιο δεσμό και προς την ίδια κατεύθυνση.

α. Τα δύο σημεία βρίσκονται σε αντίθεση φάσης και το M_2 έχει μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης.

β. Τα δύο σημεία βρίσκονται σε αντίθεση φάσης και το M_1 έχει μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης.

γ. Τα δύο σημεία βρίσκονται σε συμφωνία φάσης και το M_2 έχει μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

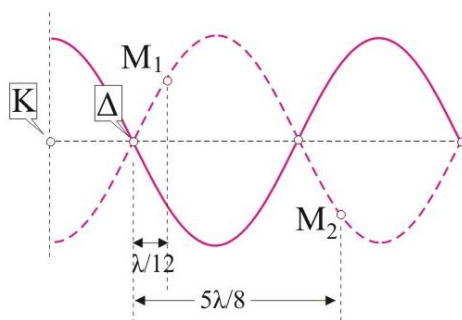
Λύση

Σωστή είναι η πρόταση (α)

Τα δύο σημεία απέχουν από την κοιλία απόσταση

$$\text{Το } M_1: x_1 = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} = \frac{\lambda}{3}$$

$$\text{Το } M_2: x_2 = \frac{\lambda}{4} + \frac{5\lambda}{8} = \frac{7\lambda}{8}$$



Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος τους

και το πρόσημο του όρου που μας δίνει το πλάτος ταλάντωσης του κάθε σημείου. Αν τα πρόσημα είναι ίδια, τα σημεία βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, αλλιώς, αν είναι αντίθετα, τότε είναι σε αντίθεση φάσης.

Ο όρος του πλάτους για το M_1 δίνει

$$A_1 = 2A \cdot \sin \frac{2\pi \lambda / 3}{\lambda} \Rightarrow A_1 = 2A \left(-\frac{1}{2} \right)$$

Ο όρος του πλάτους για το M_2 δίνει

$$A_2 = 2A \cdot \sin \frac{2\pi 7\lambda / 8}{\lambda} \Rightarrow A_2 = 2A \left(+\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Παρατηρούμε ότι τα πρόσημα είναι αντίθετα, άρα τα σημεία βρίσκονται σε αντίθεση φάσης. Επίσης $|A_1| = A$, $|A_2| = A\sqrt{2}$ άρα το πλάτος ταλάντωσης του M_2 είναι μεγαλύτερο.

Ερώτηση 4.

Κατά μήκος μιας χορδής που έχει τα δύο άκρα της στερεωμένα ακλόνητα, αποκαθίσταται στάσιμο κύμα και δημιουργούνται συνολικά 4 δεσμοί. Τα σωμάτια της χορδής ταλαντώνονται με συχνότητα f_1 . Μεταβάλλουμε τη συχνότητα ταλάντωσης σε f_2 , οπότε στη χορδή δημιουργούνται συνολικά 5 δεσμοί. Ο λόγος των συχνοτήτων f_1/f_2 είναι

α. 4/5

β. 3/4

γ. 5/4.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

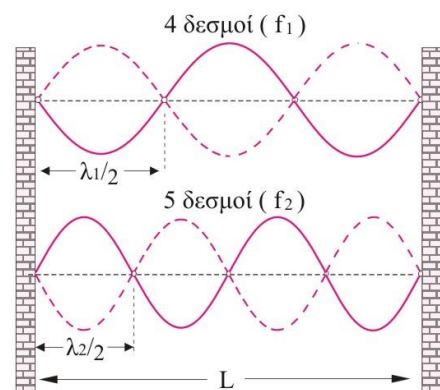
Σωστή είναι η απάντηση (β)

Το μήκος της χορδής είναι σταθερό.

Όταν η συχνότητα ταλάντωσης είναι f_1 , έχουμε συνολικά 4 δεσμούς, επομένως $L=3\lambda_1/2$.

Όταν η συχνότητα ταλάντωσης είναι f_2 , έχουμε συνολικά 5 δεσμούς, επομένως $L=4\lambda_2/2$.

$$\text{Επομένως } L = \frac{3}{2}\lambda_1 = \frac{4}{2}\lambda_2 \Rightarrow 3\lambda_1 = 4\lambda_2$$

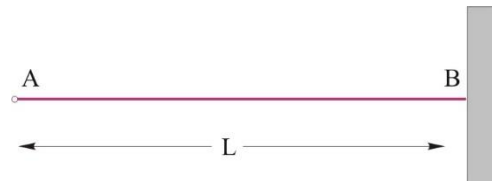


Η ταχύτητα διάδοσης είναι ίδια γιατί έχουμε ίδιο μέσο διάδοσης, επομένως

$$3\frac{v}{f_1} = 4\frac{v}{f_2} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{3}{4}$$

Ερώτηση 5.

Σε μια ελαστική χορδή που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x' έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Το δεξιό άκρο της χορδής (B) είναι ακλόνητα στερεωμένο, ενώ στο αριστερό άκρο



(A) δημιουργείται κοιλία. Το μήκος της χορδής είναι $L=2\text{m}$ και η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο είναι $v=4\text{m/s}$.

Η συχνότητα με την οποία ένα σημείο της χορδής ταλαντώνεται μπορεί να είναι

α. 2Hz.

β. 2,5Hz.

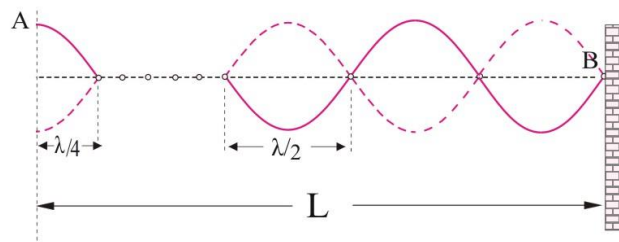
γ. 3Hz.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή είναι η απάντηση (β)

Στο άκρο (A) το οποίο είναι ελεύθερο δημιουργείται κοιλία και στο άκρο (B) που είναι δεσμευμένο δημιουργείται δεσμός. Επομένως, κατά μήκος της χορδής χωράει ένας ακέραιος αριθμός $\lambda/2$ και ένα $\lambda/4$ (βλέπε σχήμα).



Το μήκος L της χορδής είναι

$$L = N \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = (2N+1) \frac{\lambda}{4} = (2N+1) \frac{v}{4f} \Rightarrow f = \frac{(2N+1)v}{4L} \Rightarrow f = (N+0,5) \text{ Hz}$$

Για $N=2$, $f=2,5\text{Hz}$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Από δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 παράγονται κύματα πλάτους $A=1\text{mm}$ και συχνότητας 100Hz . Τα κύματα διαδίδονται στην επιφάνεια υγρού δίνοντας φαινόμενα συμβολής. Η απόσταση μεταξύ των πηγών είναι 2cm και η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι 40cm/s .

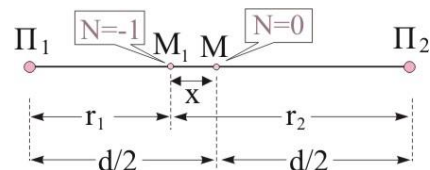
α. Να βρείτε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου M που βρίσκεται στο μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $\Pi_1 \Pi_2$.

β. Να βρείτε τη θέση του πλησιέστερου σημείου προς το M , το οποίο βρίσκεται μεταξύ των Π_1 και M και ταλαντώνεται με πλάτος $2A$.

γ. Να βρείτε το πλήθος των σημείων που υπάρχουν επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1 \Pi_2$ και ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος ταλάντωσης.

Λύση

α. Εφόσον το M είναι στο μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $\Pi_1 \Pi_2$, είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής (ικανοποιείται η συνθήκη $r_1 - r_2 = N\lambda$ για $N=0$).



Επομένως το πλάτος ταλάντωσης του M είναι $A'=2A=2\text{mm}$

β. Έστω το σημείο M_1 είναι το πλησιέστερο προς το σημείο M , το οποίο βρίσκεται μεταξύ των Π_1 και M και ταλαντώνεται με πλάτος $2A$. Για το σημείο αυτό ικανοποιείται η συνθήκη

$$r_1 - r_2 = -\lambda, \quad (N = -1) \quad (1)$$

Από το σχήμα έχουμε

$$r_1 = \frac{d}{2} - x, \quad r_2 = \frac{d}{2} + x$$

$$\text{Επίσης } \lambda = \frac{v}{f} = \frac{40 \text{ cm/s}}{100 \text{ Hz}} = 0,4 \text{ cm}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε

$$2x = \lambda \quad \text{ή} \quad x = \lambda / 2 \quad \text{ή} \quad x = 0,2 \text{ cm}$$

γ. Η συνθήκη για να ταλαντώνονται τα σημεία με μέγιστο πλάτος είναι

$$r_1 - r_2 = N\lambda \Rightarrow r_1 - r_2 = 0,4N \quad (2)$$

$$\text{Επίσης, } r_1 + r_2 = d \Rightarrow r_1 + r_2 = 2\text{cm} \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις (2), (3) παίρνουμε

$$r_1 = 1 + 0,2N \text{ (cm)} \text{ με } 0 < r_1 < 2\text{cm}.$$

Επομένως έχουμε: $0 < r_1 < 2\text{cm} \Rightarrow 0 < 1 + 0,2N < 2\text{cm} \Rightarrow -1 < 0,2N < 1 \Rightarrow -5 < N < 5$,
δηλαδή

$N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, συνολικά 9 σημεία.

Άσκηση 2.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία A και B αντίστοιχα, της ήρεμης επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $d = 4 \text{ m}$. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού χωρίς αρχική φάση, δημιουργώντας κύματα μήκους $\lambda = 0,8 \text{ m}$ τα οποία διαδίδονται με ταχύτητα 2 m/s . Η πηγή Π_1 ισαπέχει από το σημείο (Σ) της επιφάνειας και από το μέσο M του AB. Στο (Σ) τα κύματα φτάνουν με χρονική διαφορά $\Delta t = 0,8 \text{ s}$. Το σημείο M ταλαντώνεται με πλάτος $0,8 \text{ m}$.

α) Να εξετάσετε το είδος της συμβολής που συμβαίνει στο (Σ).

β) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις r_1 και r_2 .

γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις των σημείων απόσβεσης μεταξύ των A και B.

Λύση

α) Είναι: $u = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = 0,4 \text{ s}$

Συνεπώς η χρονική διαφορά άφιξης των δύο κυμάτων στο (Σ) ισούται με: $\Delta t = 0,8 \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 2T$. Τη στιγμή που συναντώνται τα κύματα στο σημείο (Σ) προκαλούν την ίδια απομάκρυνση του (Σ) με την ίδια ταχύτητα. Συνεπώς το (Σ) είναι σημείο ενίσχυσης.

Σημείωση: Η χρονική διαφορά άφιξης των δύο κυμάτων στο Σ, $\Delta t = 2T$, μεταφράζεται σε διαφορά φάσης $\Delta\phi = 2(2\pi) = 4\pi \text{ rad}$. Όμως η διαφορά φάσης των δύο κυμάτων

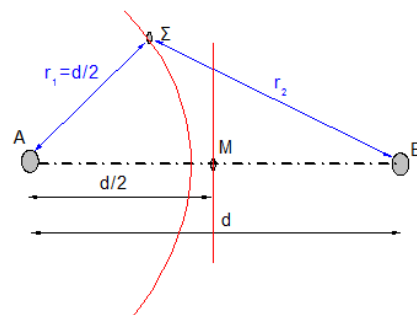
$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \quad \text{και} \quad y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \quad \text{είναι}$$

$$\Delta\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}. \quad \text{Οπότε:} \quad 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = 4\pi \Rightarrow r_2 - r_1 = 2\lambda, \quad \text{άρα}$$

ικανοποιείται η συνθήκη ενίσχυσης.

β) Είναι $AS = AM = d/2 = 2 \text{ m} = r_1$. Το κύμα από την Π_2 φτάνει στο (Σ) με χρονική καθυστέρηση $\Delta t = 2T$ άρα μέχρι το (Σ) διανύει απόσταση μεγαλύτερη κατά 2λ σε σχέση με την απόσταση που διανύει το κύμα από την Π_1 . Δηλαδή:

$$r_2 = r_1 + 2\lambda = 3,6 \text{ m}$$



γ) Αν Δ σημείο απόσβεσης του τμήματος ΑΒ, το οποίο απέχει κατά x_1 από το Α και κατά x_2 από το Β τότε:

$$x_1 - x_2 = \frac{(2N+1)\lambda}{2}$$

Συγχρόνως: $x_1 + x_2 = d = 4 \text{ m}$

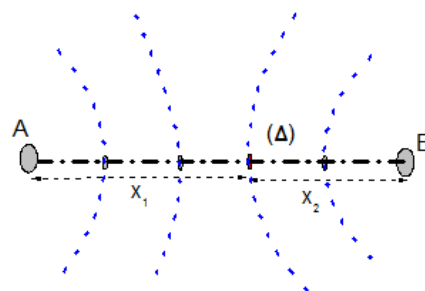
Προσθέτοντας κατά μέλη: $x_1 = \frac{\frac{(2N+1)\lambda}{2} + d}{2}$

Επίσης το (Δ) βρίσκεται μεταξύ των (Α) και (Β) άρα:

$$0 < x_1 < d \Rightarrow 0 < \frac{\frac{(2N+1)\lambda}{2} + d}{2} < d \Rightarrow -5,5 < N < 4,5$$

Για τις ακέραιες τιμές του Ν στο επιτρεπόμενο διάστημα έχουμε τα σημεία:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{για } N = -5: x_1 = 0,2\text{m και } x_2 = 3,8\text{m} \\ \text{για } N = -4: x_1 = 0,6\text{m και } x_2 = 3,4\text{m} \\ \text{για } N = -3: x_1 = 1\text{m και } x_2 = 3\text{m} \\ \text{για } N = -2: x_1 = 1,4\text{m και } x_2 = 2,6\text{m} \\ \text{για } N = -1: x_1 = 1,8\text{m και } x_2 = 2,2\text{m} \\ \text{για } N = 0: x_1 = 2,2\text{m και } x_2 = 1,8\text{m} \\ \text{για } N = 1: x_1 = 2,6\text{m και } x_2 = 1,4\text{m} \\ \text{για } N = 2: x_1 = 3\text{m και } x_2 = 1\text{m} \\ \text{για } N = 3: x_1 = 3,4\text{m και } x_2 = 0,6\text{m} \\ \text{για } N = 4: x_1 = 3,8\text{m και } x_2 = 0,2\text{m} \end{array} \right.$$



Άσκηση 3.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της επιφάνειας ενός υγρού. Τη χρονική στιγμή $t=0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$ (S.I.). Τα κύματα που δημιουργούν διαδίδονται με ταχύτητα 2 m/s . Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά r_1 από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = 2,75 \text{ m}$, ($r_2 > r_1$) από την πηγή Π_2 . Εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π_1 το (Σ) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y_{1\S} = 0,4\eta\mu 2\pi(2t - 1,75)$ (S.I.).

α) Να υπολογίσετε την απόσταση r_1 .

β) Αν στο σημείο Σ βρίσκεται στοιχειώδης φελλός με μάζα $\Delta m = 1 \text{ g}$, να υπολογίσετε την ενέργεια ταλάντωσης του φελλού τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,5 \text{ s}$.

γ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα ταλάντωσης των πηγών, ώστε το (Σ) να είναι σημείο απόσβεσης.

Δίνεται $\pi^2 = 10$.

Λύση

α) Το κύμα από την Π_1 θα προκαλεί στο (Σ) ταλάντωση με εξίσωση:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$$

Συγκρίνοντας με τη δοσμένη εξίσωση $y_{1\S} = 0,4\eta\mu 2\pi(2t - 1,75)$

προκύπτει: $A = 0,4 \text{ m}$, $T = 0,5 \text{ s}$ και $\frac{r_1}{\lambda} = 1,75$.

Ακόμα: $u = \frac{\lambda}{T}$. Συνεπώς: $\lambda = 1 \text{ m}$ και $r_1 = 1,75 \text{ m}$

β) Το υλικό σημείο Σ παραμένει ακίνητο μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{r_1}{u} = 0,875 \text{ s}$, οπότε στο Σ φθάνει το κύμα από την πλησιέστερη σε αυτό πηγή (Π_1). Για $t \geq t_1 = 0,875 \text{ s}$ το υλικό σημείο (Σ) ταλαντώνεται υπό την ενέργεια του κύματος που εκπέμπει η Π_1 μέχρι

τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{r_2}{u} = 1,375 \text{ s}$, οπότε στο (Σ) φθάνει το κύμα και από την πηγή Π_2 .

Για $t = 1,5 \text{ s} > 1,375 \text{ s}$ έχουμε τη συμβολή των δύο κυμάτων.

Για να υπολογίσουμε την ενέργεια ταλάντωσης του Σ πρέπει να υπολογίσουμε το πλάτος ταλάντωσής του.

Για το Σ ικανοποιείται η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής, αφού $r_1 - r_2 = 1,75\text{m} - 2,75\text{m}$ και $\lambda = 1\text{m}$.

$$r_1 - r_2 = N\lambda, (N = -1)$$

Επομένως το Σ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής και έχει πλάτος ταλάντωσης $A' = 2A = 0,8\text{m}$.

Η ενέργεια ταλάντωσής του δίνεται από τη σχέση

$$E_{\Sigma} = \frac{1}{2} \Delta m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 A'^2 = \frac{1}{2} 10^{-3} \text{kg} \cdot \left(4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \cdot (0,8\text{m})^2 \Rightarrow$$

$$E_{\Sigma} = 51,2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

γ) Για να είναι το (Σ) σημείο απόσβεσης θα πρέπει: $r_2 - r_1 = (2N+1) \frac{\lambda'}{2}$, όπου $N = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Δηλαδή: } r_2 - r_1 = (2N+1) \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow r_2 - r_1 = (2N+1) \frac{u}{2f'} \Rightarrow f' = (2N+1) \frac{u}{2(r_2 - r_1)}$$

Επιλέγουμε το μικρότερο ακέραιο ($N = 0$), άρα $f'_{\min} = 1 \text{ Hz}$.

Άσκηση 4.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν $d=1,2\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνσή τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$ (S.I.). Τα κύματα που δημιουργούν έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,4\text{m}$. Ένα σημείο (Σ) της επιφάνειας ισαπέχει κατά $r_1 = r_2 = 2\text{m}$ από τις πηγές. Αφού τα κύματα συμβάλλουν στο (Σ), αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα 5Hz και πλάτος $0,6\text{m}$.

- Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης των κυμάτων.
- Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του Σ σε συνάρτηση με το χρόνο, και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση για το χρονικό διάστημα $0 < t \leq 1,4\text{s}$.
- Να βρείτε τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των σημείων Σ και Μ όπου Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$.
- Να βρείτε ποια χρονική στιγμή το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του Σ γίνεται μέγιστο για 2^η φορά.

Λύση

Α) Εφόσον το Σ ισαπέχει από τις πηγές, είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής (ικανοποιείται η συνθήκη $r_1 - r_2 = N\lambda$ για $N=0$). Επομένως ταλαντώνεται με πλάτος $A' = 2A = 0,6\text{m}$, άρα το πλάτος ταλάντωσης των κυμάτων είναι $A = 0,3\text{m}$.

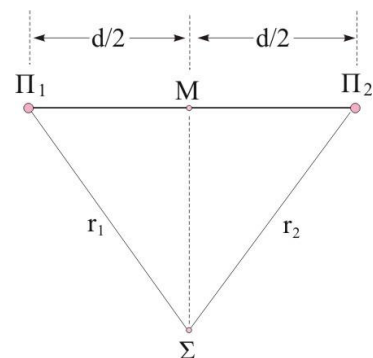
Β) Το (Σ) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική t_Σ με

$$t_\Sigma = \frac{r_1}{v} \quad (1)$$

Όπου v το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης του κύματος

$$v = \lambda \cdot f = 0,4\text{m} \cdot 5\text{Hz} \Rightarrow v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε

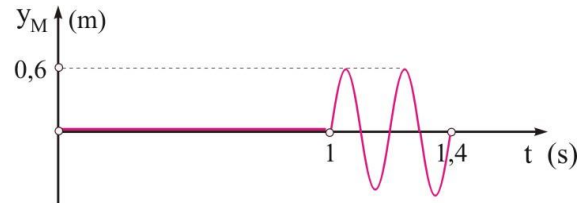


$$t_{\Sigma} = \frac{2m}{2 \frac{m}{s}} = 1s$$

Η εξίσωση ταλάντωσης του (Σ) μετά την συμβολή είναι

$$y_{\Sigma} = 2A \eta \mu \omega(t - t_M) \quad \text{ή} \quad y_{\Sigma} = 0,6 \eta \mu 10\pi(t - 1) \quad , \quad (\text{S.I.})$$

Η γραφική παράσταση απομάκρυνσης - χρόνου για το Σ δίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



Γ) Το κύμα από τις πηγές φτάνει στο Μ που είναι το μέσον του τμήματος Π₁Π₂ τη χρονική στιγμή

$$t_M = \frac{d/2}{v} = \frac{0,6m}{2 \frac{m}{s}} = 0,3s$$

Επομένως η διαφορά φάσης είναι

$$\varphi_{\Sigma} - \varphi_M = \omega(t_{\Sigma} - t_M) = 10\pi(1 - 0,3)\text{rad} \Rightarrow \varphi_{\Sigma} - \varphi_M = 7\pi\text{rad}$$

δ) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του Σ γίνεται μέγιστο στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του (Σ). Το (Σ) ξεκινά την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή $t_{\Sigma}=1s$ και φτάνει για δεύτερη φορά στην ακραία αρνητική του θέση μετά από $3T/4$.

όπου $T = 1/f = 0,2s$.

$$\text{Επομένως } t = 1s + \frac{3}{4}0,2s \Rightarrow t = 1,15s$$

Σχόλιο: Θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση απομάκρυνσης του (Σ) όπου $y_{\Sigma} = -2A = -0,6m$.

$$-0,6 = 0,6 \eta \mu 10\pi(t - 1) \Rightarrow -1 = \eta \mu 10\pi(t - 1) \Rightarrow \eta \mu \frac{3\pi}{2} = \eta \mu 10\pi(t - 1) \Rightarrow$$

$$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi = 10\pi(t - 1) \xrightarrow{k=0} t = 1,15s$$

Άσκηση 5.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της επιφάνειας ενός υγρού. Τη χρονική στιγμή $t=0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y=0,2\mu(10\pi t)$ (S.I.). Τα κύματα που δημιουργούν έχουν μήκος κύματος $\lambda=0,4\text{ m}$. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά $r_1=2,5\text{ m}$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2>r_1$ από την πηγή Π_2 . Τα δύο κύματα φτάνουν στο (Σ) με χρονική διαφορά $0,3\text{ s}$.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση r_2 .

γ) Να εξετάσετε το είδος της συμβολής που συμβαίνει στο σημείο (Σ).

δ) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς που δέχεται ένα σημειακό κομμάτι ξύλου μάζας $m=5\text{ g}$ που αρχικά ισορροπούσε στο σημείο (Σ).

(Θεωρήστε ότι $\pi^2=10$).

Λύση

α) Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών έχουμε: $A=0,2\text{ m}$ και $T=0,2\text{ s}$ ή $f=5\text{ Hz}$. Άρα: $u=\lambda f=2\text{ m/s}$

β) Το κύμα από την Π_1 φτάνει στο (Σ) τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{r_1}{u}=1,25\text{ s}$

Άρα: $t_2=t_1+\Delta t=1,55\text{ s}$ συνεπώς $r_2=u\cdot t_2=3,1\text{ m}$

γ) Είναι: $|r_1-r_2|=0,6\text{ m}=\frac{3}{2}\lambda$. Δηλαδή ικανοποιείται η συνθήκη απόσβεσης. Για $t\geq 1,55\text{ s}$ το (Σ) θα είναι ακίνητο.

δ) Η απομάκρυνση του ξύλου στο S.I. είναι:

$$y_{\Sigma} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1,25 \text{ s} \\ A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right), & 1,25 \text{ s} \leq t < 1,55 \text{ s} \\ 0, & t \geq 1,55 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow y_{\Sigma} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1,25 \text{ s} \\ 0,2\eta\mu 2\pi(5t - 6,25), & 1,25 \text{ s} \leq t < 1,55 \text{ s} \\ 0, & t \geq 1,55 \text{ s} \end{cases}$$

Η δύναμη επαναφοράς είναι στο S.I.:

$$F_{\epsilon\pi} = -D \cdot y_{\Sigma} = -m\omega^2 \cdot y_{\Sigma} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1,25 \text{ s} \\ -\eta\mu 2\pi(5t - 6,25), & 1,25 \text{ s} \leq t < 1,55 \text{ s} \\ 0, & t \geq 1,55 \text{ s} \end{cases}$$

Άσκηση 6.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία A και B αντίστοιχα, της επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $d = 2 \text{ m}$. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού χωρίς αρχική φάση, δημιουργώντας κύματα μήκους κύματος $\lambda = 1,2 \text{ m}$ και πλάτους $A = 1 \text{ m}$. Σημείο (Λ) του AB ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t' = 0,2 \text{ s}$ και είναι το πλησιέστερο σημείο στην πηγή Π_2 το οποίο μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος.

α) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις του (Λ) από τις κυματικές πηγές.

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα ταλάντωσης του (Λ) τη στιγμή που τα κύματα συμβάλλουν στο μέσο M του AB.

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση (ΚΛ) όπου (Κ) το πλησιέστερο στην Π_1 ακίνητο σημείο του AB.

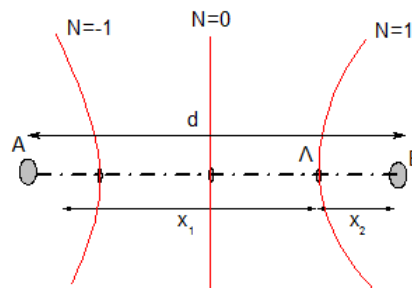
Λύση

α) Έστω ότι το (Λ) απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 κατά x_1 και x_2 αντίστοιχα. Το (Λ) είναι σημείο ενίσχυσης, άρα θα πρέπει: $x_1 - x_2 = N\lambda$, $N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ενώ $x_1 + x_2 = d$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις

προκύπτει: $x_1 = \frac{N\lambda + d}{2}$

Το σημείο (Λ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα:



$$0 < x_1 < d \Rightarrow 0 < \frac{N\lambda + d}{2} < d \Rightarrow -\frac{d}{\lambda} < N < \frac{d}{\lambda} \Rightarrow -\frac{5}{3} < N < \frac{5}{3}$$

Άρα ο ακέραιος N μπορεί να πάρει τις τιμές $N = 0, \pm 1$.

Το (Λ) είναι το πλησιέστερο σημείο ενίσχυσης στην Π_2 άρα βρίσκεται πάνω στην υπερβολή ενίσχυσης με $N = 1$ οπότε $x_1 = 1,6 \text{ m}$. Άρα $x_2 = d - x_1 = 0,4 \text{ m}$

β) Το υλικό σημείο (Λ) παραμένει ακίνητο μέχρι τη χρονική στιγμή $t' = 0,2 \text{ s}$, οπότε στο (Λ) φθάνει το κύμα από την πλησιέστερη σε αυτό πηγή (Π_2). Άρα η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων ισούται με:

$$u = \frac{x_2}{t'} = 2 \text{ m/s}$$

$$\text{ενώ } u = \lambda f \Rightarrow f = \frac{5}{3} \text{ Hz και } T = 0,6 \text{ s}.$$

Η συμβολή συμβαίνει στο (Λ) τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία σε αυτό φθάνει και το δεύτερο κύμα, το οποίο προέρχεται από την πιο απομακρυσμένη πηγή (στη περίπτωση μας από την Π_1). Οπότε $t_2 = \frac{x_1}{u} = 0,8 \text{ s}$. Το σημείο Μ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική

$$\text{στιγμή } t_M = \frac{d/2}{u} = 0,5 \text{ s} < t_2.$$

Συνεπώς τη χρονική στιγμή t_M το υλικό σημείο (Λ) ταλαντώνεται μόνο λόγω του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π_2 το οποίο εξαναγκάζει το (Λ) σε ταλάντωση της οποίας η απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$y_{2\Lambda} = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) \Rightarrow y_{2\Lambda} = \eta \mu \frac{2\pi}{3} (5t - 1) \text{ (S.I.) για } 0,2 \text{ s} \leq t < 0,8 \text{ s}$$

Η ταχύτητα ταλάντωσης του (Λ) για αυτό το χρονικό διάστημα σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από την:

$$u_\Lambda = \omega A \sigma \nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) \Rightarrow u_\Lambda = \frac{10\pi}{3} \sigma \nu \frac{2\pi}{3} (5t - 1) \text{ (S.I.) για } 0,2 \text{ s} \leq t < 0,8 \text{ s}$$

$$\text{Για } t = t_M : u_\Lambda = \frac{10\pi}{3} \sigma \nu \frac{2\pi}{3} (5 \cdot 0,5 - 1) \Rightarrow u_\Lambda = -\frac{10\pi}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Το (Κ) είναι σημείο του ΑΒ στο οποίο έχουμε απόσβεση, άρα αν απέχει κατά x_{1K} από

$$\text{το Α και κατά } x_{2K} \text{ από το Β τότε: } x_{1K} - x_{2K} = \frac{(2N+1)\lambda}{2}$$

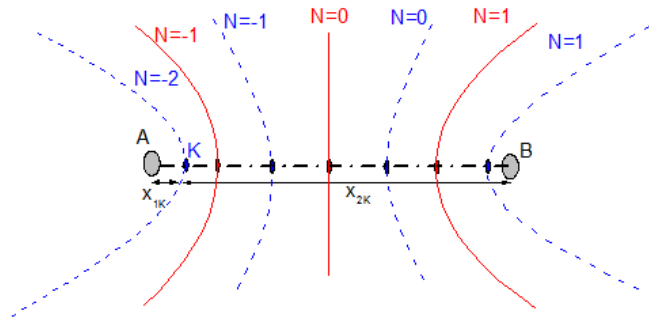
$$\text{Συγχρόνως: } x_{1K} + x_{2K} = d$$

$$\text{Προσθέτοντας κατά μέλη: } x_{1K} = \frac{\frac{(2N+1)\lambda}{2} + d}{2}$$

Επίσης το (Κ) βρίσκεται μεταξύ των (Α) και (Β) άρα:

$$0 < x_{1K} < d \Rightarrow 0 < \frac{\frac{(2N+1)\lambda}{2} + d}{2} < d \Rightarrow -\frac{10}{3} < 2N+1 < \frac{10}{3} \Rightarrow -\frac{13}{6} < N < \frac{7}{6}$$

Συνεπώς $N = -2, -1, 0, 1$ άρα
 υπάρχουν 4 σημεία απόσβεσης επί
 του AB. Το (Κ) είναι το πλησιέστερο
 στην Π_1 άρα η απόσταση x_{1K}
 πρέπει να είναι η ελάχιστη. Για
 $N = -2$ είναι $x_{1K} = 0,1 \text{ m}$ και η
 ζητούμενη απόσταση
 $(ΚΛ) = x_{1Λ} - x_{1K} = 1,5 \text{ m}$



Άσκηση 7.

Οριζόντια ελαστική χορδή μήκους $L = 1,2 \text{ m}$ έχει τα άκρα της στερεωμένα σε ακλόνητα εμπόδια. Στη χορδή έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, ως αποτέλεσμα της ταυτόχρονης διάδοσης στη χορδή δύο αντίρροπα διαδιδόμενων κυμάτων, με το ίδιο πλάτος $A = 0,2 \text{ m}$ και το ίδιο μήκος κύματος $\lambda = 0,4 \text{ m}$.

α) Πόσες κοιλίες εμφανίζονται στη χορδή;

β) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο της χορδής τη χρονική στιγμή κατά την οποία η πλησιέστερη κοιλία στο αριστερό άκρο της χορδής βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση.

γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας των κυμάτων που πρέπει να επιφέρουμε, ώστε στη χορδή να εμφανίζονται 5 κοιλίες.

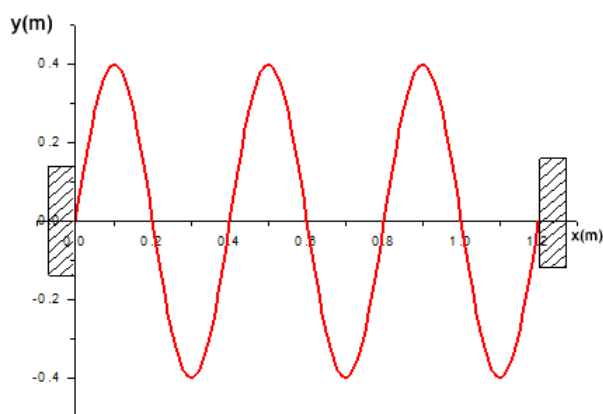
Λύση

α) Τα άκρα της χορδής είναι δεσμοί. Επίσης δύο διαδοχικοί δεσμοί απέχουν κατά $\lambda / 2 = 0,2 \text{ m}$. Άρα αν $O(x = 0)$ το αριστερό άκρο της χορδής και $B(x_B = 1,2 \text{ m})$ το δεξί

άκρο της, τότε στη χορδή θα εμφανίζονται $\frac{L}{\frac{\lambda}{2}} = 6$ άτρακτοι. Κάθε άτρακτος εμφανίζει

μία κοιλία, άρα στη χορδή εμφανίζονται συνολικά 6 κοιλίες.

β) Με δεδομένο ότι δύο διαδοχικές κοιλίες βρίσκονται σε αντίθεση φάσης και ότι το μέγιστο πλάτος (κάθε κοιλίας) είναι $2A = 0,4 \text{ m}$, το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι:



γ) Θα πρέπει: $L = \frac{5\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = 0,48 \text{ m}$. Επίσης:

$$\lambda f = \lambda' f' \Rightarrow f' = \frac{\lambda}{\lambda'} f$$

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\frac{f' - f}{f} \cdot 100\% = \frac{\frac{\lambda}{\lambda'} f - f}{f} \cdot 100\% = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'} \cdot 100\% \approx 16,7\%$$

Άσκηση 8.

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x' Ο x . Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα με κοιλία στο σημείο $O(x=0)$. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 0,4 \sin(2,5\pi x) \eta \mu(20\pi t) \text{ (S.I.)}.$$

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των οδεύοντων κυμάτων.

β) Να γράψετε τις εξισώσεις των οδεύοντων κυμάτων.

γ) Να υπολογίσετε την οριζόντια απόσταση μεταξύ του 3^{ου} δεσμού του θετικού ημιάξονα και της 2^{ης} κοιλίας του θετικού ημιάξονα η οποία βρίσκεται σε συμφωνία φάσης με την κοιλία που σχηματίζεται στο σημείο $O(x=0)$.

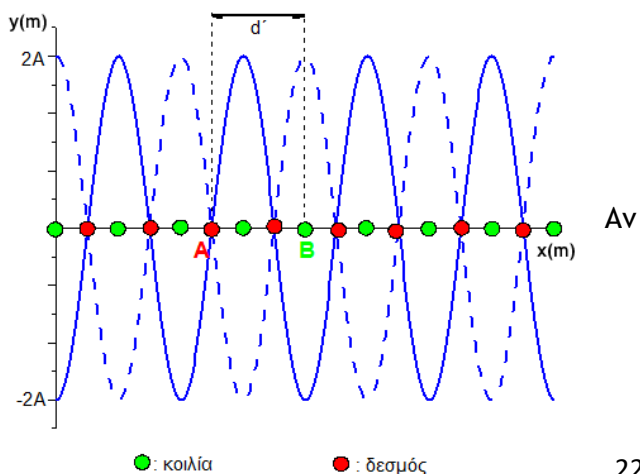
δ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου $Z(x_z > 0)$ του οποίου η απόσταση από το $O(x=0)$ είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του 2^{ου} δεσμού του θετικού ημιάξονα από το $O(x=0)$ κατά $d = 1/3 \text{ m}$.

Λύση

α) Από την εξίσωση του στάσιμου έχουμε: $A = 0,2 \text{ m}$, $\lambda = 0,8 \text{ m}$ και $T = 0,1 \text{ s}$. Συνεπώς:
 $u = \lambda f = 8 \text{ m/s}$

$$\text{β) Είναι: } \begin{cases} y_1 = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ y_2 = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0,2 \eta \mu \pi (20t - 2,5x) \\ y_2 = 0,2 \eta \mu \pi (20t + 2,5x) \end{cases} \text{ (S.I.)}$$

γ) Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ισούται με $\lambda/2$, όση είναι και η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών. Επίσης η απόσταση μίας κοιλίας από τον πλησιέστερο δεσμό ισούται με $\lambda/4$. $A(x_A)$ ο τρίτος δεσμός του θετικού ημιάξονα, τότε:



$$x_A = \frac{\lambda}{4} + 2\frac{\lambda}{2} = 1 \text{ m}.$$

Δύο διαδοχικές κοιλίες ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης, άρα αν B η 2^η κοιλία του θετικού ημιάξονα η οποία βρίσκεται σε συμφωνία φάσης με την κοιλία που σχηματίζεται στο σημείο O (x = 0), τότε:

$$x_B = 4\frac{\lambda}{2} = 1,6 \text{ m}.$$

Συνεπώς η ζητούμενη απόσταση ισούται με

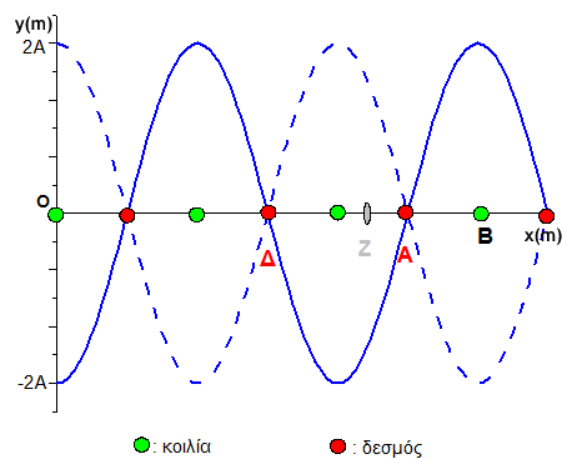
$$d' = 1,6 \text{ m} - 1 \text{ m} = 0,6 \text{ m}$$

δ) Αν $\Delta(x_\Delta)$ ο 2^{ος} δεσμός του θετικού ημιάξονα

$$\text{τότε } x_\Delta = 3\frac{\lambda}{4} = 0,6 \text{ m}$$

$$\text{Συνεπώς } x_Z = x_\Delta + d = (14/15) \text{ m}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση του στασίμου κύματος το πλάτος του Z είναι:



$$A_Z = 0,4 \left| \sin 2,5\pi x_Z \right| = 0,4 \left| \sin 2,5\pi \frac{14}{15} \right| \text{ m} = 0,4 \left| \sin \frac{7\pi}{3} \right| \text{ m} = 0,2 \text{ m}$$

και η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης: $u_{\max(Z)} = \omega A_Z = 4\pi \text{ m/s}.$

Άσκηση 9.

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος A , μήκος κύματος $\lambda = 0,4 \text{ m}$ και συχνότητα 1 Hz διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε χορδή η οποία ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'Ox$. Τα κύματα συμβάλλουν δημιουργώντας στάσιμο κύμα το οποίο στη θέση $O(x=0)$ της χορδής εμφανίζει κοιλία. Το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης των σημείων του μέσου ισούται με $1,6 \text{ cm}$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του δημιουργούμενου στάσιμου κύματος.

β) Αν $\Delta\left(x_{\Delta} = \frac{8}{15} \text{ m}\right)$ υλικό σημείο της χορδής με μάζα $m = 2 \text{ g}$, να υπολογίσετε τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς που δέχεται το Δ κατά την ταλάντωσή του.

γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σημείου $A(x_A = 4,25 \text{ m})$ τη στιγμή που το σημείο $B(x_B = 4,65 \text{ m})$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

(Δίνεται $\pi^2 = 10$)

Λύση

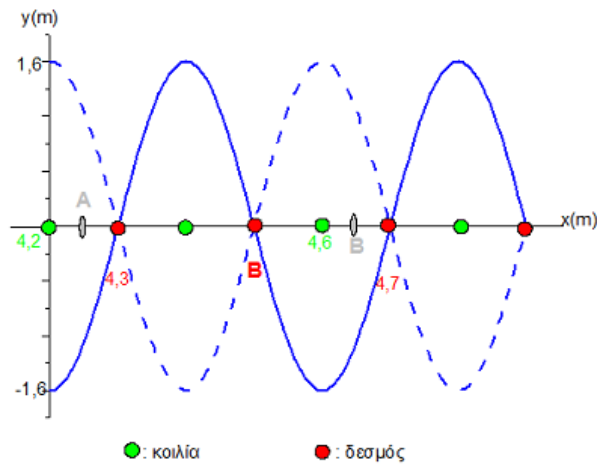
Από την εκφώνηση είναι $\lambda = 0,4 \text{ m}$ και $f = 1 \text{ Hz}$. Ακόμα $A_{\max} = 2A \Rightarrow A = 0,008 \text{ m}$

α) Το στάσιμο θα έχει εξίσωση:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = 0,016 \sin(5\pi x) \eta\mu(2\pi t) \text{ (S.I.)}$$

$$\beta) \text{ Είναι: } F_{\epsilon\pi(\max)} = DA_{\Delta} = m\omega^2 2A \left| \sin\left(\frac{2\pi x_{\Delta}}{\lambda}\right) \right| = 64 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

γ) Το σημείο A βρίσκεται μεταξύ της κοιλίας που σχηματίζεται στη θέση $x = 4,2 \text{ m}$ και του δεσμού που σχηματίζεται στη θέση $x = 4,3 \text{ m}$. Αντίστοιχα το B βρίσκεται μεταξύ της κοιλίας που σχηματίζεται στη θέση $x = 4,6 \text{ m}$ και του δεσμού που σχηματίζεται στη θέση $x = 4,7 \text{ m}$.



Συνεπώς μεταξύ των ατράκτων στις οποίες ανήκουν τα Α, Β παρεμβάλλεται άλλη μία άτρακτος. Άρα τα Α και Β βρίσκονται σε συμφωνία φάσεως. Συνεπώς τη στιγμή που το σημείο Β διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, τότε και το Α διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα:

$$u = u_{\max} = \omega A_A = \omega 2A \left| \sin \left(\frac{2\pi x_A}{\lambda} \right) \right| = (2\pi) \cdot 2 \cdot 0,008 \left| \sin \left(\frac{2\pi \cdot 4,25}{0,4} \right) \right| =$$

$$0,032 \left| \sin \left(21\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right| = 0,016\sqrt{2}\pi \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Άσκηση 10.

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος $A = 0,4 \text{ m}$, μήκος κύματος $\lambda = 0,4 \text{ m}$ και συχνότητα $f = 4 \text{ Hz}$ διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε ελαστική χορδή η οποία ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'Ox$. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα το οποίο στη θέση $O(x=0)$ εμφανίζει κοιλία. Τα σημεία A και B της χορδής ταλαντώνονται με πλάτος $A' = 0,8 \text{ m}$ και μεταξύ τους παρεμβάλλονται 3 δεσμοί.

α) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση AB.

γ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση και την ταχύτητα του σημείου A όταν η απομάκρυνση του σημείου B είναι $y_B = 0,2\sqrt{7} \text{ m}$ και η ταχύτητα του θετική.

δ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος AB τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + T/4$, όπου t_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο A διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα.

Λύση

α) Το στάσιμο θα έχει εξίσωση:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = 0,8 \sin(5\pi x) \eta\mu(8\pi t) \text{ (S.I.)}$$

β) Τα A, B είναι κοιλίες και μεταξύ τους παρεμβάλλονται τρεις δεσμοί άρα:

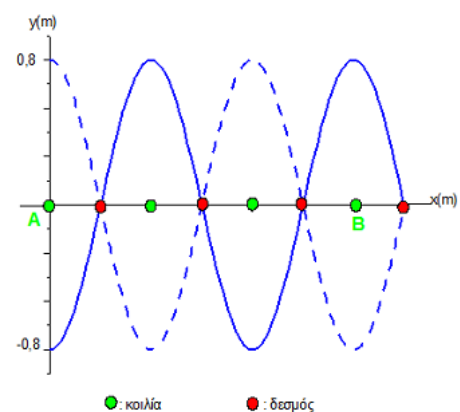
$$AB = \frac{\lambda}{4} + 2\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow AB = 0,6 \text{ m}$$

γ) Μεταξύ των ατράκτων που ανήκουν τα A, B παρεμβάλλονται ακόμα δύο. Άρα τα A, B βρίσκονται σε αντίθεση φάσης όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Συνεπώς κάθε χρονική στιγμή θα ισχύει:

$$\begin{cases} y_A = -y_B \\ u_A = -u_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = -0,2\sqrt{7} \text{ m} \\ u_A = -u_B \end{cases}$$

Επίσης, για το σημείο B έχουμε:

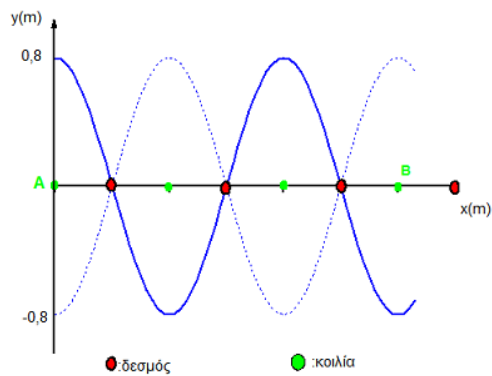


$$E_B = K_B + U_B \Rightarrow \frac{1}{2} m \omega^2 A_B^2 = \frac{1}{2} m u_B^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 y_B^2 \Rightarrow u_B = \pm 4,8\pi \frac{m}{s}$$

Τη δεδομένη χρονική στιγμή η ταχύτητα του Β είναι θετική, άρα η ταχύτητα του Α θα είναι αρνητική, δηλαδή:

$$u_A = -4,8\pi \frac{m}{s}$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_2 θα είναι $y_{A,\max} = +0,8 \text{ m}$. Άρα το στιγμιότυπο είναι:



Άσκηση 11.

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'Ox$. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα το οποίο στη θέση $O(x=0)$ εμφανίζει κοιλία. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:
 $y = 0,4 \sin(2,5\pi x) \eta\mu(20\pi t)$.

α) Να προσδιορίσετε τη θέση του δεσμού $A(x_A)$ του θετικού ημιάξονα μεταξύ του οποίου και του $O(x=0)$ παρεμβάλλονται 2 ακόμα δεσμοί.

β) Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του σημείου $B(x_B = 3,2 \text{ m})$.

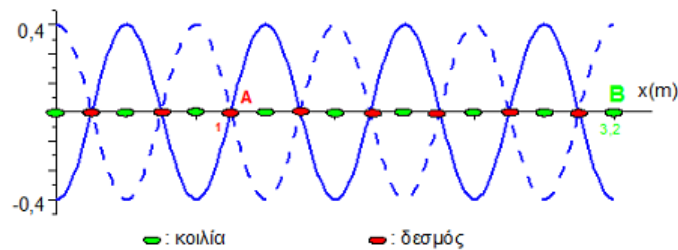
γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των δεσμών μεταξύ των A και B .

Λύση

α) Από την εξίσωση του στάσιμου έχουμε ότι: $A = 0,2 \text{ m}$, $\lambda = 0,8 \text{ m}$ και $T = 0,1 \text{ s}$.

Δύο διαδοχικοί δεσμοί απέχουν κατά $\lambda/2$ ενώ μια κοιλία απέχει από τον πλησιέστερο δεσμό κατά

$\lambda/4$. Θα είναι $OA = \frac{\lambda}{4} + 2\frac{\lambda}{2} \Rightarrow OA = 1 \text{ m}$. Δηλαδή $x_A = 1 \text{ m}$.



β) Είναι:

$$y_B = 0,4 \sin(2,5\pi x) \eta\mu(20\pi t) \Rightarrow y_B = 0,4 \sin(8\pi) \eta\mu(20\pi t) \Rightarrow y_B = 0,4 \eta\mu(20\pi t) \text{ (S.I.)}$$

γ) Για ένα δεσμό μεταξύ των A και B θα πρέπει:

$$x_A < (2N+1)\frac{\lambda}{4} < x_B \Rightarrow 1 < (2N+1) \cdot 0,2 < 3,2 \Rightarrow 2 < N < 7,5$$

Άρα οι ακέραιες τιμές του N είναι: $N = 3, 4, 5, 6, 7$

Δηλαδή υπάρχουν 5 δεσμοί μεταξύ των A και B .

Άσκηση 12.

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος $0,8\text{ m}$ και συχνότητα 5 Hz διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x' Ο x . Το κάθε κύμα εξαναγκάζει το σημείο $O(x=0)$ σε ταλάντωση της μορφής $y_0 = A\eta\mu\omega t$. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα όπου δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν κατά $0,2\text{ m}$.

- α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των οδεύοντων κυμάτων.
- β) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.
- γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των ακίνητων σημείων του τμήματος $ΟΔ$, όπου Δ ($x_\Delta = 0,8\text{ m}$).
- δ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος $ΟΔ$ της χορδής τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,35\text{ s}$.

Λύση

α) Από την εκφώνηση είναι $A = 0,8\text{ m}$ και $f = 5\text{ Hz}$. Επίσης, δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν κατά $\lambda/2$, άρα $\lambda = 0,4\text{ m}$. Συνεπώς: $u = \lambda f = 2\text{ m/s}$

β) Είναι: $y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = 1,6\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(10\pi t)$ (S.I.)

γ) Για ένα ακίνητο σημείο, δηλαδή για ένα δεσμό θα πρέπει: $x = (2N+1)\frac{\lambda}{4}$

Για να ανήκει στο τμήμα $ΟΔ$ θα πρέπει:

$$0 < x < x_\Delta \Rightarrow 0 < (2N+1)\frac{\lambda}{4} < x_\Delta \Rightarrow 0 < (2N+1)0,1 < 0,8 \Rightarrow$$

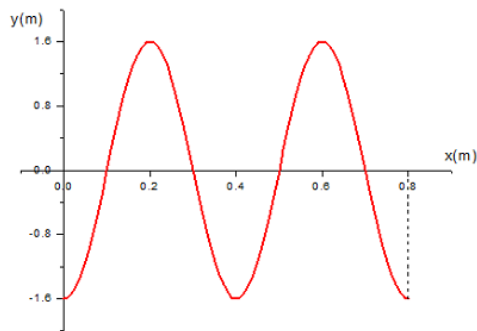
$$-0,5 < N < 3,5$$

Άρα ο ακέραιος N μπορεί να πάρει τις τιμές: $N = 0, 1, 2, 3$. Συνολικά στο $ΟΔ$ θα υπάρχουν 4 δεσμοί.

δ) Είναι: $t_1 = 0,35 \text{ s} = T + \frac{3}{4}T$, άρα τα κινούμενα σημεία της χορδής θα βρίσκονται σε ακραίες θέσεις, συνεπώς εκείνη τη χρονική στιγμή όλα τα σημεία της χορδής είναι ακίνητα.

Είναι: $y_{t_1} = 1,6 \sin(5\pi x) \eta\mu(3,5\pi) \Rightarrow y_{t_1} = -1,6 \sin(5\pi x) \text{ (S.I.)}$

Από τη γραφική παράσταση αυτής για $0 \leq x \leq x_\Delta$ έχουμε το ζητούμενο στιγμιότυπο:



Άσκηση 13.

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα xOx ,

διαδίδονται τα:
$$\begin{cases} y_1 = -0,2\eta\mu 2\pi(t - 2,5x) \\ y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi(t + 2,5x) \end{cases} \text{ (S.I.)}$$

Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα.

α) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

β) Να γράψετε τη συνθήκη κοιλιών και τη συνθήκη δεσμών.

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των δεσμών μεταξύ του σημείου $O(x=0)$ και του σημείου $A(x_A = 5\text{ m})$.

Λύση

α) Το αρνητικό πρόσημο στην εξίσωση του y_1 μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει αρχική φάση $\phi_0 = \pi$, δεδομένου ότι $\eta\mu(\theta + \pi) = -\eta\mu\theta$.

Είναι: $y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = -0,2\eta\mu 2\pi(t - 2,5x) + 0,2\eta\mu 2\pi(t + 2,5x) \Rightarrow$

$$y = 0,2\eta\mu[2\pi(t - 2,5x) + \pi] + 0,2\eta\mu 2\pi(t + 2,5x)$$

Με τη βοήθεια της: $\eta\mu a + \eta\mu b = 2\eta\mu\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{a-b}{2}\right)$

και εκτελώντας τις πράξεις:

$$y = 0,4\eta\mu\left(\pi \frac{2t - 5x + 1 + 2t + 5x}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\pi \frac{2t - 5x + 1 - 2t - 5x}{2}\right) = 0,4\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(-5\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = 0,4\eta\mu(5\pi x) \sigma\upsilon\nu(2\pi t) \text{ (S.I.)}$$

β) Κοιλίες

Πρέπει: $\eta\mu(5\pi x) = \pm 1 \Rightarrow 5\pi x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k+1}{10}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ στο S.I.

Δεσμοί

Πρέπει: $\eta\mu(5\pi x) = 0 \Rightarrow 5\pi x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k}{5}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ στο S.I.

γ) Πρέπει: $0 < x < 5 \Rightarrow 0 < \frac{k}{5} < 5 \Rightarrow 0 < k < 25$. Συνεπώς $k = 1, \dots, 24$, δηλαδή υπάρχουν 24 ακίνητα σημεία μεταξύ των O και A .

Άσκηση 14. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος $A = 0,2 \text{ m}$, κάθετα στην ελαστική επιφάνεια ενός υγρού, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος $\lambda = 0,6 \text{ m}$. Οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή $t = 0$ με θετική ταχύτητα. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά $r_1 = 7,6 \text{ m}$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = 4,8 \text{ m}$ από την πηγή Π_2 . Το (Σ) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 12 \text{ s}$.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.

β) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του (Σ) σε συνάρτηση με το χρόνο, αφού συμβάλλουν σε αυτό τα κύματα.

γ) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του (Σ) τη χρονική στιγμή $t' = \frac{707}{16} \text{ s}$.

δ) Να υπολογίσετε το πηλίκο της κινητικής ενέργειας του σημείου Σ προς την ενέργεια ταλάντωσης του, τη χρονική στιγμή t' .

(Θεωρήστε ότι $\pi^2 = 10$).

Λύση

α) Το πλάτος του (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό ισούται με:

$$\begin{aligned}
 A_{\Sigma} &= 2A \left| \sin \left(2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right) \right| = 0,4 \left| \sin \left(2\pi \frac{7,6 - 4,8}{2 \cdot 0,6} \right) \right| \text{ m} = 0,4 \left| \sin \left(\frac{14\pi}{3} \right) \right| \text{ m} = \\
 &0,4 \left| \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right| \text{ m} = 0,2 \text{ m}
 \end{aligned}$$

β) Το (Σ) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_2 = 12 \text{ s}$, οπότε και φτάνει στο (Σ)

η διαταραχή που παράγει η πλησιέστερη πηγή, δηλαδή η Π_2 . Άρα: $u = \frac{r_2}{t_2} = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Επίσης: $u = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = 1,5 \text{ s}$. Τα κύματα συμβάλλουν στο (Σ) όταν φτάσει και το κύμα από την απομακρυσμένη πηγή, έστω τη χρονική στιγμή t_1 ώστε: $t_1 = 19 \text{ s}$

Άρα για $t \geq 19 \text{ s}$ είναι:

$$y_{\Sigma} = 2A \sin \left(2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right) \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) \Rightarrow y_{\Sigma} = 0,4 \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{1,5} - \frac{7,6 + 4,8}{2 \cdot 0,6} \right) \Rightarrow$$

$$y_{\Sigma} = -0,2 \eta \mu 2\pi \left(\frac{2t}{3} - \frac{31}{3} \right) \Rightarrow y_{\Sigma} = -0,2 \eta \mu \frac{2\pi}{3} (2t - 31) \text{ (S.I.)}$$

γ) Είναι $t' > t$, άρα η απομάκρυνση του Σ τη στιγμή αυτή ισούται με:

$$y_{\Sigma} = -0,2 \eta \mu \frac{2\pi}{3} \left(2 \frac{707}{16} - 31 \right) \Rightarrow y_{\Sigma} = -0,2 \eta \mu \frac{\pi}{4} \Rightarrow y_{\Sigma} = -0,1\sqrt{2} \text{ m}$$

Αντίστοιχα η επιτάχυνση του θα ισούται με:

$$a_{\Sigma} = -\omega^2 \cdot y_{\Sigma} = - \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 \cdot (-0,1\sqrt{2}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow a_{\Sigma} = \frac{16\sqrt{2}}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\delta) \text{ Είναι: } \frac{K}{E} = \frac{E - U}{E} = 1 - \frac{\frac{1}{2} D y_{\Sigma}^2}{\frac{1}{2} D A^2} = 1 - \frac{y_{\Sigma}^2}{A^2} = 1 - \frac{(-0,1\sqrt{2})^2}{0,2^2} \Rightarrow \frac{K}{E} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 15. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της επιφάνειας ενός υγρού. Τη χρονική στιγμή $t=0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$ (S.I.). Τα κύματα που δημιουργούν έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,4 \text{ m}$. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά $r_1 = 2,5 \text{ m}$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = 4 \text{ m}$ από την πηγή Π_2 . Αφού τα κύματα συμβάλλουν στο (Σ), αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα 5 Hz και πλάτος 1 m .

α) Να υπολογίσετε τη χρονική διαφορά άφιξης των κυμάτων στο (Σ) καθώς και τη διαφορά φάσης με την οποία φτάνουν.

β) Να υπολογίσετε το πλάτος των κυμάτων.

γ) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του Σ σε συνάρτηση με το χρόνο, μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.

δ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα ταλάντωσης των πηγών, ώστε το (Σ) να είναι ακίνητο μετά τη συμβολή των κυμάτων.

Λύση

α) Το (Σ) ταλαντώνεται με τη συχνότητα των κυμάτων άρα $f = 5 \text{ Hz}$. Συνεπώς $u = \lambda f = 2 \text{ m/s}$.

Η ταλάντωση του (Σ) ξεκινά τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{r_1}{u} = \frac{2,5}{2} \text{ s} = 1,25 \text{ s}$ οπότε στο (Σ) φτάνει το κύμα που εκπέμπεται από την Π_1 , ενώ η συμβολή των κυμάτων συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{r_2}{u} = 2 \text{ s}$ κατά την οποία στο (Σ) φτάνει το κύμα που εκπέμπεται από την Π_2 . Άρα $\Delta t = t_2 - t_1 = 0,75 \text{ s}$

Για $t \geq 2 \text{ s}$ η διαφορά φάσης είναι:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) = 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda} \right) = 2\pi \frac{4 \text{ m} - 2,5 \text{ m}}{0,4 \text{ m}} \quad \text{ή}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 7,5\pi$$

β) Μετά τη συμβολή των κυμάτων το (Σ) ταλαντώνεται με πλάτος:

$$A_{\Sigma} = 2A \left| \sin \left(2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right) \right| = 2A \left| \sin(3,75\pi) \right| \Rightarrow A_{\Sigma} = \sqrt{2}A$$

Από την εκφώνηση είναι $A_{\Sigma} = 1 \text{ m}$ άρα:

$$A_{\Sigma} = \sqrt{2}A = 1 \text{ m} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m}$$

γ) Για $t \geq 2 \text{ s}$ είναι:

$$y_{\Sigma} = 2A \sin \left(2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right) \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) \Rightarrow y_{\Sigma} = \eta \mu \pi(10t - 16,25) \text{ (S.I.)}$$

δ) Πρέπει:

$$2A \sin \left(2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda'} \right) = 0 \Rightarrow \sin \left(\frac{3\pi}{2\lambda'} \right) = 0 \Rightarrow \lambda' = \frac{3}{2k+1}, \text{ όπου } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{άρα: } f' = \frac{2k+1}{3} u$$

Επιλέγουμε το μικρότερο ακέραιο ($k = 0$), άρα $f_{\min}' = \frac{2}{3} \text{ Hz}$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν $d=1\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνσή τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = 0,2\eta\mu 4\pi t$ (S.I.). Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,1\text{m}$. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά $r_1 = 0,3\text{m}$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = 0,8\text{m}$ από την πηγή Π_2 .

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των επιμέρους ταλαντώσεων που υποχρεώνεται να εκτελέσει το σημείο (Σ), εξαιτίας των δύο κυμάτων που φτάνουν σε αυτό από κάθε πηγή.

β) Να αποδείξετε ότι μετά τη συμβολή, το σημείο (Σ) είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής και να προσδιορίσετε σε ποια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής ανήκει το σημείο αυτό.

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου (Ζ) που είναι σημείο της ίδιας ενισχυτικής συμβολής που ανήκει το (Σ) και βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$.

δ) Να βρείτε την ελάχιστη συχνότητα ταλάντωσης των πηγών ώστε μετά τη συμβολή των κυμάτων στο (Σ), αυτό να παραμείνει ακίνητο.

Λύση

Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών: $A = 0,2\text{m}$, $f = 2\text{Hz}$ και $T = 0,5\text{s}$. Επίσης το μήκος κύματος των κυμάτων ισούται με $\lambda = 0,1\text{m}$ οπότε από τη θεμελιώδη κυματική εξίσωση έχουμε: $u = \lambda f \Rightarrow u = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\alpha) \text{ Είναι: } y_{\Sigma} = \begin{cases} y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \\ y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi(2t - 3) \\ y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi(2t - 8) \end{cases} \text{ (S.I.)}$$

β) Για να είναι το (Σ) σημείο ενισχυτικής συμβολής, θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη

$$r_1 - r_2 = N\lambda \text{ με } N = 0, \pm 1 \pm 2 \dots$$

$$r_1 - r_2 = 0,3\text{m} - 0,8\text{m} \Rightarrow -0,5 = N \cdot 0,1\text{m} \Rightarrow N = -5$$

Το σημείο (Σ) βρίσκεται στην 5^η υπερβολή ενίσχυσης αριστερά της μεσοκαθέτου (η μεσοκάθετος αντιστοιχεί στην ενισχυτική υπερβολή με $N=0$).

γ) Το σημείο (Ζ) ανήκει στην ίδια υπερβολή με το (Σ) και είναι πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ απέχοντας d_1 και d_2 από τις πηγές αντίστοιχα (βλέπε σχήμα).

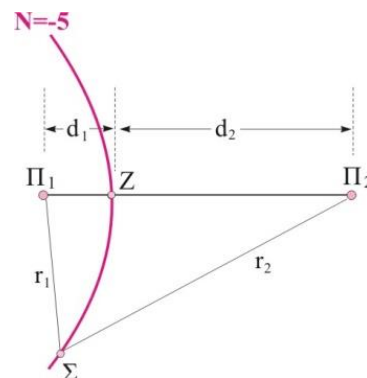
Για το (Ζ) έχουμε

$$d_1 - d_2 = N\lambda = -0,5\text{m} \quad (1)$$

$$d_1 + d_2 = d = 1\text{m} \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε

$$2d_1 = 0,5\text{m} \Rightarrow d_1 = 0,25\text{m}$$



δ) Για να είναι ακίνητο το (Σ) μετά την συμβολή, θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{v}{2f'} \Rightarrow f' = \frac{(2N+1)v}{2(r_1 - r_2)}$$

Η ελάχιστη συχνότητα για ακυρωτική συμβολή είναι για $N=0$, άρα

$$f_{\min} = \frac{v}{2(r_1 - r_2)} = 0,2\text{Hz}$$

Πρόβλημα 2.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της επιφάνειας ενός υγρού. Τη χρονική στιγμή $t=0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνσή τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y=0,2\mu 10\pi t$ (S.I.). Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά $r_1=4,2$ m από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 > r_1$ από την πηγή Π_2 . Το (Σ) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1=1,05$ s ενώ από τη χρονική στιγμή $t_2=1,55$ s και έπειτα σταματά να κινείται.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα των κυμάτων και την απόσταση r_2 .

β) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του (Σ) σε συνάρτηση με το χρόνο και της ταχύτητας ταλάντωσής του σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της επιτάχυνσης του (Σ) ως συνάρτηση του χρόνου σε κατάλληλα βαθμολογημένο σύστημα αξόνων.

δ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα των κυμάτων που μπορούμε να προκαλέσουμε ώστε στο σημείο (Σ) να υπάρχει ενίσχυση των κυμάτων.

(Θεωρήστε ότι $\pi^2=10$)

Λύση

Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών είναι: $A=0,2$ m, $f=5$ Hz και $T=0,2$ s.

α) Το (Σ) εκκινεί την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή t_1 οπότε σε αυτό φτάνει το κύμα από την Π_1 . Άρα: $u = \frac{r_1}{t_1} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Τη χρονική στιγμή t_2 στο (Σ) φτάνει και το δεύτερο κύμα με αποτέλεσμα να μεταβληθεί η κίνηση του (Σ). Άρα: $r_2 = u \cdot t_2 = 6,2$ m

β) Είναι: $u = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{4 \text{ m/s}}{5 \text{ Hz}} \Rightarrow \lambda = 0,8$ m

Το υλικό σημείο Σ παραμένει ακίνητο μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,05$ s, οπότε στο Σ φθάνει το κύμα από την πλησιέστερη σε αυτό πηγή Π_1 . Για $t \geq t_1 = 1,05$ s το υλικό σημείο (Σ) ταλαντώνεται υπό την επενέργεια του κύματος που εκπέμπει η Π_1 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,55$ s. Τη χρονική στιγμή t_2 το πλάτος ταλάντωσης

του (Σ) μεταβάλλεται άρα σε αυτό φθάνει το κύμα από την πηγή Π_2 .

Για $t \geq 1,55 \text{ s}$ έχουμε τη συμβολή των δύο κυμάτων. Το υλικό σημείο (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων παραμένει ακίνητο, άρα τα κύματα συμβάλλουν ακυρωτικά.

Η απομάκρυνση του (Σ) σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις στο S.I.:

Για το χρονικό διάστημα $0 \leq t < 1,05 \text{ s}$, $y_\Sigma = 0$

Για το χρονικό διάστημα $1,05 \text{ s} \leq t < 1,55 \text{ s}$

$$y_\Sigma = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \Rightarrow y_\Sigma = 0,2 \eta \mu 2\pi (5t - 5,25) \text{ , S.I.}$$

Για το χρονικό διάστημα $t \geq 1,55 \text{ s}$

$$y_\Sigma = 0$$

Τα χρονικά διαστήματα $0 \leq t < 1,05 \text{ s}$ και $t \geq 1,55 \text{ s}$ το σημείο (Σ) είναι ακίνητο, ενώ για $1,05 \text{ s} \leq t < 1,55 \text{ s}$ η ταχύτητα ταλάντωσής του περιγράφεται από την:

$$u_\Sigma = \omega A \sigma \nu \nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) = 10\pi \cdot 0,2 \sigma \nu \nu 2\pi (5t - 5,25) \Rightarrow u_\Sigma = 2\pi \sigma \nu \nu 2\pi (5t - 5,25) \text{ (S.I.)}$$

γ) Για την επιτάχυνση του (Σ) έχουμε:

$$a_\Sigma = -\omega^2 y_\Sigma$$

Για το χρονικό διάστημα $0 \leq t < 1,05 \text{ s}$

$$a_\Sigma = 0$$

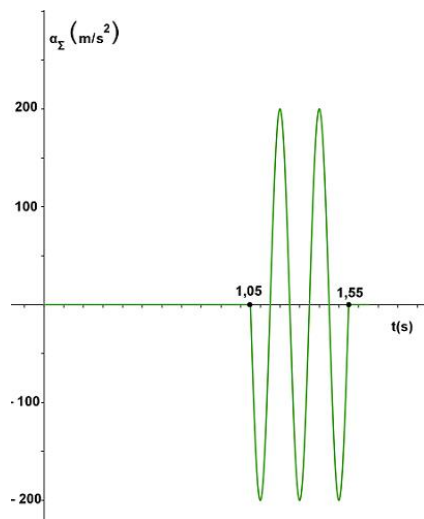
Για το χρονικό διάστημα $1,05 \text{ s} \leq t < 1,55 \text{ s}$

$$a_\Sigma = -\omega^2 A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \Rightarrow a_\Sigma = -200 \eta \mu 2\pi (5t - 5,25) \text{ , S.I.}$$

Για το χρονικό διάστημα $t \geq 1,55 \text{ s}$

$$\alpha_{\Sigma} = 0$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



δ) Για να έχουμε ενίσχυση στο Σ πρέπει:

$$|r_1 - r_2| = N\lambda' \Rightarrow 2 = N\lambda' \Rightarrow f' = N \frac{u}{2} \Rightarrow f' = 2N, N = 1, 2, \dots$$

Συνεπώς: $f'_{\min} = 2 \text{ Hz}$

Πρόβλημα 3.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία A και B αντίστοιχα, της επιφάνειας υγρού και απέχουν κατά $d = 4,8 \text{ m}$. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού χωρίς αρχική φάση, δημιουργώντας κύματα μήκους κύματος $\lambda = 0,8 \text{ m}$ και πλάτους $A = 0,5 \text{ m}$, τα οποία και συμβάλλουν στην επιφάνεια του υγρού. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά $r_{1(\Sigma)}$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_{2(\Sigma)} > r_{1(\Sigma)}$ από την πηγή Π_2 . Το (Σ) ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,1 \text{ s}$ και τη χρονική στιγμή t_2 αφού εκτελέσει 2,5 ταλαντώσεις ακινητοποιείται. Το κύμα από την Π_2 φτάνει στην Π_1 επίσης τη χρονική στιγμή t_2 .

α) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις $r_{1(\Sigma)}$ και $r_{2(\Sigma)}$.

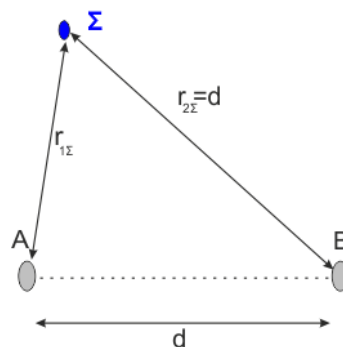
β) Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων του τμήματος ΑΣ που είναι ακίνητα τη χρονική στιγμή t_1 .

γ) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου (Σ) σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ) Να υπολογίσετε το πλήθος των υπερβολών ενίσχυσης που τέμνουν το τμήμα ΑΣ μετά τη συμβολή των κυμάτων στο (Σ).

Λύση

α) Το υλικό σημείο Σ παραμένει ακίνητο μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , οπότε στο Σ φθάνει το κύμα από την πλησιέστερη σε αυτό πηγή δηλαδή την Π_1 . Για $t \geq t_1$ το υλικό σημείο (Σ) ταλαντώνεται υπό την ενέργεια του κύματος που εκπέμπει η Π_1 μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 , οπότε στο (Σ) φθάνει το κύμα και από την πηγή Π_2 που είναι πιο απομακρυσμένη. Για $t \geq t_2$ έχουμε τη συμβολή των δύο κυμάτων.



Το χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$ ισούται με 2,5 περιόδους.

Δηλαδή $t_2 - t_1 = 2,5T$. Άρα $r_{2(\Sigma)} = r_{1(\Sigma)} + 2,5\lambda$ (1)

Επίσης, το κύμα που εκπέμπει η Π_2 φτάνει ταυτόχρονα στα (Σ) και (Α), συνεπώς: $r_{2(\Sigma)} = d = 4,8 \text{ m}$. Η (1) γράφεται:

$$r_{1(\Sigma)} = d - 2,5\lambda = 2,8 \text{ m}$$

β) Τη χρονική στιγμή t_1 στα σημεία του ΑΣ έχει φτάσει μόνο το κύμα από την Π_1 . Είναι $ΑΣ = 2,8 \text{ m} = 3,5\lambda$. Ανά μήκος κύματος υπάρχουν 2 ακίνητα σημεία, αυτά που βρίσκονται σε μέγιστη απομάκρυνση. Συνεπώς στο ΑΣ τη χρονική στιγμή t_1 υπάρχουν 7 ακίνητα σημεία.

γ) Για την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων έχουμε: $u = \frac{r_{1(\Sigma)}}{t_1} = \frac{28 \text{ m}}{11 \text{ s}}$ ενώ:

$$u = \frac{r_{2(\Sigma)}}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{66}{35} \text{ s}$$

$$\text{Ακόμα: } u = \lambda f \Rightarrow f = \frac{35}{11} \text{ Hz και } T = \frac{11}{35} \text{ s}$$

Πρέπει να βρούμε ποιο θα είναι το πλάτος ταλάντωσης του (Σ) μετά την συμβολή.

Η διαφορά των αποστάσεων $r_{1(\Sigma)} - r_{2(\Sigma)}$ είναι

$$r_{1(\Sigma)} - r_{2(\Sigma)} = 2,8\text{m} - 4,8\text{m} = -2\text{m}$$

Ικανοποιείται η συνθήκη αποσβετικής συμβολής

$$r_{1(\Sigma)} - r_{2(\Sigma)} = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \text{ για } N = -3$$

Επομένως μετά τη συμβολή, το (Σ) παραμένει ακίνητο.

Η απομάκρυνση του (Σ) σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις στο S.I.:

Για το χρονικό διάστημα $0 \leq t < 1,1\text{s}$,

$$y_{\Sigma} = 0$$

Για το χρονικό διάστημα $1,1\text{s} \leq t < \frac{66}{35}\text{s}$,

$$y_{\Sigma} = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \Rightarrow y_{\Sigma} = 0,5 \eta \mu 7\pi \left(\frac{10}{11} t - 1 \right) \text{ (S.I.)}$$

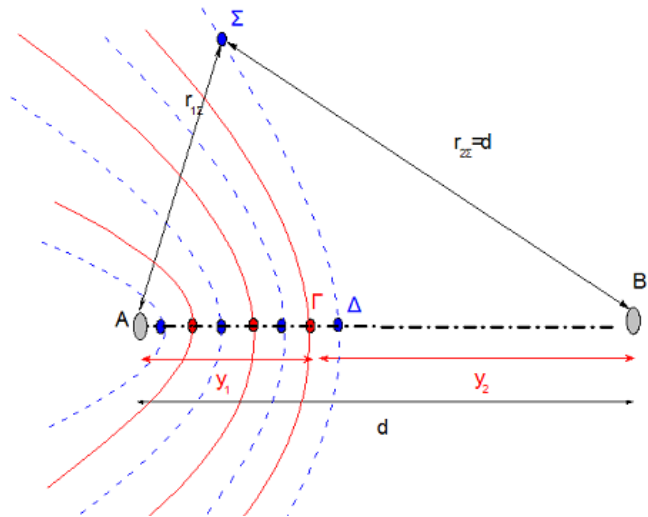
Για το χρονικό διάστημα $t \geq \frac{66}{35}\text{s}$,

$$y_{\Sigma} = 0$$

δ) Το σημείο (Σ) μένει ακίνητο αφού συμβάλλουν σε αυτό τα δύο κύματα. Είναι δηλαδή σημείο ακυρωτικής συμβολής. Αν (Δ) σημείο του ΑΒ, το οποίο απέχει κατά $x_{1\Delta}$ και $x_{2\Delta}$ από τις πηγές Π_1, Π_2 αντίστοιχα και το οποίο ανήκει στην ίδια υπερβολή απόσβεσης με το (Σ), θα πρέπει:

$$\begin{cases} x_{1\Delta} + x_{2\Delta} = d \\ x_{1\Delta} - x_{2\Delta} = r_{1(\Sigma)} - r_{2(\Sigma)} \end{cases} \Rightarrow x_{1\Delta} = 1,4 \text{ m}$$

Έστω Γ σημείο ενίσχυσης του ΑΒ, το οποίο απέχει από τις κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 κατά y_1 και y_2 αντίστοιχα.



Θα πρέπει:

$$y_1 - y_2 = N\lambda,$$

$$N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\text{ενώ } y_1 + y_2 = d$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις:

$$y_1 = \frac{N\lambda + d}{2}$$

Αν το σημείο (Γ) βρίσκεται μεταξύ των Α και Δ τότε:

$$0 < y_1 < 1,4 \text{ m} \Rightarrow$$

$$0 < \frac{N\lambda + d}{2} < 1,4 \text{ m} \Rightarrow$$

$$-6 < N < -2,5$$

Άρα ο ακέραιος N μπορεί να πάρει τις τιμές $N: -5, -4, -3$.

Άρα υπάρχουν 3 υπερβολές ενίσχυσης που τέμνουν το τμήμα ΑΔ άρα κατ' επέκταση και το ΑΣ.

Πρόβλημα 4.

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με εξισώσεις

$$\begin{cases} y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \\ y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \end{cases} \text{ (S.I.)}$$
 διαδίδονται

με αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x' Ο x . Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα το οποίο στη θέση $O(x=0)$ εμφανίζει κοιλία. Στο σημείο $A(x_A=0,45\text{ m})$ είναι ο πέμπτος δεσμός του θετικού ημιάξονα. Το σημείο $B(x_B=1,025\text{ m})$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του ανά $0,2\text{ s}$.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.

β) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

γ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημείου $\Gamma(x_\Gamma=13/30\text{ m})$ τη χρονική στιγμή που το σημείο $\Delta(x_\Delta=0,2\text{ m})$ βρίσκεται σε ακραία θετική απομάκρυνση.

δ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος AB της χορδής τη χρονική στιγμή που η απομάκρυνση του O ισούται με $y_0=0,4\text{ m}$.

Λύση

α) Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ισούται με $\lambda/2$ ενώ η απόσταση μίας κοιλίας από τον πλησιέστερο δεσμό ισούται με $\lambda/4$. Άρα: $OA = \frac{\lambda}{4} + 4\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 0,2\text{ m}$

Το B διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του ανά $0,2\text{ s}$ άρα $\frac{T}{2} = 0,2\text{ s} \Rightarrow T = 0,4\text{ s}$ και $f = 2,5\text{ Hz}$.

Συνεπώς: $u = \lambda f = 0,5\text{ m/s}$

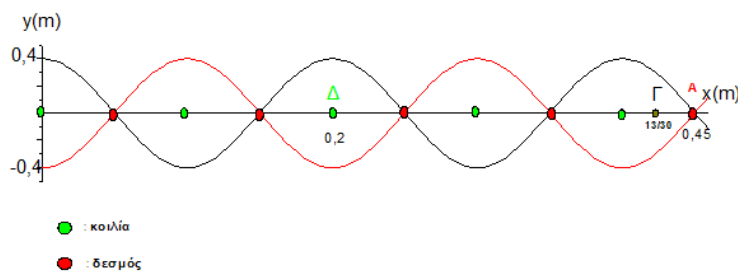
β) Από τις εξισώσεις των κυμάτων έχουμε ότι $A = 0,2\text{ m}$. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = 0,4\sigma\upsilon\nu(10\pi x)\eta\mu(5\pi t) \text{ (S.I.)}$$

γ) Όλα τα σημεία διέρχονται ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας. Συνεπώς όταν το Δ βρίσκεται σε ακραία απομάκρυνση, τότε και το Γ θα βρίσκεται στη δική του ακραία απομάκρυνση. Δηλαδή: $|y_{\Gamma}| = 2A \left| \sin \left(2\pi \frac{x_{\Gamma}}{\lambda} \right) \right| = 0,4 \left| \sin \left(\frac{13\pi}{3} \right) \right| m = 0,2 m$

Για να προσδιορίσουμε το πρόσημο της απομάκρυνσης του σημείου Γ, θα χρησιμοποιήσουμε το πρόσημο της απομάκρυνσης του σημείου Δ και το γεγονός ότι δύο κινούμενα σημεία βρίσκονται είτε σε συμφωνία είτε σε αντίθεση φάσης. Είναι $x_{\Delta} = 0,2 m = \lambda$ άρα είναι η 2^η κοιλιά μετά το Ο. Επίσης:

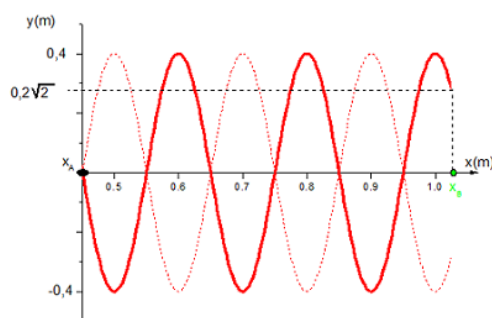
$x_{\Gamma} = \frac{13}{30} m = \left(\frac{12}{30} + \frac{1}{30} \right) m = 2\lambda + \frac{\lambda}{6}$, δηλαδή το Γ βρίσκεται μεταξύ της 4^{ης} κοιλιάς μετά το Ο του θετικού ημιάξονα και του 5^{ου} δεσμού. Άρα μεταξύ των ατράκτων που ανήκουν παρεμβάλλεται άλλη μία άτρακτος. Συνεπώς βρίσκονται σε συμφωνία φάσης. Η απομάκρυνση του Γ θα είναι και αυτή θετική: $y_{\Gamma} = +0,2 m$



δ) Το Ο είναι κοιλιά άρα ταλαντώνεται με πλάτος $A' = 0,4 m$. Όταν βρίσκεται σε ακραία θέση, όλα τα σημεία της χορδής βρίσκονται στη δική τους ακραία θέση. Τα σημεία Ο και Β βρίσκονται σε συμφωνία φάσης άρα όταν $y_0 = A'$ τότε $y_B = A'_B = 2A \sin(10\pi x_B) = 0,4 \sin(10,25\pi) = 0,2\sqrt{2} m$.

Επειδή η απομάκρυνση του Α είναι θετική όπως και του Ο συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Ο και Β βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

Για το τμήμα ΑΒ το στιγμιότυπο θα είναι:



Πρόβλημα 5.

Οριζόντια ελαστική χορδή μήκους $L=1\text{m}$ έχει το δεξί άκρο της $A(x_A=1\text{m})$ στερεωμένο σε ακλόνητο εμπόδιο. Το αριστερό άκρο $O(x=0)$ είναι ελεύθερο να κινηθεί. Στη χορδή έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, με το O να είναι κοιλία, η οποία ταλαντώνεται με πλάτος $A_0=1,6\text{m}$. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του O ισούται με $u_{\max(O)}=16\pi\text{ m/s}$, ενώ μεταξύ των O και A εμφανίζονται δύο δεσμοί.

α) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος των κυμάτων των οποίων η συμβολή παρήγαγε το στάσιμο.

β) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

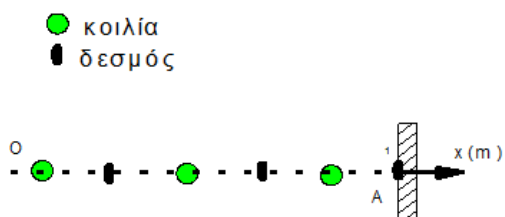
γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο της χορδής τη χρονική στιγμή $t_1=0,325\text{ s}$.

δ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του υλικού σημείου $B(x_B=0,9\text{m})$ τη στιγμή που το υλικό σημείο O βρίσκεται σε ακραία αρνητική απομάκρυνση.

Λύση

α) Μεταξύ του O και του A εμφανίζονται δύο δεσμοί ενώ δεσμός είναι και το A . Δύο διαδοχικοί δεσμοί απέχουν κατά $\lambda/2$, ενώ μία κοιλία απέχει από τον πλησιέστερο δεσμό κατά $\lambda/4$. Άρα:

$$L = 2\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 0,8\text{ m}$$



β) Είναι: $u_{\max(O)} = \omega A_0 \Rightarrow \omega = \frac{16\pi}{A_0} = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, άρα $T = 0,2\text{ s}$

Ακόμα: $A_0 = 2A \Rightarrow A = 0,8\text{ m}$

Συνεπώς: $y = 2A \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \eta\mu\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = 1,6 \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I)}$

γ) Για $t = 0,325 \text{ s}$ είναι:

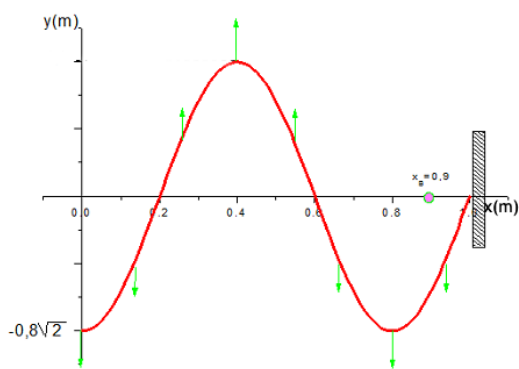
$$y = 1,6 \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) \eta \mu(3,25\pi) \Rightarrow y = -0,8\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Η απομάκρυνση της κοιλίας $O(x=0)$ για $t = 0,325 \text{ s}$ ισούται με $y = -0,8\sqrt{2} \text{ m}$

Η ταχύτητα ταλάντωσης του O είναι: $u_0 = 16\pi \sin(10\pi t) \text{ (S.I.)}$

Άρα για $t = 0,325 \text{ s}$ είναι: $u_0 = -8\sqrt{2}\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Το ζητούμενο στιγμιότυπο θα είναι:



δ) Μεταξύ της ατράκτου του O και της ατράκτου του B μεσολαβεί μία ακόμα, συνεπώς τα O και B βρίσκονται σε συμφωνία φάσης. Έτσι όταν το O βρίσκεται σε ακραία αρνητική απομάκρυνση το B θα βρίσκεται στη δική του ακραία αρνητική απομάκρυνση. Δηλαδή:

$$y_B = -A_B = -2A \left| \sin \frac{5\pi \cdot 0,9}{2} \right| \text{ m} = -0,8\sqrt{2} \text{ m}$$

Πρόβλημα 6.

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'Ox$. Το κάθε κύμα εξαναγκάζει το σημείο $O(x=0)$ σε ταλάντωση της μορφής $y_0 = A\eta\mu\omega t$. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα με εξίσωση: $y = 2A\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(8\pi t)$ (S.I.). Το υλικό σημείο $\Gamma\left(x_\Gamma = \frac{7}{15} \text{ m}\right)$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A_\Gamma = 0,5 \text{ m}$.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των οδεύοντων κυμάτων.

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του υλικού σημείου Γ , τη στιγμή που το $O(x=0)$ βρίσκεται στη μέγιστη θετική του απομάκρυνση.

γ) Υλικό σημείο Δ του θετικού ημιάξονα έχει εξίσωση ταχύτητας $u_\Delta = -4\sqrt{2}\pi\sigma\upsilon\nu(8\pi t)$ (S.I.). Αν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ της 6^{ης} κοιλίας και του 6^{ου} δεσμού του θετικού ημιάξονα, να προσδιορίσετε τη συντεταγμένη της θέσης του Δ .

δ) Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων του τμήματος OD της χορδής, τα οποία κάθε χρονική στιγμή έχουν ίση απομάκρυνση και ίση ταχύτητα με το Δ .

Λύση

α) Από την δοθείσα εξίσωση του στάσιμου είναι: $\lambda = 0,4 \text{ m}$ και $f = 4 \text{ Hz}$.

Για το πλάτος του σημείου Γ είναι:

$$A_\Gamma = 2A \left| \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_\Gamma}{\lambda} \right| \Rightarrow 0,5 = 2A \left| \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{3} \right| \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$$

$$\text{Άρα: } \begin{cases} y_1 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ y_2 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0,5\eta\mu\pi(8t - 5x) \\ y_2 = 0,5\eta\mu\pi(8t + 5x) \end{cases} \text{ (S.I.)}$$

β) Τα κινούμενα σημεία της χορδής βρίσκονται είτε σε συμφωνία φάσης είτε σε αντίθεση φάσης. Άρα όταν το $O(x=0)$ βρίσκεται σε ακραία θετική απομάκρυνση τότε και το Γ θα βρίσκεται σε ακραία απομάκρυνση (θετική αν βρίσκεται σε συμφωνία φάσης με το O , αρνητική αν βρίσκεται σε αντίθεση φάσης με το O). Συνεπώς $u_\Gamma = 0$.

γ) Για το σημείο $\Delta(x_\Delta)$ θα είναι: $y_\Delta = \sin(5\pi x_\Delta) \eta\mu(8\pi t)$ (S.I.)

ενώ η ταχύτητα ταλάντωσης του είναι: $u_\Delta = 8\pi \sin(5\pi x_\Delta) \cos(8\pi t)$ (S.I.)

Συνεπώς θα πρέπει:

$$8\pi \sin(5\pi x_\Delta) = -4\sqrt{2}\pi \Rightarrow \sin(5\pi x_\Delta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_\Delta = \frac{8k+3}{20} \\ x_\Delta = \frac{8k-3}{20} \end{cases}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

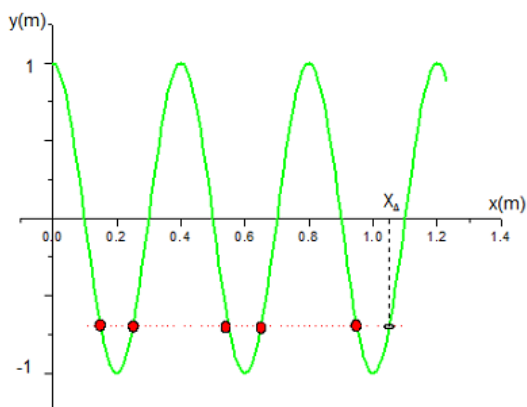
Η 6^η κοιλία βρίσκεται στη θέση $x_A = 5 \frac{\lambda}{2} = 1 \text{ m}$ ενώ ο 6^{ος} δεσμός του θετικού ημιάξονα

έχει συντεταγμένη θέσης $x_B = (2 \cdot 5 + 1) \frac{\lambda}{4} = 1,1 \text{ m}$.

$$\text{Πρέπει: } 1 < x_\Delta < 1,1 \Rightarrow \begin{cases} 1 < \frac{8k+3}{20} < 1,1 \\ 1 < \frac{8k-3}{20} < 1,1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{17}{8} < k < \frac{19}{8} \\ \frac{23}{8} < k < \frac{25}{8} \end{cases}$$

Για την πρώτη ανίσωση δεν υπάρχει ακέραιος k που να την επαληθεύει. Η δεύτερη επαληθεύεται για τον ακέραιο $k = 3$. Άρα $x_\Delta = \frac{8 \cdot 3 - 3}{20} \text{ m} = \frac{21}{20} \text{ m} = 1,05 \text{ m}$.

δ) Για να αποφύγουμε και πάλι την επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του τμήματος ΟΔ κάποια τυχαία χρονική στιγμή:



Υπάρχουν 5 ακόμη σημεία της χορδής που έχουν ίση απομάκρυνση και ίση ταχύτητα με το Δ.

Πρόβλημα 7. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $d=5\text{ m}$. Οι πηγές ξεκινούν τη χρονική στιγμή $t=0$ να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού χωρίς αρχική φάση με συχνότητα $f=5\text{ Hz}$ και ίδιο πλάτος δημιουργώντας κύματα, τα οποία συμβάλλουν στην επιφάνεια του υγρού. Σημείο (Σ) απέχει κατά $r_{1(\Sigma)}=3\text{ m}$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_{2(\Sigma)} > r_{1(\Sigma)}$ από την πηγή Π_2 . Μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό, το (Σ) ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση: $y_{\Sigma} = 0,1\mu\pi\left(10t - \frac{35}{3}\right)$, (S.I.).

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι $u = 3\text{ m/s}$.

α) Να υπολογίσετε την απόσταση του (Σ) από την Π_2 .

β) Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων ενίσχυσης που βρίσκονται πάνω στο τμήμα ΑΒ.

γ) Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου (Κ) το οποίο βρίσκεται επί του ΑΒ και ανήκει στην ίδια υπερβολή με το (Σ).

δ) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου (Κ) σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση

α) Για την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων ισχύει: $u = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{3\text{ m/s}}{5\text{ Hz}} = 0,6\text{ m}$

Μετά τη συμβολή των κυμάτων στο (Σ), η απομάκρυνσή του σε συνάρτηση με το χρόνο είναι στο S.I.:

$$y_{\Sigma} = 2A\sigma\upsilon\upsilon\left(2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right)\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow y_{\Sigma} = 2A\sigma\upsilon\upsilon\left(\pi\frac{3-r_2}{0,6}\right)\eta\mu\pi\left(\frac{2t}{T} - \frac{3+r_2}{0,6}\right) \text{ (S.I.)}$$

Συγκρίνοντας με την εξίσωση $y_{\Sigma} = 0,1\mu\pi\left(10t - \frac{35}{3}\right)$ (S.I.)

$$\text{προκύπτει: } \frac{3+r_2}{0,6} = \frac{35}{3} \Rightarrow r_2 = 4\text{ m}$$

$$\text{Επίσης: } 2A\sigma\upsilon\upsilon\left(\pi\frac{3-r_2}{0,6}\right) = 0,1\text{ m} \Rightarrow A = 0,1\text{ m}$$

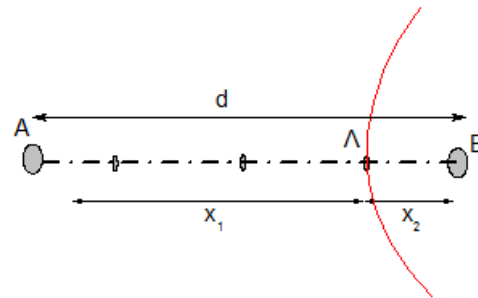
β) Έστω ότι το (Λ) είναι σημείο ενίσχυσης του ΑΒ και απέχει από τις πηγές κατά x_1 και x_2 αντίστοιχα.

Τότε είναι: $x_1 - x_2 = N\lambda$, $N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Ταυτόχρονα θα πρέπει: $x_1 + x_2 = d$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές

εξισώσεις προκύπτει: $x_1 = \frac{N\lambda + d}{2}$

Το σημείο (Λ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα:



$$0 < x_1 < d \Rightarrow 0 < \frac{N\lambda + d}{2} < d \Rightarrow -\frac{d}{\lambda} < N < \frac{d}{\lambda} \Rightarrow$$

$$-\frac{25}{3} < N < \frac{25}{3}$$

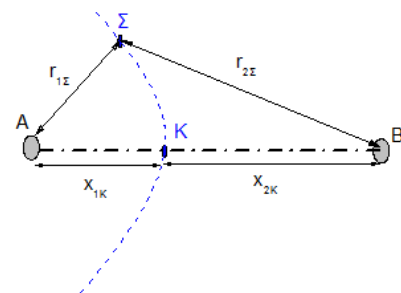
Άρα ο ακέραιος N μπορεί να πάρει τις τιμές $N = 0, \pm 1, \dots, \pm 8$

Συνολικά υπάρχουν 17 σημεία ενίσχυσης επί του ΑΒ.

γ) Πρέπει: $x_{1K} - x_{2K} = r_{1\Sigma} - r_{2\Sigma} \Rightarrow x_{1K} - x_{2K} = -1 \text{ m}$

Επίσης: $x_{1K} + x_{2K} = d = 5 \text{ m}$

Προσθέτοντας κατά μέλη: $x_{1K} = 2 \text{ m}$ και $x_{2K} = 3 \text{ m}$



δ) Το κύμα από την Π_1 φτάνει στο (Κ) τη

χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{x_{1K}}{u} = \frac{2}{3} \text{ s}.$$

Αντίστοιχα το κύμα από την πηγή Π_2 φθάνει στο Κ τη χρονική στιγμή : $t_2 = \frac{x_{2K}}{u} = 1 \text{ s}$

Άρα:

$$y_K = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{2}{3} s \\ A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{1K}}{\lambda} \right), & \frac{2}{3} s \leq t < 1 s \\ 2A \sigma \upsilon \nu \left(2\pi \frac{x_{1K} - x_{2K}}{2\lambda} \right) \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{1K} + x_{2K}}{2\lambda} \right), & t \geq 1 s \end{cases}$$

$$y_K = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{2}{3} s \\ 0,1 \eta \mu 2\pi \left(5t - \frac{10}{3} \right), & \frac{2}{3} s \leq t < 1 s \\ 0,1 \eta \mu 2\pi \left(5t - \frac{25}{6} \right), & t \geq 1 s \end{cases}$$

Πρόβλημα 8. (εκτός εξεταστέας ύλης)

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού και ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του

υγρού, σύμφωνα με τις:

$$\begin{cases} y_1 = 0,2\eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (S.I.)} \\ y_2 = 0,2\eta\mu(10\pi t) \end{cases}$$

Τα δημιουργούμενα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα 2 m/s .

α) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης ενός σημείου (Σ) της επιφάνειας το οποίο απέχει κατά r_1 από την πηγή Π_1 και κατά r_2 από την πηγή Π_2 , αφού συμβάλλουν τα κύματα σε αυτό.

β) Να γράψετε τη συνθήκη ενίσχυσης για το (Σ).

γ) Αν $r_1 = r_2$ ποιο είναι το πλάτος ταλάντωσης του (Σ) μετά τη συμβολή;

δ) Αν $r_1 = r_2$ ποιά θα έπρεπε να είναι η αρχική φάση της y_1 , ώστε το (Σ) να είναι σημείο απόσβεσης;

Λύση

Από τις εξισώσεις ταλάντωσης των πηγών είναι: $A = 0,2\text{ m}$, $T = 0,2\text{ s}$ και $f = 5\text{ Hz}$. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι: $u = \lambda f \Rightarrow \lambda = 0,4\text{ m}$. Επίσης η ταλάντωση της Π_1 παρουσιάζει αρχική φάση $\phi_0 = \pi/3\text{ rad}$.

α) Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας η συνισταμένη απομάκρυνση του Σ είναι:

$$y = y_{1(\Sigma)} + y_{2(\Sigma)} \Rightarrow y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + \phi_0\right] + A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα: $\eta\mu a + \eta\mu b = 2\eta\mu\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{a-b}{2}\right)$

η παραπάνω γράφεται:

$$y = 2A\eta\mu\left[\frac{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + \phi_0 + 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)}{2}\right] \cdot \sigma\upsilon\nu\left[\frac{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + \phi_0 - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)}{2}\right] \Rightarrow$$

$$y = 2A \sin \left[\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right] \cdot \eta \mu \left[\pi \left(\frac{2t}{T} - \frac{r_2 - r_1}{\lambda} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right] \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας στο S.I. έχουμε:

$$y = 0,4 \sin \pi \left(\frac{r_2 - r_1}{0,4} + \frac{1}{6} \right) \cdot \eta \mu \pi \left(\frac{2t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{0,4} + \frac{1}{6} \right) \text{ (S.I.)}$$

β) Θα πρέπει:

$$\left| \sin \left(\frac{r_2 - r_1}{0,4} + \frac{1}{6} \right) \right| = 1 \Rightarrow \left(\frac{r_2 - r_1}{0,4} + \frac{1}{6} \right) \pi = N\pi \Rightarrow r_2 - r_1 = 0,4N - \frac{0,4}{6} = \frac{6N-1}{15}, N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

γ) Αν $r_1 = r_2$, τότε: $A_\Sigma = 0,4 \left| \sin \pi \left(\frac{(r_2 - r_1)}{0,4} + \frac{1}{6} \right) \right| = 0,4 \left| \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right| m = 0,2\sqrt{3} m$

δ) Από την (1) έχουμε $A_\Sigma = 2A \left| \sin \left[\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right] \right|$.

Για να έχουμε απόσβεση θα πρέπει:

$$\left| \sin \left[\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda} + \frac{\phi_0}{2} \right) \right] \right| = 0 \Rightarrow \frac{\phi_0}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi + \pi$$

Όμως $0 \leq \phi_0 < 2\pi$, άρα $\phi_0 = \pi \text{ rad}$.

Θα πρέπει: $\sin \left(\frac{5}{2}(r_2 - r_1)\pi + \frac{\phi_0}{2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\phi_0}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi_0 = 2k\pi + \pi$

Όμως $0 \leq \phi_0 \leq 2\pi$, άρα $\phi_0 = \pi \text{ rad}$

Ημερομηνία τροποποίησης: 12/10/2022

Επιμέλεια: Ιωάννης Αλεξόπουλος, Ηλίας Ποντικός, Βασίλειος Ιστάπολος
 Επιστημονικός έλεγχος: Γεώργιος Ζησιμόπουλος, Βασίλειος Ραυτόπουλος, Αντώνιος Παλόγος